Corso di recupero di Fisica 2018/2019

Dario Madeo

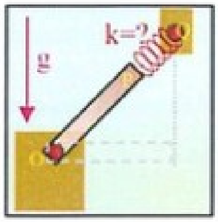
Lezione del 30/08/2019

---

madeo@dii.unisi.it
http://www.dii.unisi.it/~madeo/crf/crf1819.html

Esercizio estratto dall'esame di Fisica 1 dell'8 Luglio 2019

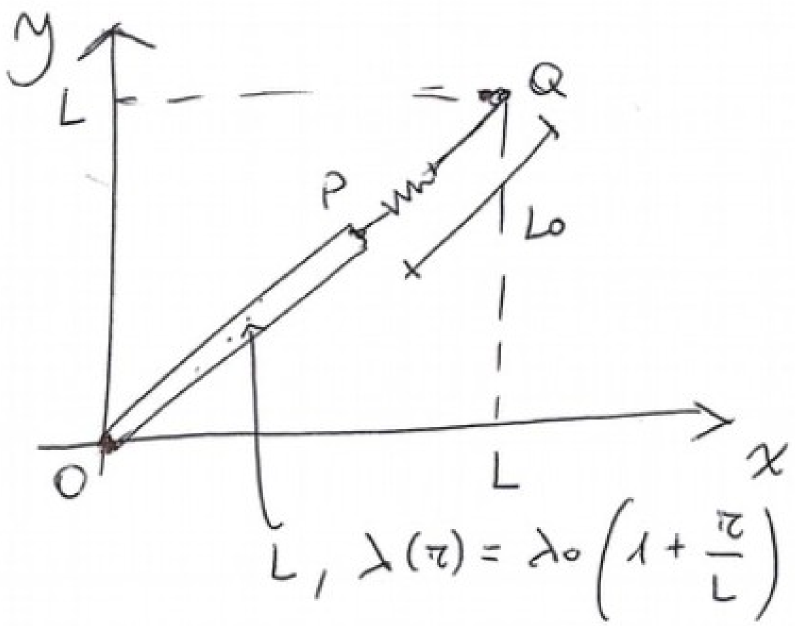
Esercizio 1



La figura mostra una sbarretta sottile non omogenea di lunghezza L ed estremi O e P, la densità lineare di massa dipende dalla distanza r dall'estremo O secondo la legge $\lambda(r)=\lambda_0(1+r/L)$. All'estremo P è applicata una molla avente il secondo estremo fissato a un punto Q, di coordinate (L, L). La sbarretta può ruotare intorno al suo estremo O muovendosi su un piano verticale. Quando la molla e la sbarretta sono allineate (entrambe a 45°, come in figura) la molla è a riposo; quando invece la sbarretta è orizzontale (per cui la molla è verticale) il sistema è all'equilibrio. Dopo aver determinato, massa *M* e distanza *d* fra centro di massa C e O, calcolare la costante elastica della molla.

Esercizio 2

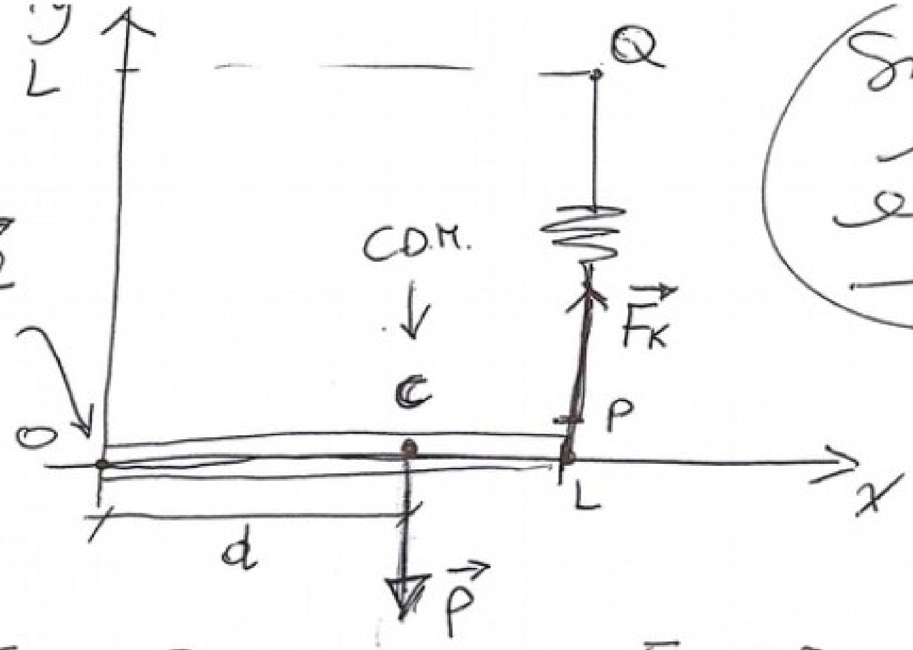
Calcolare il momento d'inerzia *I* della sbarretta di cui all'esercizio precedente rispetto ad un asse orizzontale passante per O e perpendicolare alla sbarretta. Si supponga ora che quel sistema compia piccole oscillazioni intorno alla posizione d'equilibrio: la sbarretta forma un piccolo angolo θ con l'orizzontale. Scrivere energia cinetica E_k ed energia potenziale E_p del sistema in funzione di θ e della sua derivata temporale. Determinare la frequenza angolare di piccola oscillazione del sistema.



$$L_0 = \overline{OQ} - \overline{OP} = \sqrt{L^2+L^2} - L = L\sqrt{2} - L = L(\sqrt{2}-1).$$

lunghezza a riposo della molla

Situazione di equilibrio



$$\vec{P} = \begin{bmatrix} 0 \\ -Mg \end{bmatrix} \qquad \vec{F}_K = \begin{bmatrix} 0 \\ F_K \end{bmatrix}$$

$$F_K = K(\underset{\substack{\uparrow \\ \text{lung. attuale}}}{L} - \underset{\substack{\uparrow \\ \text{lung. a riposo}}}{L_0}) \qquad \vec{R} \in \mathbb{R}^2$$

Equazioni del moto

$x, y \equiv$ pos. del CDM.

1) $M\ddot{x} = R_x = 0$

2) $M\ddot{y} = R_y - Mg + F_K = 0$

$\Rightarrow R_y = Mg - F_K$

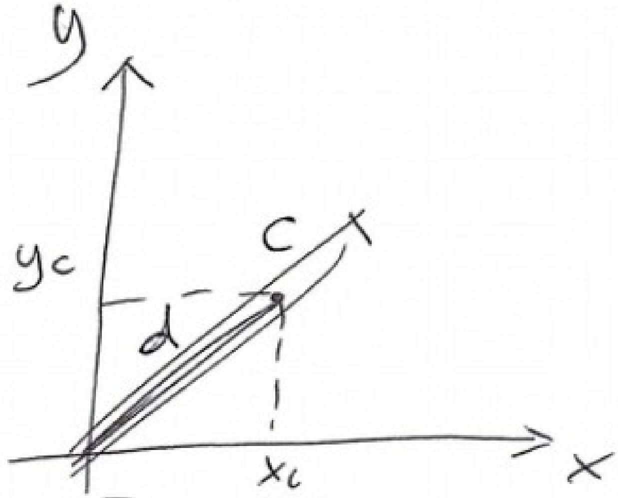
$$\boxed{3)\ I\ddot{\theta} = F_K \cdot L - Mg \cdot d = 0}$$

Statica

Da notare che l'unica equazione che ci interessa è la terza. L'obiettivo è infatti ricavare il valore di k. La prima e la seconda equazione ci dicono come sono fatte le reazioni vincolari. La terza invece lega la forza della molla (e quindi il k) ad altre grandezze note.

$$M = \int dm = \int_0 \lambda(\tau)\,d\tau = (\text{calcoli per casa})$$

$$= \frac{3}{2}\lambda_0 L$$

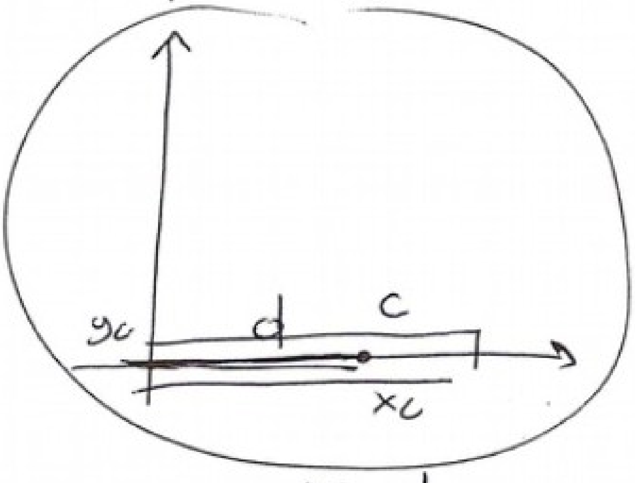


$$d = \frac{1}{M}\int x\,dm =$$

$$= \frac{1}{M}\int_0^L \tau\,\lambda(\tau)\,d\tau$$

$$= (\text{calcoli per casa})$$

$$= \frac{5}{9}L$$



$x_c = d$

$$I = \int D^2\,dm = \int_0^L \tau^2\,\lambda(\tau)\,d\tau$$

distanza tra fulcro e dm ($D=\tau$)

$$= (\text{calcoli a casa}) = \frac{7}{12}\lambda_0 L^3$$

$$F_k L - Mg\,d = 0$$

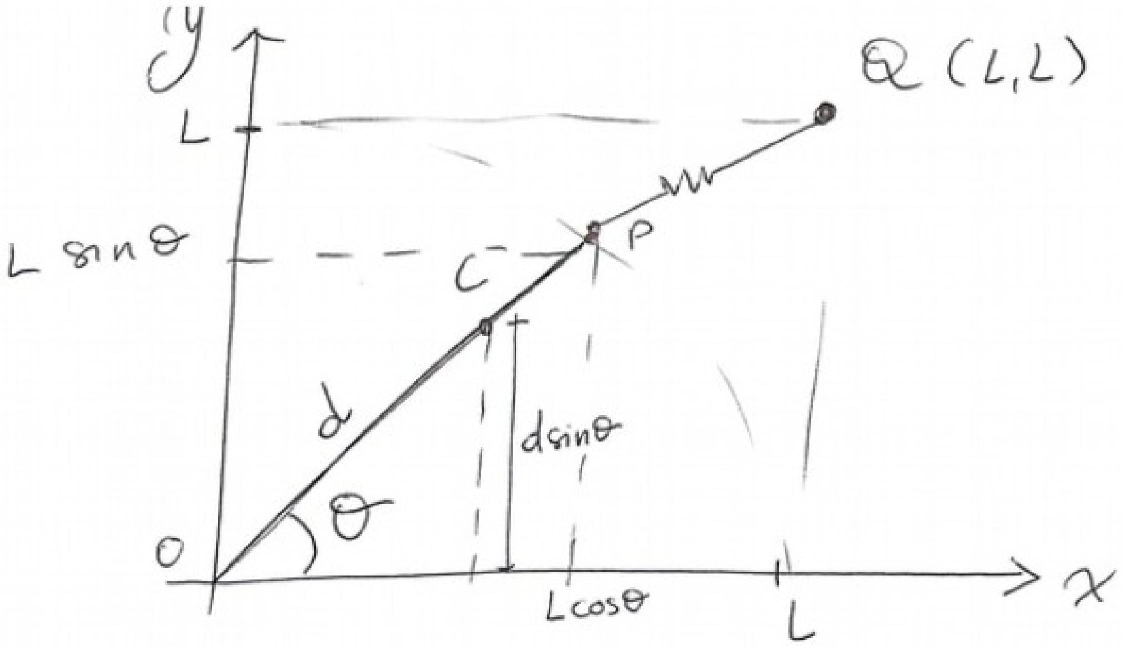
$$k(L - L_0)L - Mg\,d = 0$$

$$k = \frac{Mg\,d}{(L - L_0)\cdot L}$$

$$= \frac{15}{18}\,\frac{\lambda_0\, g}{2 - \sqrt{2}}\,.$$

Esercizio 2

Si richiede di calcolare l'energia meccanica del sistema e di valutare la pulsazione sotto l'ipotesi che la sbarretta compia piccole oscillazioni intorno al punto di equilibrio stabile.



Energia potenziale gravitazionale

$$U_g = Mgd\sin\theta \underset{\theta\simeq 0}{\simeq} Mgd\theta$$

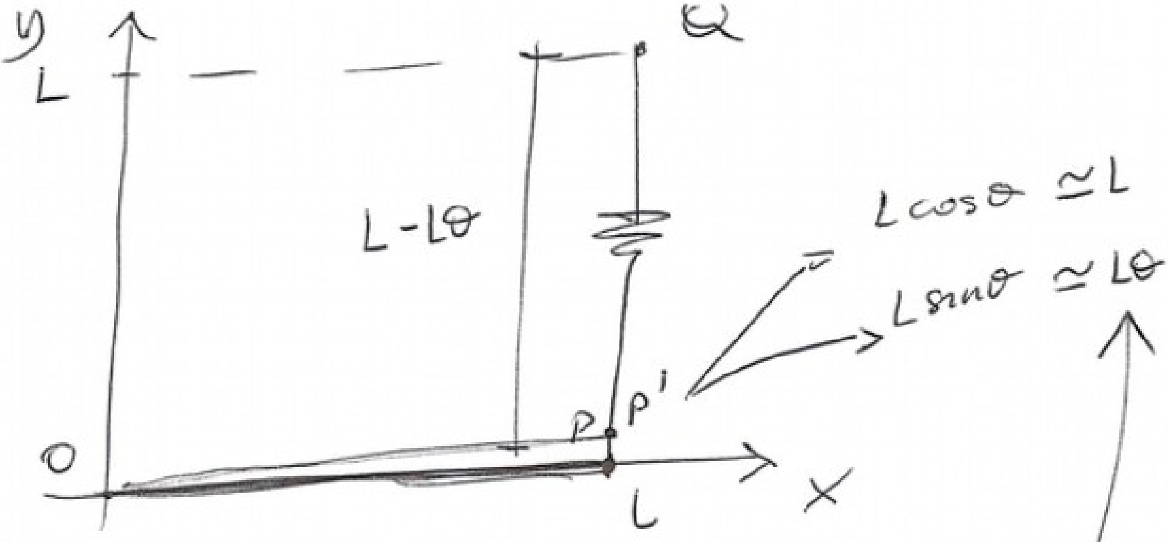
Energia potenziale della molla

$$U_K = \frac{1}{2}K\left(\overline{PQ} - L_0\right)^2$$

$$\overline{PQ} = \sqrt{(L\cos\theta - L)^2 + (L\sin\theta - L)^2}$$

$$= L\sqrt{3 - 2(\cos\theta + \sin\theta)}$$

$\Rightarrow$ Difficile calcolare Taylor



$$\overline{QP'} = L - L\theta$$

$$U_K = \frac{1}{2}K\left(\overline{QP'} - L_0\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{2}K\left(L - L\theta - L_0\right)^2 \leftarrow \text{(Valido per } \theta \simeq 0\text{)}$$

$$\sin\theta \simeq \theta + \ldots$$

$$\cos\theta \simeq 1 - \frac{\theta^2}{2} + \ldots$$

$$K = \cancel{\frac{1}{2} M (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)} + \frac{1}{2} I \omega^2$$

$$K = \frac{1}{2} I \omega^2$$ (valido perché lavoro rispetto al fulcro).

$$I \ddot{\theta} = - \frac{\partial U}{\partial \theta}$$

$$= - \frac{\partial}{\partial \theta} \left[U_g + U_K \right]$$

$$= - \frac{\partial}{\partial \theta} \left[Mgd\theta + \frac{1}{2} k (L - L\theta - L_0)^2 \right]$$

$$= - Mgd - \frac{1}{2} K \, 2 (-L)(L - L\theta - L_0)$$

$$= - Mgd + KL (L - L\theta - L_0)$$

$$= \underbrace{- Mgd + KL (L - L_0)}_{} - KL^2 \theta$$

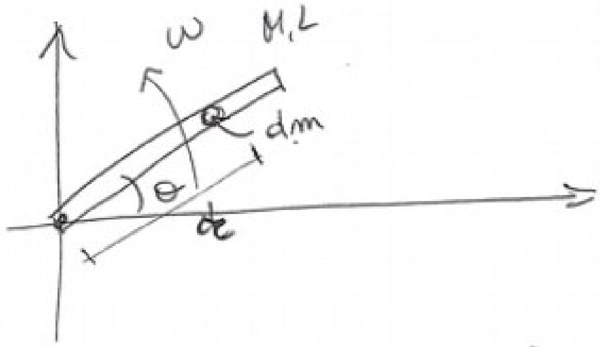
$$= - KL^2 \theta$$

$$I \ddot{\theta} = - KL^2 \theta$$ eq. del moto per piccole oscillazioni

$$\ddot{\theta} = -\frac{kL^2}{I}\theta$$

$$\Omega^2 = \frac{kL^2}{I} = \dots = \frac{5}{7}\frac{g}{L}(2+\sqrt{2})$$

Bonus – Energia cinetica di un corpo rigido



Quant'è l'energia cinetica di dm?

$$\frac{1}{2}\, dm\, (r\omega)^2$$

$$E = \int \frac{1}{2}\, dm\, r^2 \omega^2 = \int_0^L \frac{1}{2} \left(\overset{\lambda}{\frac{M}{L}}\right) dr\, r^2 \omega^2$$

$$dm = \lambda\, dr$$

$$= \frac{1}{2} \frac{M}{L} \omega^2 \int_0^L r^2\, dr$$

$$= \frac{1}{2} \frac{M}{\cancel{L}} \omega^2 \frac{L^{\cancel{3}\,2}}{3} = \frac{1}{2} \left(\frac{ML^2}{3}\right) \omega^2$$

I rispetto ad O.

$$I = I_c + Md^2 \qquad d = \text{fulcro} - \text{CDM}$$

$$E = \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} \left(I_c + Md^2\right) \omega^2$$

$$= \frac{1}{2} I_c \omega^2 + \frac{1}{2} M (d\omega)^2$$

$$= \frac{1}{2} I_c \omega^2 + \frac{1}{2} M V_c^2$$

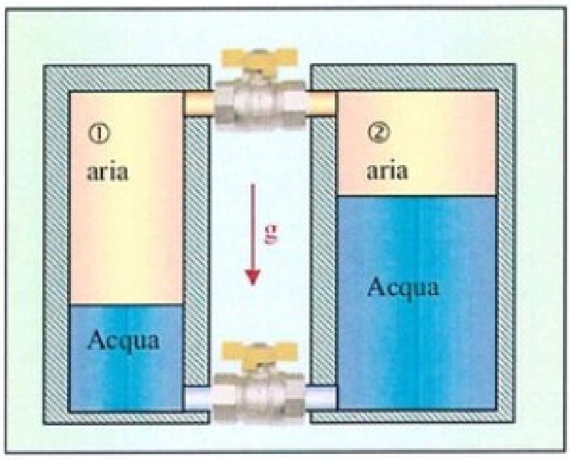
$$E = \frac{1}{2} I_F \omega^2 = \frac{1}{2} I_c \omega^2 + \frac{1}{2} M V_c^2$$

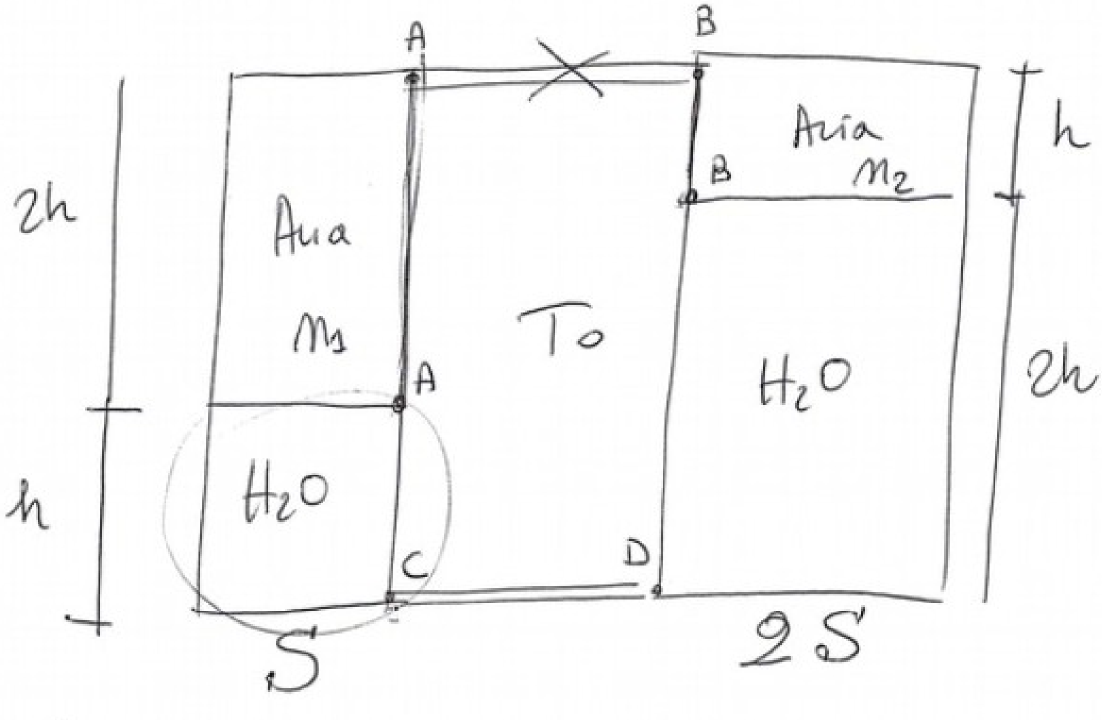
I_F = momento di inerzia rispetto al fulcro
I_C = momento di inerzia rispetto al CDM

Esercizio estratto dall'esame di Fisica1 dell'8 Luglio 2019

Esercizio 3

Si hanno due recipienti cilindrici di uguale altezza 3h ma di sezione uno doppio dell'altro. Essi sono connessi da due sottili condotti che possono essere aperti o chiusi. Nella condizione di equilibrio iniziale, il rubinetto superiore è chiuso, quello inferiore è aperto e il recipiente n.1 (quello più piccolo) è riempito per un terzo (fino ad h), di acqua (liquido ideale di densità ρ) sopra la quale c'è una mole d'aria, mentre nel secondo recipiente l'acqua arriva a due terzi dell'altezza (a 2h) e sopra aria (si assuma che tutta l'aria si mantenga sempre all'equilibrio termico con l'ambiente). Quante moli d'aria ci sono nel secondo recipiente? Si chiude il rubinetto inferiore e si apre quello superiore: quante moli di aria passano da un recipiente all'altro? Ora si apre anche il rubinetto inferiore. Quante moli di aria si spostano?





All'equilibrio : $\underline{p_C = p_D}$

$$\left.\begin{aligned} p_C &= p_A + \rho g h \\ p_D &= p_B + \rho g 2h \end{aligned}\right] \text{ Stevino sull'acqua}$$

$$p_C = p_D \Rightarrow p_A + \rho g h = p_B + \rho g 2h$$

$$\boxed{p_A - p_B = \rho g h} \rightarrow \text{I 2 gas sono a pressioni diverse}$$

$$\begin{cases} p_A V_A = n_1 R T_0 \\ p_B V_B = n_2 R T_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} p_A = \dfrac{n_1 R T_0}{V_A} = \dfrac{R T_0}{2hS} \\ p_B = \dfrac{n_2 R T_0}{V_B} = \dfrac{n_2 R T_0}{h\,2S} \end{cases}$$

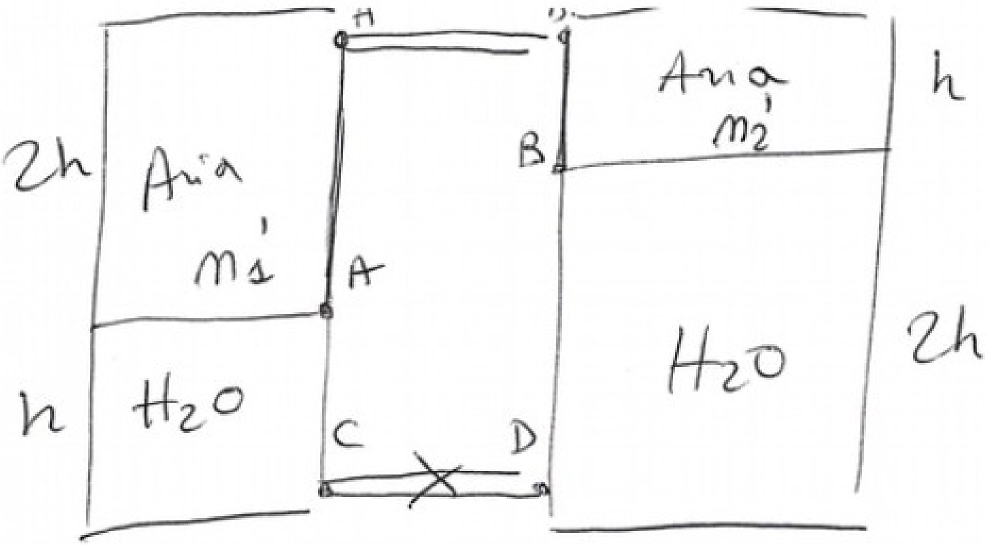
$$\Rightarrow \quad p_A - p_B = \frac{R T_0}{2hS} - \frac{n_2 R T_0}{2hS}$$

$$= \frac{R T_0}{2hS}\left(1 - n_2\right) = \rho g h$$

$$1 - n_2 = \frac{2hS}{R T_0}\rho g h$$

$$\boxed{n_2 = 1 - \frac{2h^2 S \rho g}{R T_0}}$$

Moli d'aria a destra.



All'equilibrio: $p_A = p_B$

$$\begin{cases} p_A V_A = m_1' R T_0 \\ p_B V_B = m_2' R T_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} p_A 2hS = m_1' R T_0 \\ p_B h2S = m_2' R T_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} p_A = \dfrac{m_1' R T_0}{2hS} \\ p_B = \dfrac{m_2' R T_0}{2hS} \end{cases} \qquad p_A = p_B$$

$$\hookrightarrow \frac{m_1' \cancel{R T_0}}{\cancel{2hS}} = \frac{m_2' \cancel{R T_0}}{\cancel{2hS}}$$

$$\boxed{m_1' = m_2'}$$

$$m_1 + m_2 = m_1' + m_2'$$

$$1 + 1 - \frac{2h^2 S \rho g}{R T_0} = 2 m_1'$$

$$2 - \frac{2h^2 S \rho g}{R T_0} = 2 m_1'$$

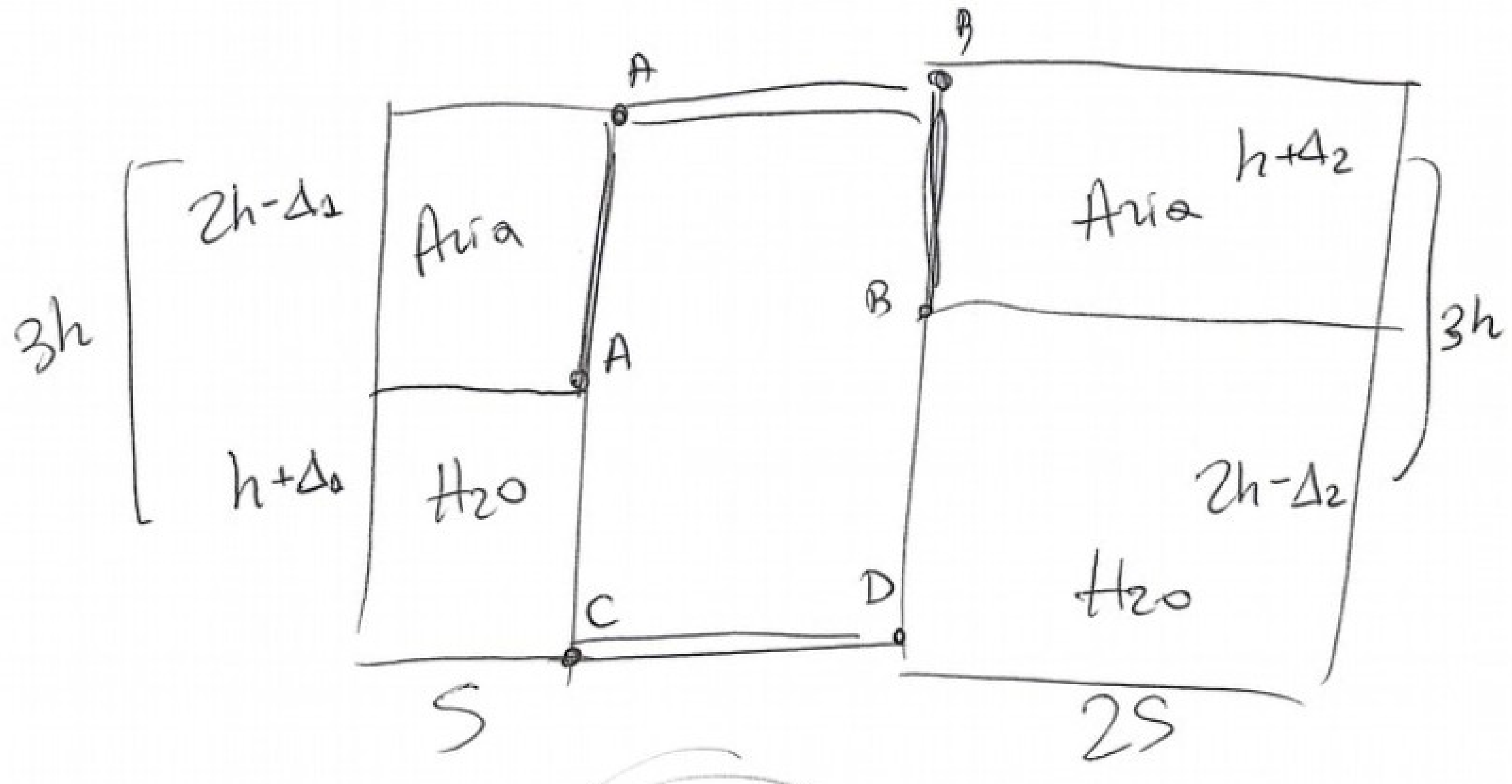
$$n_1' = n_2' = 1 - \frac{h^2 S \rho g}{R T_0}.$$

$$p_C = p_A + \rho g h$$

$$p_D = p_B + \rho g 2h = p_A + 2\rho g h$$

Concludo che $p_D > p_C$

Dunque, quando apro il rubinetto in basso, l'acqua da dx scorre verso sx.



All'equilibrio: $p_A = p_B$

$p_C = p_D$

$$p_C = p_A + \rho g (h + \Delta_1)$$

$$p_D = p_B + \rho g (2h - \Delta_2)$$

$$p_C = p_A + \rho g (2h - \Delta_2)$$

$$\Rightarrow \quad \cancel{\rho g} (h + \Delta_1) = \cancel{\rho g} (2h - \Delta_2)$$

$$h + \Delta_1 = 2h - \Delta_2$$

$$\boxed{\Delta_1 = h - \Delta_2}$$

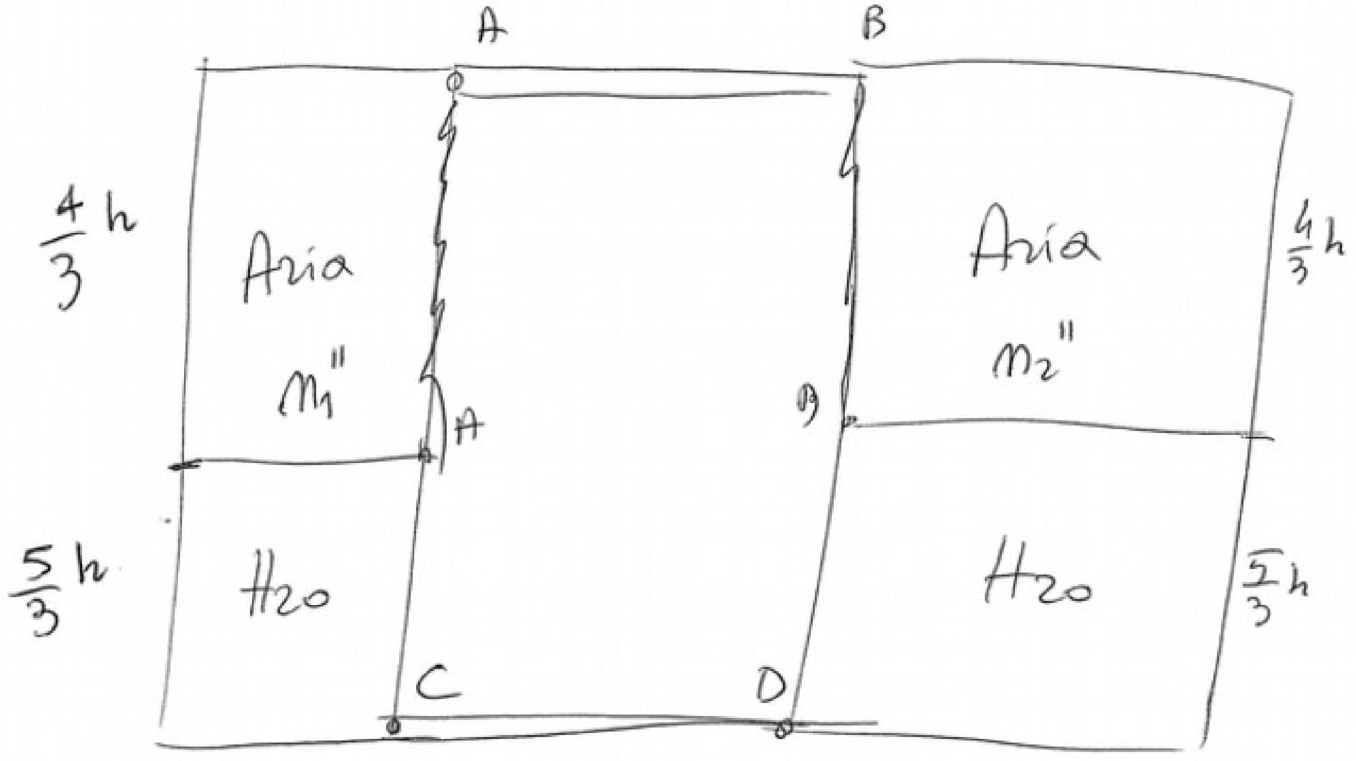
Quanto liquido si è spostato?

$$2 S \Delta_2 = S \Delta_1$$

$$\boxed{2\Delta_2 = \Delta_1}$$

$$\begin{cases} \Delta_1 = h - \Delta_2 \\ 2\Delta_2 = \Delta_1 \end{cases} \quad \begin{cases} 2\Delta_2 = h - \Delta_2 \\ 2\Delta_2 = \Delta_1 \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{cases} \Delta_2 = \dfrac{h}{3} \\ \Delta_1 = \dfrac{2}{3} h \end{cases}}$$



$$\begin{cases} p_A V_A = m_1'' R T_0 \\ p_B V_B = m_2'' R T_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} p_A = \dfrac{m_1'' R T_0}{V_A} \\ p_B = \dfrac{m_2'' R T_0}{V_B} \end{cases}$$

$$p_A = p_B$$

$$\frac{m_1'' \cancel{R T_0}}{V_A} = \frac{m_2'' \cancel{R T_0}}{V_B}$$

$$\frac{m_1''}{\cancel{\frac{4}{3} h S}} = \frac{m_2''}{\cancel{\frac{4}{3} h} 2S} \rightarrow \boxed{m_1'' = \frac{m_2''}{2}}$$

$$m_1 + m_2 = m_1'' + m_2''$$

$$1+1-\frac{2Sh^2\rho g}{RT_0}=\frac{m_2''}{2}+m_2''$$

$$2-\frac{2Sh^2\rho g}{RT_0}=\frac{3}{2}m_2''$$

$$m_2''=\frac{2}{3}\left(2-\frac{2Sh^2\rho g}{RT_0}\right)=\frac{4}{3}\left(1-\frac{--}{--}\right)$$

$$m_1''=\frac{1}{3}\left(2-\frac{2Sh^2\rho g}{RT_0}\right)=\frac{2}{3}\left(1-\frac{--}{--}\right)$$

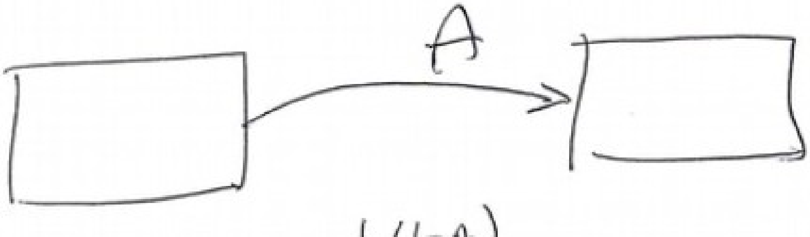
$$A=\frac{Sh^2\rho g}{RT_0}$$

$m_1=1$ $\qquad$ $m_2=1-2A$

$m_1'=1-A$ $\qquad$ $m_2'=1-A$

$m_1''=\frac{2}{3}(1-A)$ $\qquad$ $m_2''=\frac{4}{3}(1-A)$

$$m_1'-m_1=1-A-1=-A$$



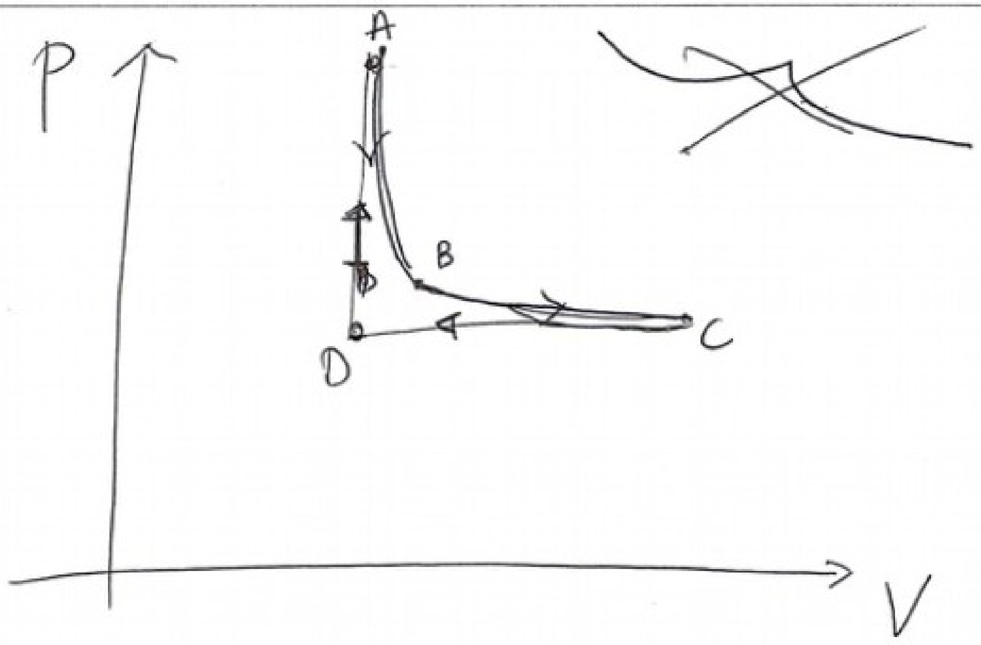
I fase

Esercizio 4

Si consideri del gas perfetto biatomico che compie un ciclo diretto quasi-statico costituito, nell'ordine, da un'espansione adiabatica AB, un'espansione isoterma BC, un'isobara CD e una isocora DA.

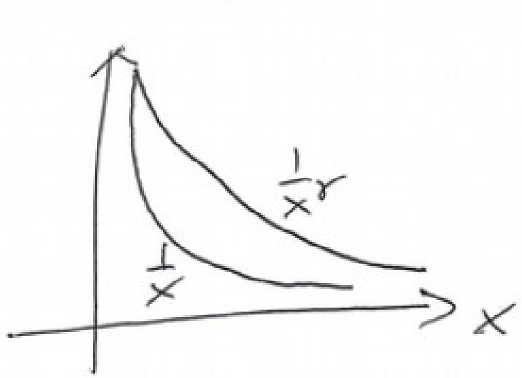
È noto lo stato A (p_A, V_A, T_A) e si sa che in ogni espansione il volume raddoppia. Si fornisca una rappresentazione accurata (in scala) del ciclo sul piano di Clapeyron.

Esprimendo i risultati solo in termini di p_A V_A T_A e della costante dei gas R, determinare il lavoro in un ciclo. Nell'ipotesi che la macchina scambi calore con due sole sorgenti, stabilire come devono essere scelte le temperature di queste ultime allo scopo di rendere minima la variazione d'entropia dell'universo in ogni ciclo (spiegare in dettaglio il procedimento con cui si determinano tali valori).



Isobara $\frac{1}{x}$

Adiabatica $\frac{1}{x^\gamma}$ $\gamma > 1$



	A	B	C	D
P	p_A	$2^{-\gamma} p_A$	$2^{-\gamma-1} p_A$	$2^{-\gamma-1} p_A$
V	V_A	$2V_A$	$4V_A$	V_A
T	T_A	$2^{-\gamma+1} T_A$	$2^{-\gamma+1} T_A$	$2^{-\gamma-1} T_A$

<u>AB</u> <u>Adiabatica</u>

$$p_A V_A^{\gamma} = p_B V_B^{\gamma}$$

$$p_A \cancel{V_A^{\gamma}} = p_B 2^{\gamma} \cancel{V_A^{\gamma}}$$

CD $\boxed{p_B = 2^{-\gamma} p_A}$

$$p_B V_B = nRT_B$$

$$2^{-\gamma} p_A 2V_A = nRT_B$$

<u>NOTA</u> $p_A V_A = nRT_A$

$$2^{-\gamma+1} \cancel{nR} T_A = \cancel{nR} T_B$$

$$\boxed{T_B = 2^{-\gamma+1} T_A}$$

$Q_{AB} = 0$

$$W_{AB} = \int_{V_A}^{V_B} p(V)\,dV$$

$p(V) = ?$

$$p_A V_A^{\gamma} = p V^{\gamma}$$

$$\boxed{p = p_A V_A^{\gamma} V^{-\gamma}}$$

$$W_{AB} = \int_{V_A}^{V_B} p_A V_A^{\gamma} V^{-\gamma}\,dV$$

$$= p_A V_A^{\gamma} \left(\frac{V^{1-\gamma}}{1-\gamma}\right)_{V_A}^{V_B} =$$

$$= \frac{p_A V_A^{\gamma}}{1-\gamma}\left(V_B^{1-\gamma} - V_A^{1-\gamma}\right)$$

$$= \frac{p_A V_A^{\gamma}}{1-\gamma}\left(2^{1-\gamma} V_A^{1-\gamma} - V_A^{1-\gamma}\right)$$

$$= \frac{p_A V_A^{\cancel{\gamma}}}{1-\gamma} V_A^{1\cancel{-\gamma}}\left(2^{1-\gamma} - 1\right)$$

$$= p_A V_A \frac{\left(2^{1-\gamma} - 1\right)}{1-\gamma}.$$

BC Isoterma

$$p_C V_C = nRT_C$$

$$p_C = \frac{nRT_C}{V_C} = \frac{nR\,2^{-\gamma+1}T_A}{4V_A} \quad = p_A$$

$$\boxed{\begin{aligned} p_C &= 2^{-\gamma+1-2}\cdot p_A \\ &= 2^{-\gamma-1}\cdot p_A \end{aligned}}$$

$$Q_{BC} = W_{BC} = nRT_B \ln\frac{V_C}{V_B}$$

$$= nR\,2^{-\gamma+1}T_A \ln\frac{4V_A}{2V_A}$$

$$= nR\,2^{-\gamma+1}T_A \ln 2$$

$$= p_A V_A\, 2^{-\gamma+1} \ln 2 .$$

CD Isobara

$$p_D V_D = nRT_D$$

$$T_D = \frac{p_D V_D}{nR} = 2^{-\gamma-1}\frac{p_A \cdot V_A}{nR}$$

T_A

$$\boxed{T_D = 2^{-\gamma-1}\,T_A}$$

$$Q_{CD} = nc_p\,(T_D - T_C) = -\frac{21}{4}\cdot 2^{-\gamma}\,p_A V_A.$$

$$W_{CD} = p_C\,(V_D - V_C) = -3\cdot 2^{-\gamma-1}\,p_A V_A.$$

DA Isocora

$$W_{DA} = 0$$

$$Q_{DA} = nc_V\,(T_A - T_D) = \frac{5}{2}\,p_A V_A\left(1 - 2^{-\gamma-1}\right).$$

Verificare che

$$\Delta U = \Sigma Q - \Sigma W = 0.$$