

Corso di recupero di Fisica 2018/2019

Dario Madeo



Lezione del 19/06/2019

Esercizio estratto dall'esame di Fisica 1 del 12 Giugno 2017

Esercizio 3

Si hanno tre moli di gas perfetto biatomico che è inizialmente allo stato (p_A, V_A) e subisce una lenta compressione durante la quale resta costante il prodotto TV^3 . In tale processo il volume dimezza. Segue un'espansione libera fino al volume iniziale. Calcolare:

Il calore scambiato nella compressione (usare la convenzione secondo cui $Q > 0$ se assorbito dal gas)

AB è una trasformazione lenta.

⇒ Tutti i punti di AB sono stati di equilibrio!

Per ogni punto della trasformazione, è valida la legge dei gas perfetti:

$$pV = nRT \quad \forall (p, V, T) \in AB \quad (1)$$

Il testo ci dice che TV^3 è costante in AB.

Cioè:

$$TV^3 \equiv \text{costante} \quad \forall (p, V, T) \in AB \quad (2)$$

Dalle (2), si ha che:

$$TV^3 = T_A V_A^3 \Rightarrow T = \frac{T_A V_A^3}{V^3} \quad (3)$$

Dalle (1) e dalle (3) si ha che:

$$pV = nR \frac{T_A V_A^3}{V^3} \Rightarrow \boxed{p = \frac{nR T_A V_A^3}{V^4}} \quad (4)$$

→ Espressione di p in funzione di V per tutti i punti di AB!

NOTA

Sono noti p_A e V_A , e $m=3$. Quindi:

$$p_A V_A = 3R T_A \Rightarrow T_A = \frac{p_A V_A}{3R}$$

$$\Rightarrow \left[p = \cancel{3R} \left(\frac{p_A V_A}{3R} \right) \frac{V_A^3}{V_i^4} = p_A \frac{V_A^4}{V_i^4} \right]$$

Nello stato B, si ha $V_B = \frac{V_A}{2}$ (dato del problema).

Quindi:

$$p_B = \frac{p_A V_A^4}{V_B^4} = \frac{p_A V_A^4 2^4}{V_A^4} = 16 p_A.$$

$$T_B = \frac{p_B V_B}{3R} = \frac{16 p_A \frac{V_A}{2}}{3R} = \frac{8}{3} \frac{p_A V_A}{R}.$$

Tabella di neperlog

	P	V	T
A	p_A	V_A	$\frac{p_A V_A}{3R}$
B	$16 p_A$	$\frac{V_A}{2}$	$\frac{8 p_A V_A}{3R}$

Calcoliamo Q_{AB} .

Sappiamo che:

$$\Delta U_{AB} = Q_{AB} - W_{AB} \Rightarrow Q_{AB} = \Delta U_{AB} + W_{AB}.$$

Per l'energia interna, uso la definizione:

$$\begin{aligned}\Delta U_{AB} &= n C_V (T_B - T_A) = 3 \cdot \frac{5}{2} R \left(\frac{8 \frac{p_A V_A}{3R}}{3R} - \frac{\frac{p_A V_A}{3R}}{3R} \right) = \\ &= \frac{15}{2} R \frac{7}{3} \frac{p_A V_A}{R} = \frac{35}{2} p_A V_A.\end{aligned}$$

Per il lavoro, uso la definizione:

$$\begin{aligned}W_{AB} &= \int_{V_A}^{V_B} p(V) dV = \int_{V_A}^{\frac{V_A}{2}} p_A V_A^2 V^{-4} dV = \\ &= p_A V_A^2 \left(\frac{V^{-3}}{-3} \right)_{V_A}^{\frac{V_A}{2}} = - \frac{p_A V_A^2}{3} \left(\left(\frac{V_A}{2} \right)^{-3} - V_A^{-3} \right) \\ &= - \frac{p_A V_A^2}{3} \left(\frac{1}{V_A^3} - \frac{8}{V_A^3} \right) = - \frac{7}{3} p_A V_A.\end{aligned}$$

Quindi:

$$\begin{aligned}Q_{AB} &= \frac{35}{2} p_A V_A - \frac{7}{3} p_A V_A = p_A V_A \left(\frac{35 \cdot 3 - 7 \cdot 2}{6} \right) = \\ &= p_A V_A \left(\frac{105 - 14}{6} \right) = \\ &= p_A V_A \frac{91}{6}.\end{aligned}$$

Esercizio estratto dall'esame di Fisica 1 dell'1 Aprile 2019

Esercizio 4

Una mole di gas perfetto monoatomico subisce una trasformazione ciclica ABCA. AB è un'espansione libera in cui il volume del gas triplica, BC è una lenta trasformazione a volume costante, CA è una trasformazione reversibile nella quale resta costante la quantità $V\sqrt{p}$, dove V indica il volume e p la pressione del gas. Supponendo noti i valori di p e V allo stato A, calcolare:

- la temperatura dello stato C;
- la variazione d'entropia del gas nelle trasformazioni AB e CA;
- la variazione d'entropia dell'universo in un intero ciclo della macchina.

p_A e V_A noti

$$V_B = 3V_A \text{ (dato del problema)}$$

$$V_C = V_B = 3V_A \text{ (dato del problema)}$$

AB: espansione libera (non reversibile)

BC: isocora lenta (lento = reversibile)

CA: trasformazione reversibile in cui $V\sqrt{p}$ è costante.

Tabella preliminare

	P	V	T
A	p_A	V_A	$\frac{p_A V_A}{R}$
B		$3V_A$	
C		$3V_A$	

Stato B. L'espansione libera si comporta come un'isoterma.

$$\Rightarrow T_B = T_A = \frac{p_A V_A}{R}$$

$$\Rightarrow p_B = \frac{RT_B}{V_B} = \frac{R \frac{p_A V_A}{R}}{3V_A} = \frac{p_A}{3}$$

Trasformazione CA

$$V \sqrt{p} \equiv \text{costante} \quad \forall (p, V, T) \in CA.$$

Quindi

$$V_C \sqrt{p_C} = V_A \sqrt{p_A} \Rightarrow V_C^2 p_C = V_A^2 p_A$$

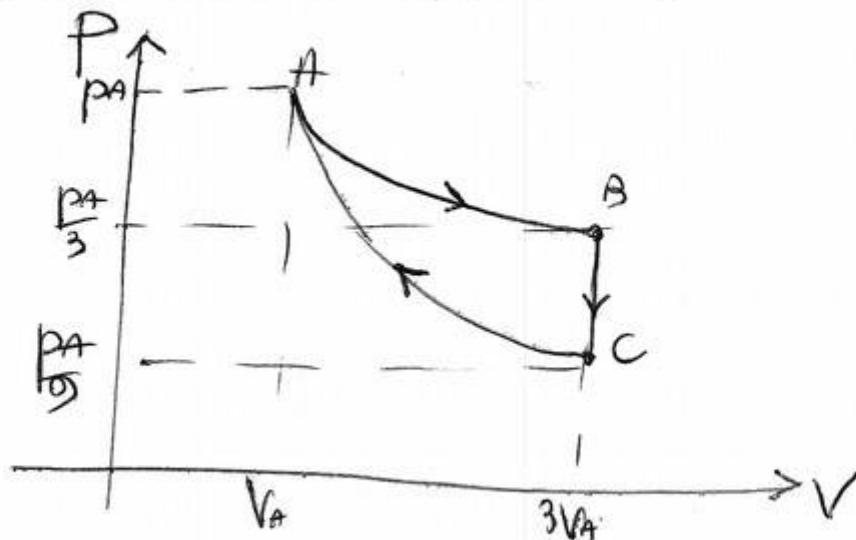
$$\Rightarrow (3V_A)^2 p_C = V_A^2 p_A \Rightarrow 9 V_A^2 p_C = V_A^2 p_A$$

$$\Rightarrow \boxed{p_C = \frac{p_A}{9}}$$

$$\Rightarrow T_C = \frac{p_C V_C}{R} = \frac{p_A}{9} \frac{3V_A}{R} = \frac{p_A V_A}{3R}.$$

Tabella finale

	P	V	T
A	p_A	V_A	$\frac{p_A V_A}{R}$
B	$\frac{p_A}{3}$	$3V_A$	$\frac{p_A V_A}{R}$
C	$\frac{p_A}{9}$	$3V_A$	$\frac{p_A V_A}{3R}$



Variatione di entropia.

$$\Delta S_{\text{SYS}} = \Delta S_{AB} + \Delta S_{BC} + \Delta S_{CA}.$$

Poiché il sistema è ciclico, allora:

$$\Delta S_{\text{SYS}} = 0.$$

Per cui:

$$\Delta S_{AB} + \Delta S_{BC} + \Delta S_{CA} = 0$$

ΔS_{AB} . AB è irreversibile. Usiamo un'isoterma reversibile che va da A a B.

$$\Delta S_{AB} = \int_A^B \frac{dQ}{T} = \frac{1}{T_A} Q_{AB} = \frac{1}{T_A} W_{AB} =$$

$$= \frac{1}{T_A} nRT_A \log\left(\frac{V_B}{V_A}\right) = \cancel{\frac{1}{T_A}} R \log\left(\frac{3V_A}{V_A}\right) =$$

$$= R \log 3.$$

ΔS_{BC} . Nell'isocora, si ha che $dU = dQ$.

Inoltre, $dU = nC_v dT$.

Quindi $dQ = nC_v dT$.

Da cui:

$$\Delta S_{BC} = \int_B^C \frac{dQ}{T} = \int_{T_B}^{T_C} nC_v \frac{dT}{T} = \frac{3R}{2} \log\left(\frac{T_C}{T_B}\right) =$$

$$= \frac{3R}{2} \log \frac{1}{3} = -\frac{3R}{2} \log 3.$$

A questo punto, so anche calcolare ΔS_{CA} :

$$\Delta S_{AB} + \Delta S_{BC} + \Delta S_{CA} = 0$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \Delta S_{CA} &= -\Delta S_{AB} - \Delta S_{BC} = \\ &= -R \log 3 + \frac{3}{2} R \log 3 = \\ &= \frac{1}{2} R \log 3.\end{aligned}$$

Entropia dell'universo e dell'ambiente

NOTA TEORICA

* Sia AB una trasformazione reversibile.

$$\Delta S_U = \Delta S_{AB} + \Delta S_{AMB} = 0$$

Da cui:

$$\Delta S_{AMB} = -\Delta S_{AB}.$$

* Sia AB una trasformazione irreversibile.

$$\Delta S_U = \Delta S_{AB} + \Delta S_{AMB} \geq 0$$

In questo caso (ma anche nel precedente!), come calcolo ΔS_{AMB} ?

L'ambiente $\bar{\epsilon}$ è un sistema a temperatura costante.

Sia T_0 la temperatura dell'ambiente e sia

Q il calore ~~ceduto~~ (~~< 0~~) / assorbito (> 0) dal gas.

Si ha che:

$$\boxed{\Delta S_{AMB} = -\frac{Q}{T_0}}$$

Torniamo all'esercizio

$$\Delta S_U = \Delta S_{SYS} + \Delta S_{AMB}$$

$$\Delta S_{SYS} = \Delta S_{AB} + \Delta S_{BC} + \Delta S_{CA}$$

$$\Delta S_{AMB} = \Delta S_{AB}^{AMB} + \Delta S_{BC}^{AMB} + \Delta S_{CA}^{AMB}$$

BC è reversibile. Quindi:

$$\Delta S_{BC}^{AMB} = -\Delta S_{BC}$$

CA è reversibile. Quindi:

$$\Delta S_{CA}^{AMB} = -\Delta S_{CA}$$

AB non è reversibile! Il calore ceduto/assorbito dal gas è $Q=0$ (AB è un'espansione libera).

Quindi:

$$\Delta S_{AB}^{AMB} = -\frac{Q}{T_0} = 0.$$

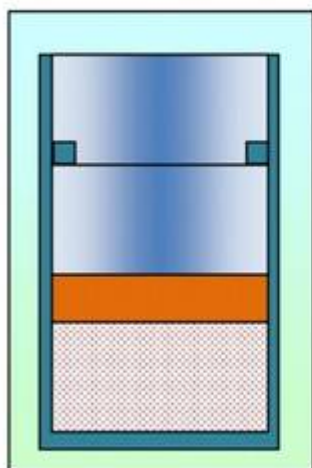
@windi

$$\Delta S_V = (\Delta S_{AB} + \Delta S_{BC} + \Delta S_{CA}) + (\Delta S_{AB}^{AMB} + \Delta S_{BC}^{AMB} + \Delta S_{CA}^{AMB})$$

$$= \Delta S_{AB} + \cancel{\Delta S_{BC}} + \cancel{\Delta S_{CA}} + \Delta S_{AB}^{AMB} - \cancel{\Delta S_{BC}} - \cancel{\Delta S_{CA}}$$

$$= \Delta S_{AB} + \Delta S_{AB}^{AMB} =$$

$$= R \log 3 + 0 = R \log 3 > 0.$$



Esercizio 4

Un cilindro superiormente aperto contiene una mole gas monoatomico che inizialmente (stato A) occupa il volume V_A . Il gas è confinato da un pistone sopra il quale c'è un volume $2V_A$ di mercurio, la pressione atmosferica che agisce sulla superficie superiore del mercurio è trascurabile. Viene fornito calore al gas fin quando il suo volume è raddoppiato (stato B), poi due piccole sporgenze impediscono al pistone di salire ulteriormente, e viene somministrato altrettanto calore, fino allo stato C. Determinare la temperatura dello stato C e la variazione complessiva dell'entropia del gas.

Assumiamo che durante la trasformazione AB ci sia sempre equilibrio meccanico. Questo vuol dire che ad ogni istante, la pressione esercitata sul pistone del mercurio sia pari a quella esercitata dal gas.

Sia V il volume del gas in un certo istante. Il volume di mercurio rimasto in cima è

$$3V_A - V.$$

Si noti che $V - V_A$ è la parte di mercurio fuoriuscita.

Si ha che:

$$P_{Hg} = \frac{\rho \cdot g \cdot (3V_A - V)}{\Sigma} = P_{GAS}.$$

massa
del
mercurio

Quindi:

$$P(V) = \frac{\rho \cdot g}{\Sigma} (3V_A - V) \quad \forall (P, V, T) \in AB$$

ρ = densità mercurio, Σ sezione del cilindro.

Tabella preliminare

	ϕ	V	T
A	$\frac{2gP V_A}{\Sigma}$	V_A	$\frac{2gP V_A^2}{\Sigma R}$
B	$\frac{gP V_A}{\Sigma}$	$2V_A$	$\frac{2gP V_A^2}{\Sigma R}$
C		$2V_A$	

Calcoliamo i valori non noti.

$$P_A = P(V_A) = \frac{2gP V_A}{\Sigma}$$

$$T_A = \frac{2gP V_A^2}{\Sigma R} \quad (\text{legge dei gas perfetti})$$

$$P_B = P(V_B) = \frac{gP V_A}{\Sigma}$$

$$T_B = \frac{2gP V_A^2}{\Sigma R} \quad (\text{legge dei gas perfetti})$$

NOTA $T_A = T_B$! Uhm slop...

Quanto calore è stato fornito al gas in AB?

Poiché $T_A = T_B$, l'energia interna non è cambiata.

$$\Delta U_{AB} = Q_{AB} - L_{AB} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{Q_{AB} = L_{AB}}$$

Noto il legame tra p e V in AB, possiamo calcolare L_{AB} usando la definizione:

$$\begin{aligned} L_{AB} &= \int_{V_A}^{V_B} p(V) dV = \int_{V_A}^{2V_A} \frac{gP}{\Sigma} (3V_A - V) dV = \\ &= \frac{gP}{\Sigma} \left[\int_{V_A}^{2V_A} 3V_A dV - \int_{V_A}^{2V_A} V dV \right] = \\ &= \frac{gP}{\Sigma} \left[3V_A (2V_A - V_A) - \left(\frac{(2V_A)^2 - V_A^2}{2} \right) \right] = \\ &= \frac{gP}{\Sigma} \left[3V_A^2 - \frac{4V_A^2 - V_A^2}{2} \right] = \\ &= \frac{gP}{\Sigma} \left[3V_A^2 - \frac{3}{2} V_A^2 \right] = \frac{3}{2} \frac{gP}{\Sigma} V_A^2 = Q_{AB}. \end{aligned}$$

Nell'isocora BC viene fornito calore

$$Q_{BC} = Q_{AB} = \frac{3}{2} \frac{gP}{\Sigma} V_A^2.$$

In un'isocora si sa che:

$$Q_{BC} = m c_V (T_C - T_B) = \frac{3}{2} R (T_C - T_B)$$

Da cui:

$$\begin{aligned} T_C &= \frac{2}{3R} Q_{BC} + T_B = \frac{gP V_A^2}{\Sigma R} + \frac{2gP V_A^2}{\Sigma R} = \\ &= \frac{3gP V_A^2}{\Sigma R}. \end{aligned}$$

Posso calcolare anche p_c .

$$p_c = \frac{nRT_c}{V_c} = \frac{R \cdot \frac{3g\rho V_A^2}{\Sigma R}}{2V_A} =$$

$$= \frac{3}{2} \frac{g\rho V_A}{\Sigma}$$

Tabella finale

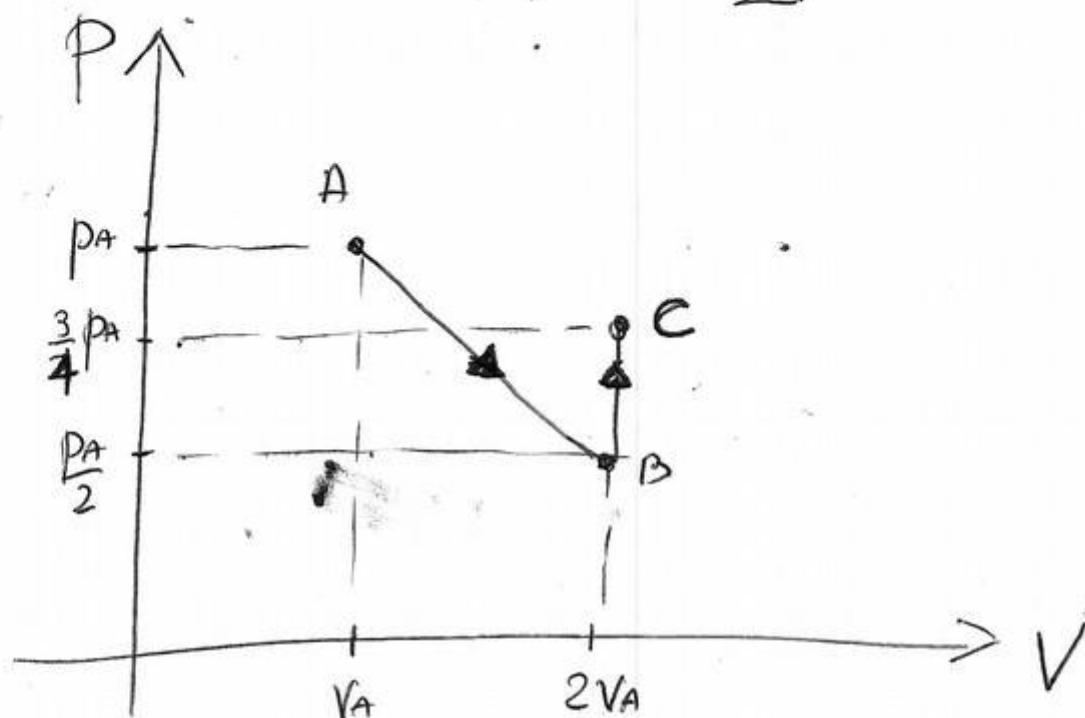
	P	V	T
A	$\frac{2g\rho V_A}{\Sigma}$	V_A	$\frac{2g\rho V_A^2}{\Sigma R}$
B	$\frac{g\rho V_A}{\Sigma}$	$2V_A$	$\frac{2g\rho V_A^2}{\Sigma R}$
C	$\frac{3}{2} \frac{g\rho V_A}{\Sigma}$	$2V_A$	$\frac{3g\rho V_A^2}{\Sigma R}$

Se $p_A = \frac{2g\rho V_A}{\Sigma}$, allora:

$$p_B = \frac{p_A}{2}, \quad p_C = \frac{3}{4} p_A.$$

Diagramma p-V

$$p_A = \frac{2g\rho V_A}{\Sigma}$$



Entropia.

• AB

Perché $T_A = T_B$, posso usare un'isoterma che collega A e B.

$$\Delta S_{AB} = \frac{1}{T_A} \int_A^B dQ =$$

$$\# = \frac{1}{T_A} \int_A^B dL = \frac{1}{T_A} \int_{V_A}^{V_B} \frac{mRT_A}{V} dV = \quad dQ = dL \text{ in un'isoterma}$$

$$= mR \int_{V_A}^{2V_A} \frac{dV}{V} = R \log 2.$$

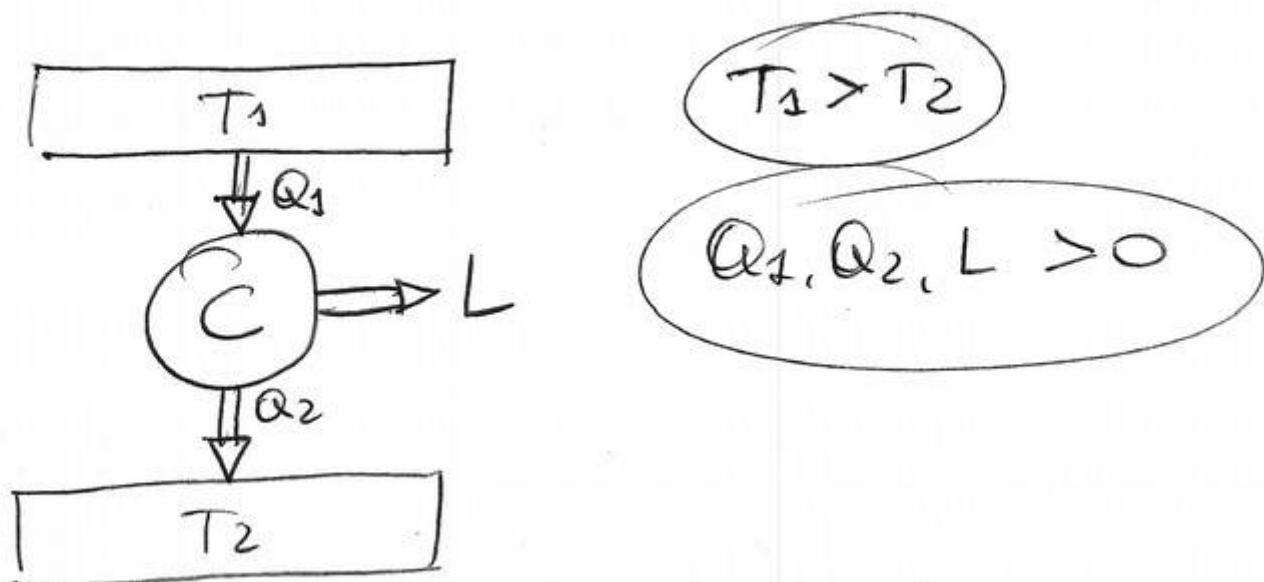
$$\overset{BC}{\Delta S_{BC}} = \int_B^C \frac{dQ}{T} = \int_{T_B}^{T_C} \frac{mc_v dT}{T} =$$

$$= \frac{3}{2} R \log \frac{T_C}{T_B} = \frac{3}{2} R \log \frac{3}{2} \cdot$$

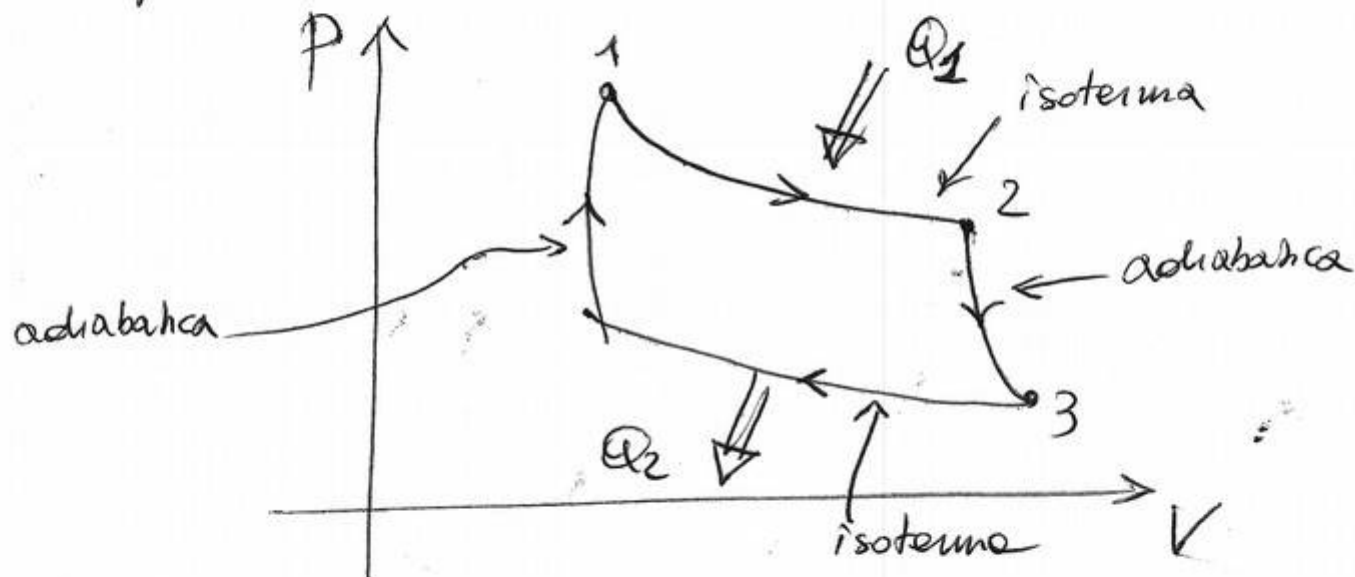
$$\Delta S_{GAS} = \Delta S_{AB} + \Delta S_{BC}$$

$$= R \log 2 + \frac{3}{2} R \log \frac{3}{2} \cdot$$

Alcune note sulla macchina di Carnot



- La macchina di Carnot preleva calore da una sorgente "calda" (termostato T_1), cede calore ad una sorgente "fredda" (termostato T_2) e compie lavoro L .
- La macchina compie un ciclo composto da 4 trasformazioni reversibili:



- $\Delta U_{\text{ciclo}} = Q_{\text{ciclo}} - L_{\text{ciclo}} = 0$
 $\uparrow$
 è un ciclo

$$\Rightarrow Q_{\text{ciclo}} = L_{\text{ciclo}} \Rightarrow$$

$$\boxed{Q_1 - Q_2 = L}$$

- Si ha che: $\boxed{\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{T_1}{T_2}}$

- Si definisce "efficienza" delle macchine la seguente quantità:

$$\boxed{\eta = \frac{L_{\text{COMPIUTO}}}{Q_{\text{ASSORBITO}}}}$$

Per le macchine di Carnot:

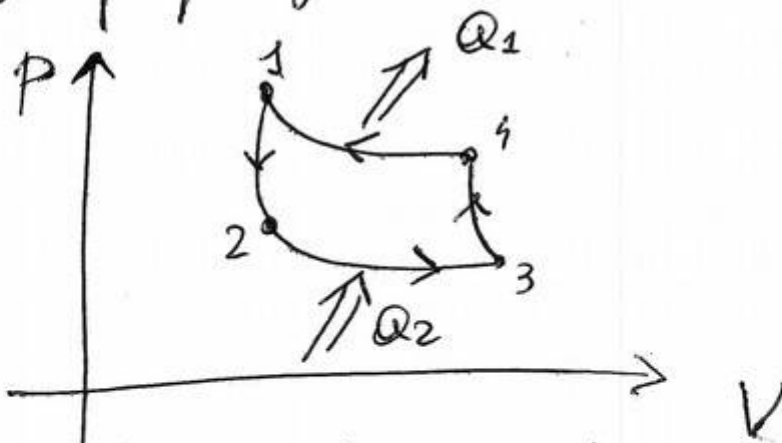
$$\boxed{\begin{aligned} \eta &= \frac{L}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \\ &= 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1} \end{aligned}}$$

Nota. La definizione di efficienza è valida per qualunque tipo di macchina termica.

- Qualunque altra macchina termica che lavora tra i 2 termostati T_1 e T_2 ha sempre un'efficienza inferiore a quella delle macchine di Carnot.

$$|\eta_M \leq \eta_{\text{CARNOT}}|$$

- Se si inverte il ciclo, si ha una macchina frigorifera.



In questo caso, la macchina cede calore alla sorgente calda e preleva calore da quella fredda. Il lavoro compiuto è invece negativo (subito)

$$\Delta U_{\text{ciclo}} = Q_{\text{ciclo}} - L_{\text{ciclo}} = 0$$

$$\Rightarrow Q_{\text{ciclo}} = L_{\text{ciclo}}$$

$$|Q_2 - Q_1 = -L|$$

$$\text{Si ha che: } \left| \frac{Q_2}{Q_1} = \frac{T_2}{T_1} \right|$$

Alcune note sui termostati

Sistemi che mantengono invariata la loro temperatura. L'ambiente è un esempio di termostato.

Poiché la temperatura di questi sistemi non varia, si può assumere che si comportino "come" se subiscano trasformazioni isoterme.

$$\Delta S_{\text{TERMOSTATO}} = \frac{Q}{T}$$

dove:

Q : è il calore assorbito ($Q > 0$) / ceduto ($Q < 0$)
dal termostato

T : è la sua temperatura.

Nella macchina di Carnot:

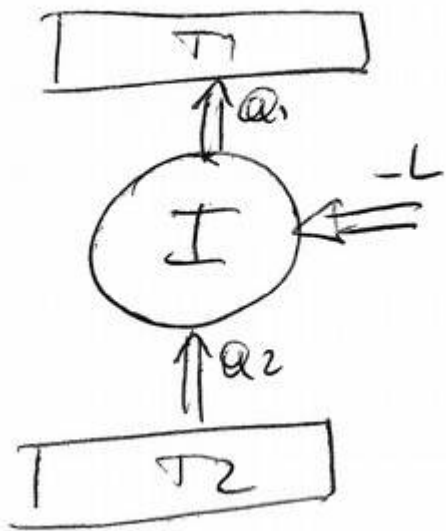
$$\Delta S_{T1} = -\frac{Q_1}{T_1}, \quad \Delta S_{T2} = \frac{Q_2}{T_2}$$

$$\Delta S_U = \Delta S_{\text{SYS}} + (\Delta S_{T1} + \Delta S_{T2}) \rightarrow \text{Ambiente}$$

$$= \underset{\substack{\uparrow \\ \text{è un ciclo}}}{0} - \frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = -\frac{Q_2 T_1}{T_2 T_2} + \frac{Q_2}{T_2} = 0 \quad \uparrow$$

La macchina di Carnot è reversibile

Nel caso di macchina Carnot inversa:



$$\Delta S_{T1} = \frac{Q_1}{T_1}, \quad \Delta S_{T2} = -\frac{Q_2}{T_2}$$

$$\Delta S_D = \Delta S_{sys} + (\Delta S_{T1} + \Delta S_{T2}) \quad \leftarrow \text{ambiente}$$

$$= \underset{\substack{\uparrow \\ \text{è un ciclo}}}{0} + \frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_2}{T_2} = + \frac{Q_2}{T_1} \frac{T_1}{T_2} - \frac{Q_2}{T_2} = 0$$

La macchina
è reversibile!

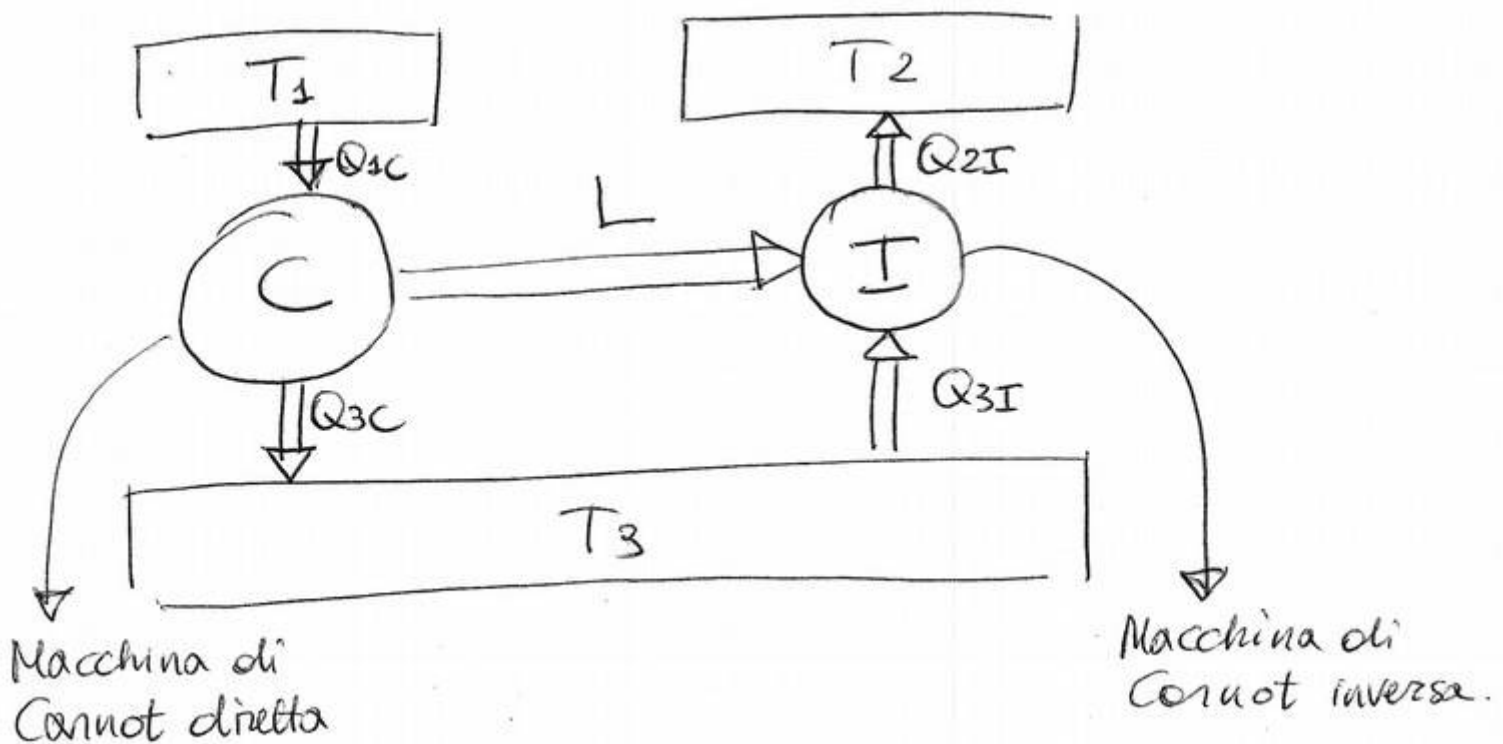
Esercizio estratto dall'esame di Fisica 1 del 18 Novembre 2015

Esercizio 4

Si hanno tre sorgenti di calore S_1 , S_2 e S_3 rispettivamente a temperatura $T_1=300^\circ\text{C}$, $T_2=200^\circ\text{C}$ e $T_3=0^\circ\text{C}$. Si hanno inoltre due macchine di Carnot: la prima funziona in ciclo diretto fra S_1 ed S_3 , mentre la seconda funziona in ciclo inverso, azionata dalla prima, ed è utilizzata per pompare calore da S_3 a S_2 .

- Per ciascuna caloria assorbita da S_1 , quante ne vengono cedute a S_2 ?
- Se il calore scambiato in un ciclo con S_1 è pari a 12 kJ, di quanto cambia l'entropia di ciascuna sorgente in un ciclo?

Schematizzazione delle due macchine



$$Q_{1C}, Q_{3C}, Q_{2I}, Q_{3I} > 0, \quad L > 0$$

Domanda (a). Per ciascuna caloria assorbita da T_1 , quante ne vengono cedute a T_2 ?

Per rispondere, dobbiamo calcolare Q_{1C} e Q_{2I} . In particolare, ci interessa il loro rapporto.

Usiamo le equazioni che caratterizzano le macchine di Carnot per trovare il valore delle varie incognite.

$$\begin{array}{ll}
 1) \frac{Q_{1C}}{Q_{3C}} = \frac{T_1}{T_3} & \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} \text{Macchina C} \\
 2) Q_{1C} - Q_{3C} = L & \\
 3) \frac{Q_{2I}}{Q_{3I}} = \frac{T_2}{T_3} & \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} \text{Macchina I} \\
 4) Q_{3I} - Q_{2I} = -L &
 \end{array}$$

$$1) \Rightarrow Q_{3C} = \frac{T_3}{T_1} Q_{1C} ; \quad 3) \Rightarrow Q_{3I} = \frac{T_3}{T_2} Q_{2I}$$

$$2) + 4) \Rightarrow Q_{1C} - Q_{3C} = -Q_{3I} + Q_{2I} \Leftrightarrow$$

$$Q_{1C} - \frac{T_3}{T_1} Q_{1C} = -\frac{T_3}{T_2} Q_{2I} + Q_{2I} \Rightarrow$$

$$Q_{1C} \left(1 - \frac{T_3}{T_1} \right) = Q_{2I} \left(1 - \frac{T_3}{T_2} \right)$$

$$Q_{1C} \left(\frac{T_1 - T_3}{T_1} \right) = Q_{2I} \left(\frac{T_2 - T_3}{T_2} \right)$$

$$\frac{Q_{1C}}{Q_{2I}} = \frac{T_1 (T_2 - T_3)}{T_2 (T_1 - T_3)} \Rightarrow \frac{Q_{2I}}{Q_{1C}} = \frac{T_2 (T_1 - T_3)}{T_1 (T_2 - T_3)}$$

$\Rightarrow$ # di calorie ~~assorbite~~ ^{cedute} a T_2 per ogni caloria assorbita da T_1 .

• Domanda (b). Calcolare la variazione di entropia dei vari termostati noto che $Q_{1C} = Q$.

Per trovare la variazione di entropia dei vari termostati dobbiamo trovare il valore di tutti i calori scambiati.

Dai calcoli precedenti, sappiamo che:

$$\bullet \frac{Q_{2I}}{Q_{1C}} = \frac{T_2}{T_1} \frac{(T_1 - T_3)}{(T_2 - T_3)} \Rightarrow Q_{2I} = \frac{T_2}{T_1} \frac{(T_1 - T_3)}{(T_2 - T_3)} Q$$

$$\bullet Q_{3C} = \frac{T_3}{T_1} Q_{1C} \Rightarrow Q_{3C} = \frac{T_3}{T_1} Q$$

$$\bullet Q_{3I} = \frac{T_3}{T_2} Q_{2I} \Rightarrow Q_{3I} = \frac{T_3}{T_1} \left(\frac{T_1 - T_3}{T_2 - T_3} \right) Q$$

$$\Delta S_{T_1} = - \frac{Q_{1C}}{T_1} = - \frac{Q}{T_1} \quad \left[-Q_{1C} \text{ è il calore assorbito da } T_1 \right]$$

$$\Delta S_{T_2} = + \frac{Q_{2I}}{T_2} = \frac{1}{T_1} \frac{T_1 - T_3}{T_2 - T_3} Q \quad \left[+Q_{2I} \text{ è il calore assorbito da } T_2 \right]$$

$$\Delta S_{T_3} = \frac{+Q_{3C} - Q_{3I}}{T_3} = \quad \left[+Q_{3C} - Q_{3I} \text{ è il calore assorbito da } T_3 \right]$$

$$= \frac{Q}{T_1} - \frac{1}{T_1} \frac{T_1 - T_3}{T_2 - T_3} Q$$

Cosa possiamo dire sull'entropia dell'universo?

$$\Delta S_U = \Delta S_C + \Delta S_I + \Delta S_{T_1} + \Delta S_{T_2} + \Delta S_{T_3}$$

$$= \underset{\substack{\uparrow \\ \text{cicli}}}{0} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{cicli}}}{0} = \frac{Q}{T_1} + \frac{1}{T_1} \frac{T_1 - T_3}{T_2 - T_3} Q + \frac{Q}{T_1} - \frac{1}{T_1} \frac{T_1 - T_3}{T_2 - T_3} Q$$

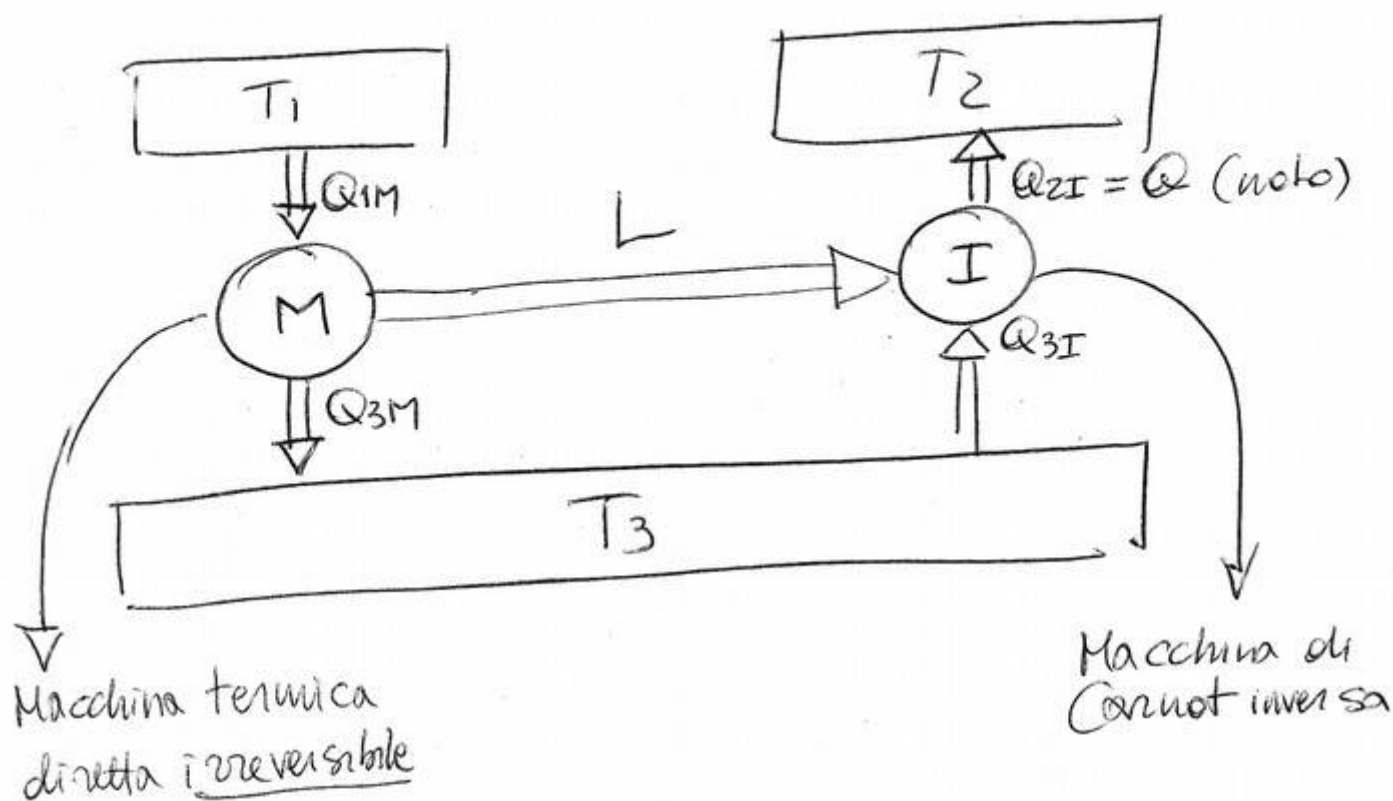
$= 0$. Risultato atteso! Difatti le due macchine sono reversibili!

Esercizio estratto dall'esame di Fisica 1 del 20 Settembre 2018

Esercizio 4

Si hanno tre termostati ①, ② e ③, rispettivamente alle temperature assolute T_1 e T_2 e T_3 con $T_1=3T_2=6T_3$. Un motore termico $\mathcal{M}$ basato su un ciclo irreversibile aziona un ciclo di Carnot inverso $\mathcal{C}$ (a ogni ciclo di $\mathcal{M}$ si ha un ciclo di $\mathcal{C}$). $\mathcal{M}$ funziona fra ① e ③ mentre il ciclo inverso funziona fra ② e ③. Si conosce il calore che viene scambiato con ② dalla macchina di Carnot, e si sa che il motore ha un rendimento pari a due terzi di quello che avrebbe avuto se fosse stato basato su un ciclo reversibile. Per ciascun ciclo, quanto calore viene ceduto da $\mathcal{M}$ a ③, quanto variano le entropie dei tre termostati?

Schematizzazione delle due macchine



- $Q_{1M}, Q_{3M}, Q_{2I}, Q_{3I} > 0, L > 0$
- $Q_{2I} = Q$ noto
- Efficienza macchina M : $\frac{2}{3} \eta_c$, dove η_c è il rendimento della macchina di Carnot (reversibile).

Per rispondere alle 2 domande, è necessario calcolare Q_{1M} , Q_{3M} e Q_{3I} .

Usiamo le equazioni che caratterizzano le macchine in esame:

$$\left. \begin{aligned} \eta_M &= \frac{2}{3} \eta_C = \frac{2}{3} \left(1 - \frac{T_3}{T_1} \right) \\ \eta_M &= \frac{L}{Q_{1M}} \\ Q_{1M} - Q_{3M} &= L \\ Q_{3I} - Q_{2I} &= -L \\ \frac{Q_{3I}}{Q_{2I}} &= \frac{T_3}{T_2} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Macchina M} \\ \\ \\ \text{Macchina I} \end{array}$$

Da cui:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{2}{3} \left(1 - \frac{T_3}{T_1} \right) &= \frac{L}{Q_{1M}} \\ Q_{1M} - Q_{3M} &= L \\ Q_{3I} - Q_{2I} &= -L \\ \frac{Q_{3I}}{Q_{2I}} &= \frac{T_3}{T_2} \end{aligned} \right.$$

Ricordando che $Q_{2I} = Q$,
 $T_1 = 6T_3$ e
 $T_2 = 2T_3$, si ha che:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{2}{3} \left(1 - \frac{T_3}{6T_3} \right) &= \frac{L}{Q_{1M}} \\ Q_{1M} - Q_{3M} &= L \\ Q_{3I} - Q &= -L \\ \frac{Q_{3I}}{Q} &= \frac{T_3}{2T_3} \end{aligned} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} \frac{2}{3} \left(1 - \frac{1}{6} \right) &= \frac{L}{Q_{1M}} \\ Q_{1M} - Q_{3M} &= L \\ Q_{3I} - Q &= -L \\ \underline{\underline{Q_{3I}}} &= \underline{\underline{\frac{Q}{2}}} \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{6} = \frac{L}{Q_{1M}} \\ Q_{3M} = Q_{1M} - L \\ +\frac{Q}{2} - Q = -L \\ Q_{3I} = \frac{Q}{2} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} Q_{1M} = \frac{Q}{2} \cdot \frac{3 \cdot 6^3}{2 \cdot 5} = Q \frac{9}{10} \\ Q_{3M} = \frac{9}{10} Q - \frac{Q}{2} = \frac{2}{5} Q \\ L = \frac{Q}{2} \\ Q_{3I} = \frac{Q}{2} \end{array} \right.$$

Risposta 1 Calore ceduto al termostato T_3 da M:

$$Q_{3M} = \frac{2}{5} Q$$

Risposta 2

$$\Delta S_{T1} = -\frac{Q_{1M}}{T_1} = -Q \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{6 T_1} = -\frac{3}{20} \frac{Q}{T_1}$$

$$\Delta S_{T2} = \frac{Q}{T_2} = \frac{Q}{2 T_1}$$

$$\Delta S_{T3} = \frac{Q_{3M} - Q_{3I}}{T_3} = \frac{\frac{2}{5} Q - \frac{1}{2} Q}{T_3} = -\frac{1}{10} \frac{Q}{T_3}$$

Variazione entropia universo

$$\Delta S_u = \Delta S_M + \Delta S_I + \Delta S_{T1} + \Delta S_{T2} + \Delta S_{T3} =$$

$$= \underset{\substack{\uparrow \\ \text{cicli}}}{0} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{cicli}}}{0} - \frac{3}{20} \frac{Q}{T_1} + \frac{10}{20} \frac{Q}{T_1} - \frac{2}{20} \frac{Q}{T_3} = +\frac{5}{20} \frac{Q}{T_3} > 0.$$

L'entropia dell'universo è aumentata poichè sono presenti trasformazioni **irreversibili**!