

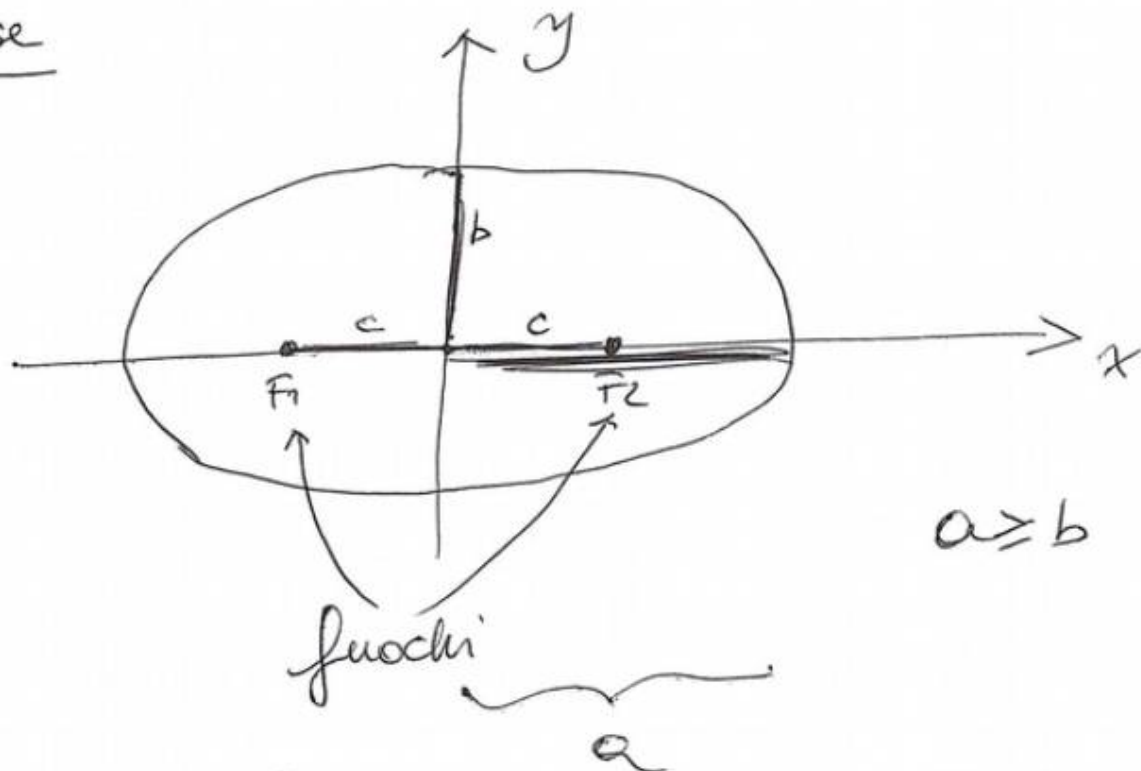
Corso di recupero di Fisica 2018/2019

Dario Madeo



Lezione del 14/06/2019

Ellisse



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

a: semiasse maggiore

b: " minore

c: distanza centro - fuoco.

e: $\frac{c}{a}$ eccentricità

$$e \in [0, 1)$$

Se $e = 0$, si parla di circonferenza.

Equazione polare

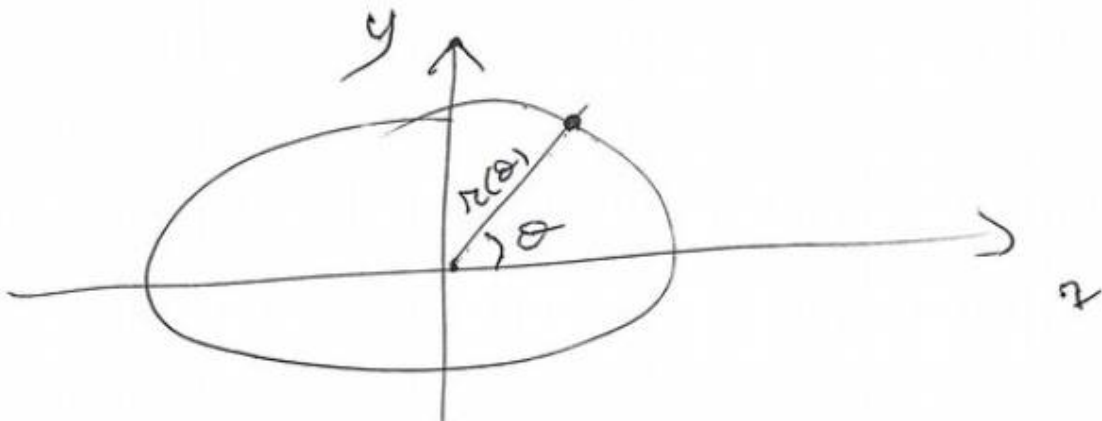
$$\begin{cases} x = r(\theta) \cos \theta \\ y = r(\theta) \sin \theta \end{cases} \parallel \begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

Circonfrenza

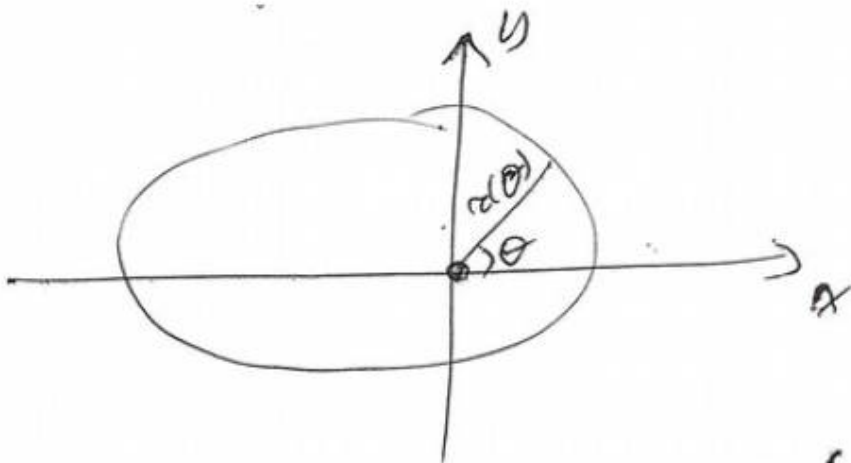
E' possibile scrivere l'equazione polare in 3 modi diversi.

1) Si supponga che l'origine degli assi coincida con il centro dell'ellisse. Si ha che:

$$r(\theta) = \frac{ab}{\sqrt{(b \cos \theta)^2 + (a \sin \theta)^2}}$$



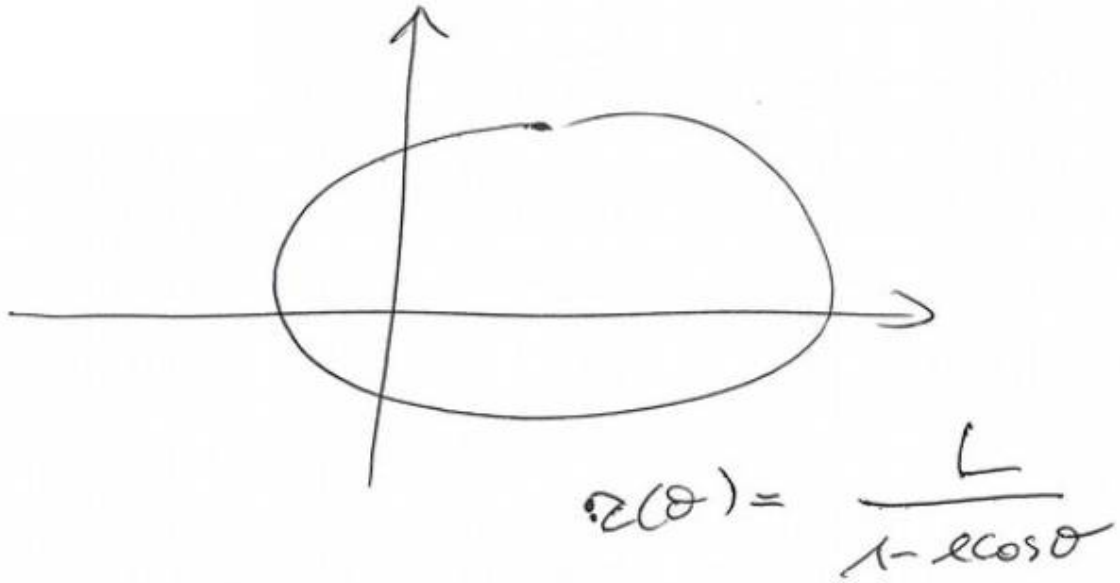
2) Si supponga che l'origine degli assi coincida con il fuoco a destra. Si ha che:



$$r(\theta) = \frac{L}{1 + e \cos \theta}$$

$$L = \frac{b^2}{a} = \frac{a^2 - c^2}{a} \\ = a(1 - e^2)$$

3) Si supponga che l'origine degli assi coincida con il fuoco a sinistra.
Si ha che:



NOTA

Se $e = 0$

$$r(\theta) = \frac{L}{1 \pm 0 \cdot \cos \theta} = L$$

Circonferenza ha
raggio costante

Corpo celeste di massa m in orbita intorno ad un altro corpo di massa $M \gg m$.

- Si assume che il corpo M sia fermo.
- Il corpo m compie una traiettoria ellittica. Su un fuoco di tale ellisse giace il corpo di massa M
(I legge di Keplero)

NOTA La traiettoria può anche essere circolare.
In tal caso, M sta nel centro.
~~Fatti~~,

- Sul sistema agiscono solo forze conservative (la gravità). Pertanto, si conserva l'energia meccanica del sistema:

$$E = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{GMm}{R} \equiv \text{costante}$$

NOTA v ed r dipendono da θ !

- La traiettoria è chiusa (ellittica o circolare) se $E < 0$.

Per $E = 0$ si ha una traiettoria parabolica.
Per $E > 0$ si ha una traiettoria iperbolica.]

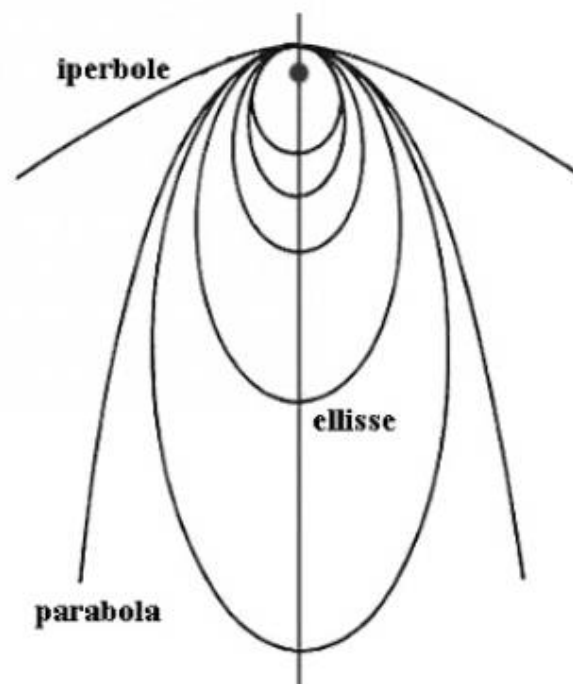
→ Il corpo m "fugge" da M .

NOTA Il caso $E=0$ è una situazione "limite".
 Infatti, si separa le dinamiche chiusa da
 quelle divergenti.
 ↳ iperboliche. ↳ ellittiche
 ↳ circolari

La velocità che deve possedere il
 corpo affinché $E=0$, si chiama
 "velocità di fuga"

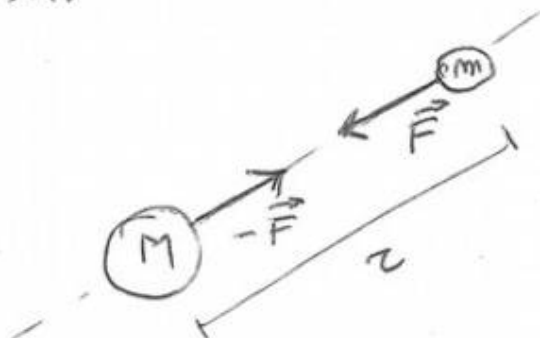
$$E=0 \Rightarrow \frac{1}{2} m v_f^2 - \frac{GMm}{r} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{v_f = \sqrt{\frac{2GM}{r}}}$$

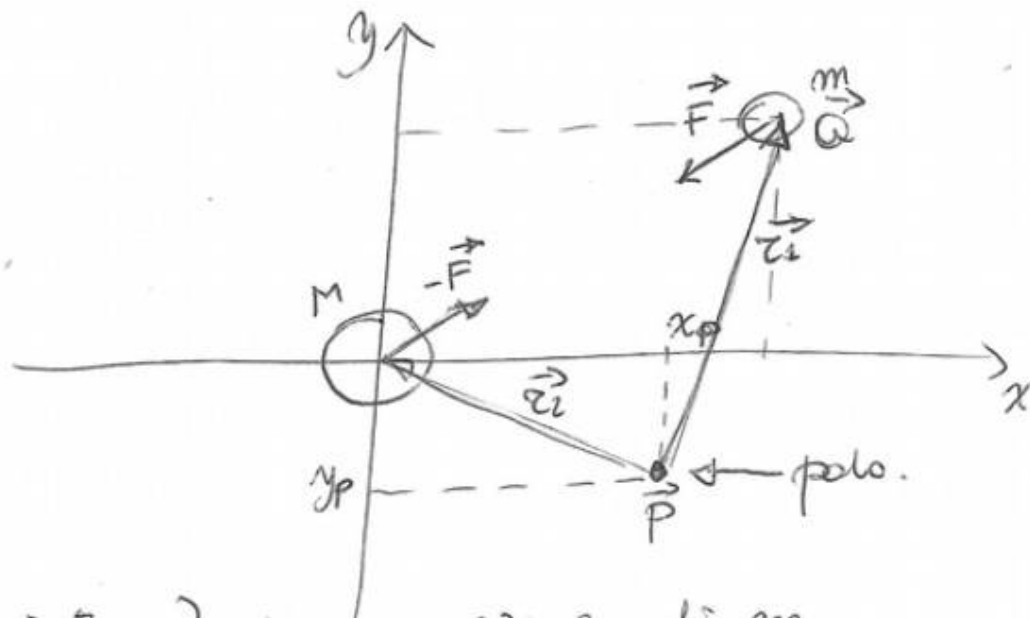


- Sul sistema agisce una coppia di forze
 di azione-reazione (le gravità).

La forza che agisce su m punta verso M , e
 viceversa.



$$|\vec{F}| = \frac{GMm}{r^2}$$



• Sia $\vec{Q} = \begin{bmatrix} x_m \\ y_m \end{bmatrix}$ la posizione di m .

• Sia $\vec{P} = \begin{bmatrix} x_p \\ y_p \end{bmatrix}$ la posizione di un generico punto

che assumiamo essere il centro delle rotazione (polo).

• Sia $\vec{r}_1$ il raggio vettore per m .

• Sia $\vec{r}_2$ il raggio vettore per M .

Si ha che:

$$\bullet \vec{r}_1 = \vec{Q} - \vec{P}$$

$$\bullet \vec{r}_2 = -\vec{P}$$

$$\bullet \vec{F} = -|\vec{F}| \cdot \frac{\vec{Q}}{|\vec{Q}|}$$

Calcoliamo i momenti torcenti provocati da queste forze.

$$\vec{L}_1 = \vec{r}_1 \times \vec{F} \quad , \quad \vec{L}_2 = \vec{r}_2 \times (-\vec{F})$$

Il momento totale $\vec{L}$:

$$\begin{aligned}\vec{L}_1 + \vec{L}_2 &= \vec{r}_1 \times \vec{F} + \vec{r}_2 \times (-\vec{F}) = \\ &= (\vec{r}_1 \times \vec{F} - \vec{r}_2 \times \vec{F}) = \\ &= (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F} = \\ &= (\vec{Q} - \vec{P} - (-\vec{P})) \times \left(-\frac{|\vec{F}|}{|\vec{Q}|} \vec{Q} \right) \\ &= -\frac{|\vec{F}|}{|\vec{Q}|} \vec{Q} \times \vec{Q} = \vec{0}.\end{aligned}$$

Con Qualunque sia il polo, il momento totale $\vec{L}$ è nullo! Si ha che il momento angolare si conserva!

Se scegliamo la massa M come polo, si ha che:

$$\vec{L} = m \vec{r} \times \vec{v} \equiv \text{costante.}$$

NOTA $\vec{r}$ e $\vec{v}$ dipendono da θ .

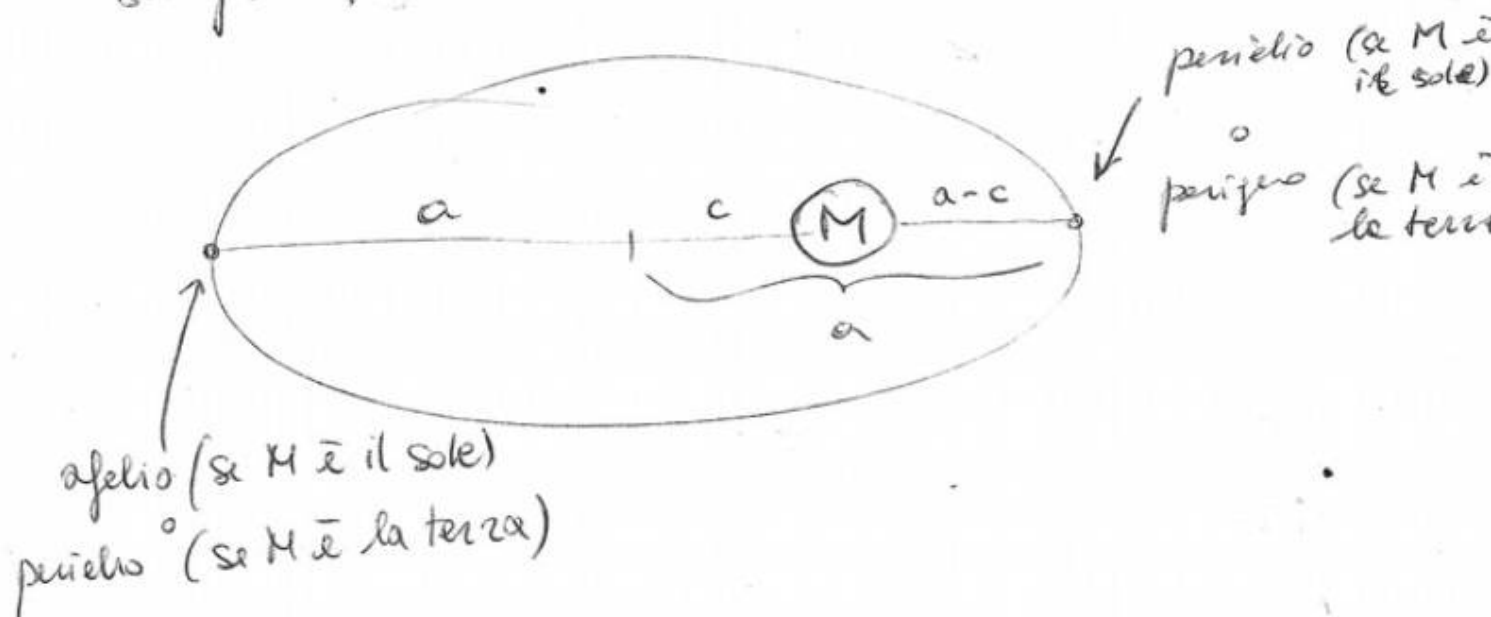
Se la traiettoria è una circonferenza, si ha che il momento lungo z è:

$$L = m r v_t \equiv \text{costante}$$

Stavolta, v_t ed r non dipendono da θ . Infatti, nel moto circolare uniforme, sia r che v_t sono costanti.

Se la traiettoria è un'ellisse, le cose sono più complicate.

Tuttavia, in 2 punti notevoli della traiettoria, il calcolo del momento angolare è più semplice!



Si ha che:

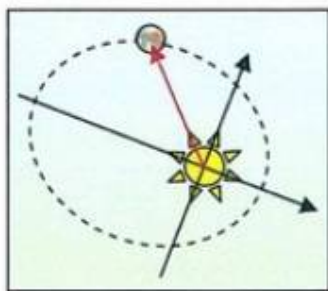
$$L_A = m v_t^A (c+a)$$

$$L_P = m v_t^P (a-c)$$

Poiché L è costante, allora:

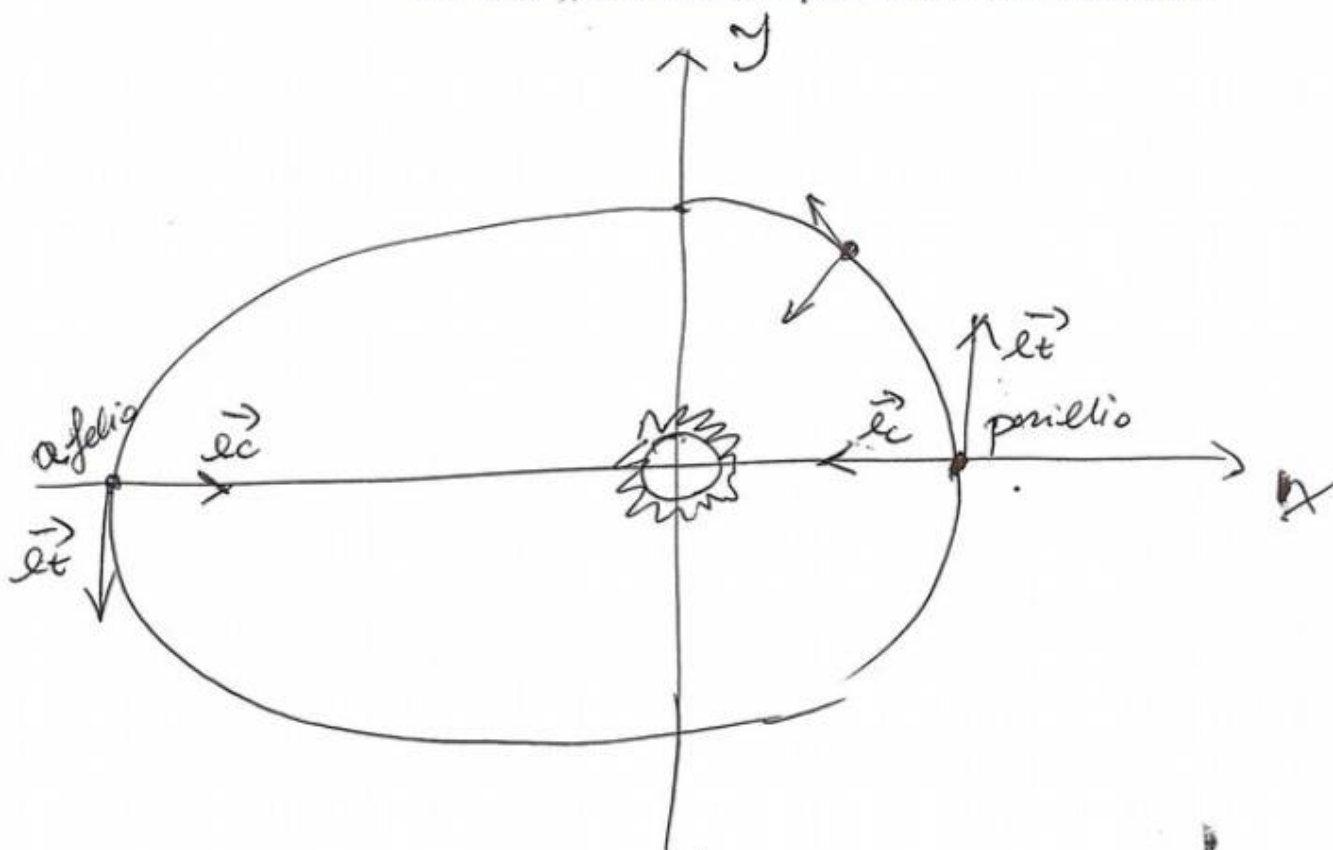
$$\boxed{L_A = L_P}$$

Esercizio estratto dall'esame di Fisica 1 dell'8 Febbraio 2019



Esercizio 2

In coordinate polari (r, θ) , l'equazione di un'ellisse ha la forma $r(\theta) = \frac{L}{1 + e \cos \theta}$, dove L è un parametro positivo (da determinare) e il parametro e , che prende il nome di eccentricità, appartiene all'intervallo $(0, 1)$. Un pianeta orbita intorno al sole, viaggiando a distanza $r(\theta)$ dal sole stesso, e transita al perielio con una data velocità v_0 . Supponendo note l'eccentricità e e la quantità GM (M indica la massa del sole e G la costante di gravitazione universale), determinare il parametro L della sua orbita.



Afelio : punto di max distanza
Perielio : " " min

Cose note: G, M, v_0 (vel. perielio), e

Cose incognite: m, L

Applico la conservazione di E e di L
nell'afelio e nel perielio.

$$\frac{1}{2} m v_p^2 - \frac{GMm}{r_p} = \frac{1}{2} m v_A^2 - \frac{GMm}{r_A}$$

$$m r_p v_p = m r_A v_A$$

$$v_p = v_0$$

$$\frac{1}{2} v_0^2 - \frac{GM}{r_p} = \frac{1}{2} v_A^2 - \frac{GM}{r_A}$$

$$r_p v_0 = r_A v_A$$

$$r_p = r(\theta=0) = \frac{L}{1+e \cos 0} = \frac{L}{1+e}$$

$$r_A = r(\theta=\pi) = \frac{L}{1+e \cos \pi} = \frac{L}{1-e}$$

NOTA

$$r_p = \frac{L}{1+e} = \frac{a(1-e^2)}{1+e} = a(1-e) = a\left(1 - \frac{e}{a}\right) = a - c$$

$$r_A = \frac{L}{1-e} = \frac{a(1-e^2)}{1-e} = a(1+e) = a\left(1 + \frac{e}{a}\right) = a + c$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{1}{2} V_0^2 - \frac{GM}{L}(1+e) &= \frac{1}{2} V_A^2 - \frac{GM}{L}(1-e) \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{L}{1+e} V_0 &= \frac{L}{1-e} V_A \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} V_0^2 - V_A^2 &= \frac{2GM}{L} [(1+e) - (1-e)] \\ V_A &= \frac{1-e}{1+e} V_0 \end{aligned} \right.$$

$$\Rightarrow V_0^2 \left(1 - \left(\frac{1-e}{1+e} \right)^2 \right) = \frac{4GM_e}{L}$$

$$V_0^2 \left(\frac{(1+e)^2 - (1-e)^2}{(1+e)^2} \right) = \frac{4GM_e}{L}$$

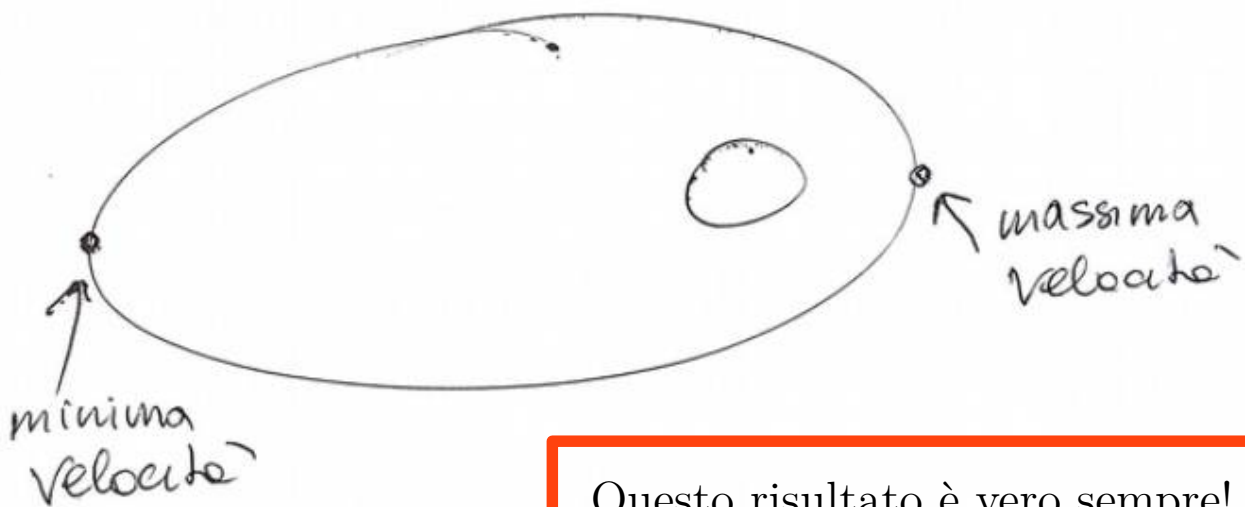
$$V_0^2 = \frac{4GM_e}{L} \frac{(1+e)^2}{1+e^2+2e-1-e^2+2e} = \frac{4GM_e(1+e)^2}{L \cancel{4e}}$$

$$\boxed{L = \frac{GM(1+e)^2}{V_0^2}}$$

$$V_A = \frac{1-e}{1+e} V_P$$

$$e \in [0; 1) \Rightarrow \frac{1-e}{1+e} < 1$$

V_A è più lento di V_P .



Questo risultato è vero sempre!

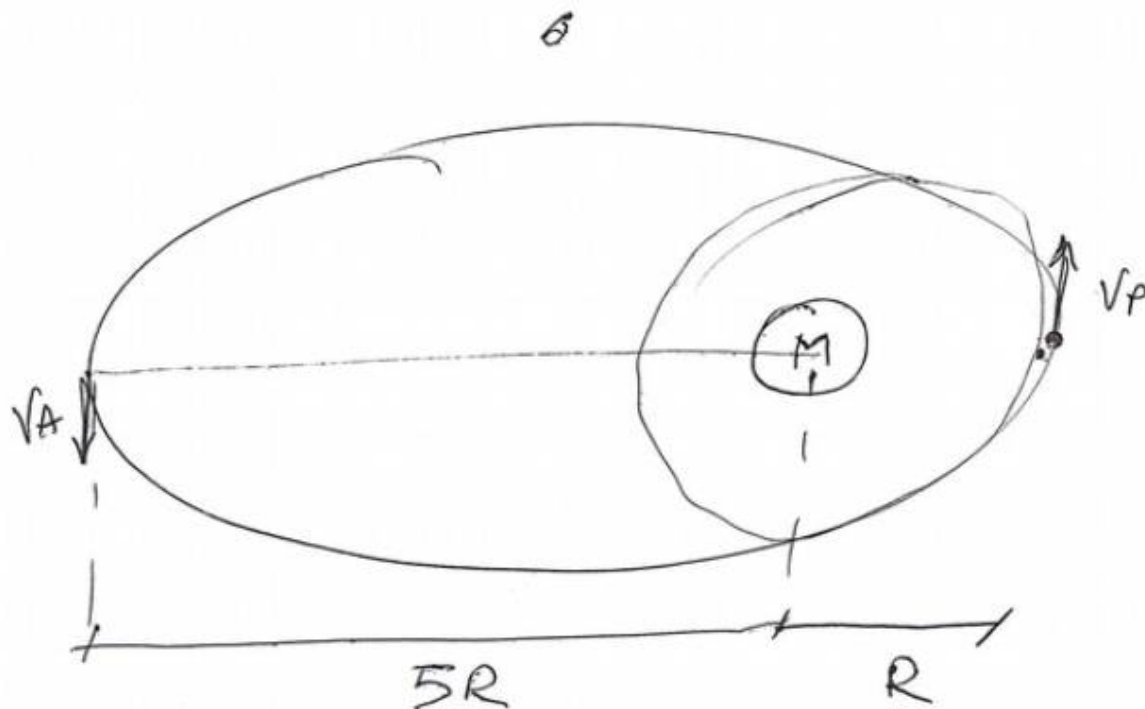
$$L = \frac{GM}{V_0^2} (1+e)^2 \quad \text{per } e=0$$

$$L = \frac{GM}{V_0^2} \quad \text{Caso di una circonferenza.}$$

Esercizio estratto dall'esame di Fisica 1 del 18 Luglio 2018

Esercizio 2

Un pianeta di raggio R è privo di atmosfera. Desiderando registrare immagini dettagliate della sua superficie, si mette un satellite ad orbitare intorno al pianeta stesso, in maniera che esso passi vicinissimo alla superficie. È nota l'accelerazione gravitazionale g sulla superficie e si sa che il punto dell'orbita a massima distanza è a $5R$ dal centro del pianeta. Cosa si conserva nel moto del satellite? Qual è la velocità massima del satellite?



Conservazione momento angolare

$$v_A 5R = v_P R$$

$$v_P = 5v_A$$

Conservazione energia meccanica

$$\frac{1}{2} m v_P^2 - \frac{GMm}{R} = \frac{1}{2} m v_A^2 - \frac{GMm}{5R}$$

$$\frac{1}{2} (5v_A)^2 - \frac{GM}{R} = \frac{1}{2} v_A^2 - \frac{GM}{5R}$$

$$\frac{1}{2} (25V_A^2 - V_A^2) = \frac{GM}{R} \left(1 - \frac{1}{5}\right)$$

$$12V_A^2 = \frac{GM}{R} \frac{4}{5}$$

$\vec{E}$ noto g

$$g = \frac{GM}{R^2}$$

$$12V_A^2 = gR \frac{4}{5}$$

$$V_A^2 = gR \frac{4}{12 \cdot 5} \frac{1}{5}$$

$$V_A = \sqrt{\frac{gR}{15}}$$

$$V_P = 5 \sqrt{\frac{gR}{15}}$$

Esercizio estratto dall'esame di Fisica 1 del 18 Aprile 2008

Esercizio 1

Si consideri un satellite di massa $3m$ che ruota intorno ad un pianeta di massa M (con $M \gg 3m$) su un'orbita circolare di raggio r . Ad un certo istante il satellite esplode in due parti, una di massa $2m$ e una di massa m . Appena dopo l'esplosione, la parte di massa $2m$ rimane immobile, per poi, conseguentemente, precipitare sul pianeta. Dopo (a) aver chiarito quali quantità restano costanti prima, durante e dopo

l'esplosione,

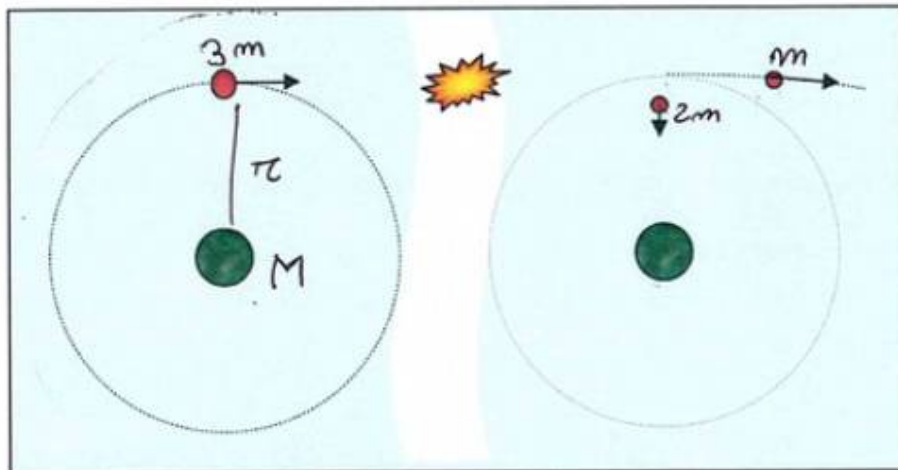
b) in funzione di r si calcoli la velocità iniziale v_0 del satellite e quella della parte di massa m subito dopo l'esplosione;

c) in funzione di m e r , si calcoli l'energia meccanica totale iniziale E_{tot} del satellite e l'energia sviluppata nell'esplosione;

d) supponendo che, con l'esplosione, la parte di massa

m acquisti l'energia minima necessaria ad allontanarsi indefinitamente dal pianeta, si calcoli r .

[N.B.: Si supponga trascurabile l'effetto di ogni altro corpo celeste. Si assumano note m ed M nonché la costante di gravitazione universale.]



	prima*	durante*	dopo*
E	sì	No	sì
p	sì	sì	sì
L	sì	sì	sì

Esercizio

Provare a dimostrare che la quantità di moto si conserva usando il diagramma delle forze nelle tre fasi.

* Prima, durante e dopo l'esplosione!

Prima dell'esplosione...



$$\vec{F} = \frac{GM 3m}{r^2} \vec{e}_c$$

(M)

$$= 3m r \dot{\theta}^2 \underline{\underline{\vec{e}_c}}$$

$$\frac{GM 3m}{r^2} = 3m r \dot{\theta}^2$$

$$|\vec{v}| = r \dot{\theta} \quad \dot{\theta} = \frac{|\vec{v}|}{r}$$

$$\frac{GM \cancel{3m}}{\cancel{r^2}} = \cancel{3m} r \frac{|\vec{v}|^2}{r^2}$$

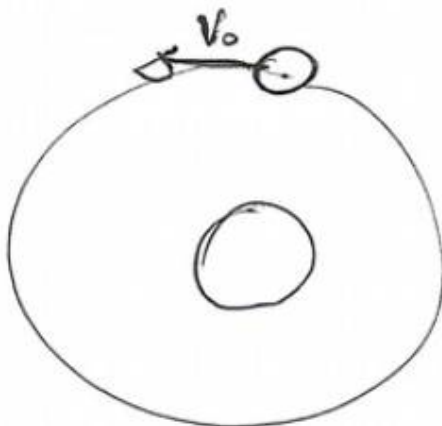
$$|\vec{v}| = \sqrt{\frac{GM}{r}} = v_0$$

Abbiamo usato
le formule
del moto circolare
uniforme!!!

Velocità del corpo prima dell'esplosione

Si conserva la quantità di moto
nell'esplosione.

Si conserva anche l'angolo α .



$$3m v_0 = m v_1 + 2m v_2$$

Dal testo, $v_2 = 0$

$$\Rightarrow 3mv_0 = mv_1$$

$$\boxed{v_1 = 3v_0}$$

$$\boxed{v_1 = 3\sqrt{\frac{GM}{r}}}$$

Velocità (tangenziale)
del corpo di massa m
dopo l'esplosione

Punto c

$$E_{\text{PRIMA}} = \frac{1}{2} 3m v_0^2 - \frac{GM 3m}{r}$$

$$= \frac{3}{2} m \frac{GM}{r} - \frac{GM 3m}{r}$$

$$= -\frac{3}{2} \frac{GMm}{r} < 0$$

$$E_{\text{URTO}} = E_{\text{PRIMA}} - E_{\text{ESPO}} \quad \leftarrow \text{Energia dissipata nell'esplosione}$$

$$= -\frac{3}{2} \frac{GMm}{r} - \left(\frac{1}{2} m v_1^2 - \frac{GMm}{r} \right)$$

$$= -\frac{3}{2} \frac{GMm}{r} - \left(\frac{1}{2} m 9 \frac{GM}{r} - \frac{GMm}{r} \right)$$

$$= \frac{GMm}{r} \left(-\frac{3}{2} - \frac{9}{2} + \frac{2}{2} \right) = -5 \frac{GMm}{r}$$

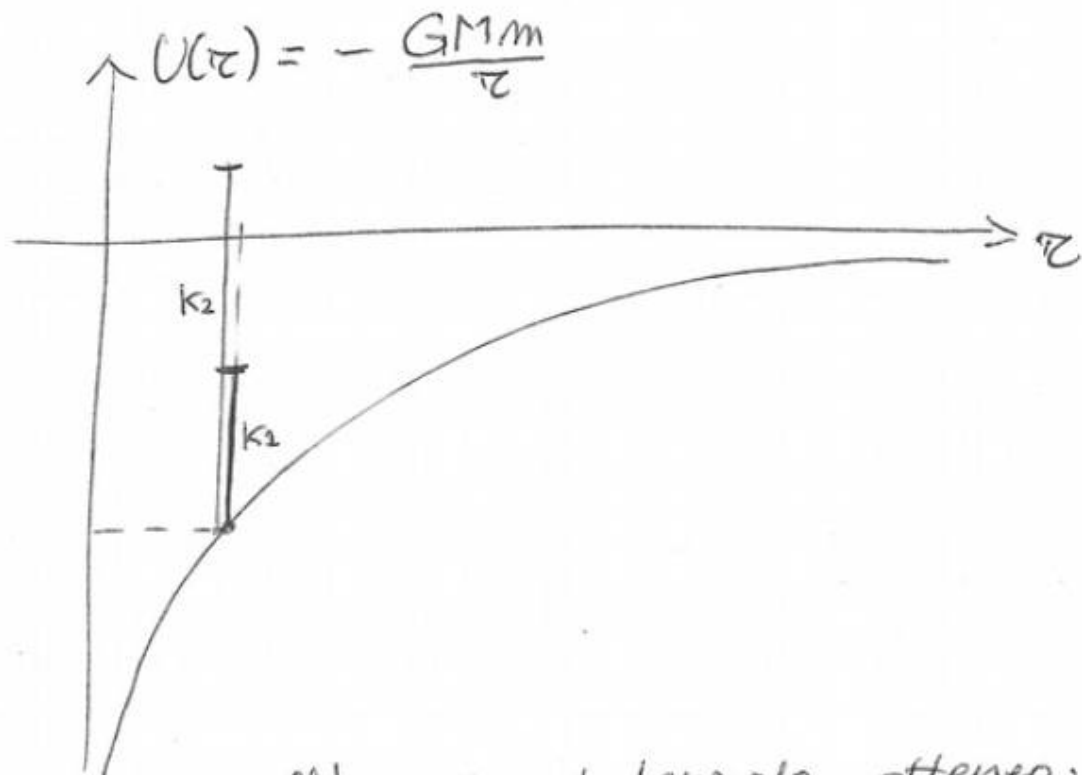
$$d) \quad E = \frac{1}{2} m v_1^2 - \frac{GMm}{r} = 0$$

$$\frac{1}{2} m v_1^2 = \frac{GMm}{r}$$

$$r = \frac{2GM}{v_1^2}$$

Da notare che v_1 è la velocità di fuga.

NOTA



- Se aggiungo K_1 all'energia potenziale, ottengo:

$$E = U + K_1 < 0$$

$\Rightarrow K_1$ mi fa rimanere su un'orbita ellittica / circolare.

- Se aggiungo K_2 all'energia potenziale, ottengo:

$$E = U + K_2 > 0$$

$\Rightarrow K_2$ mi fa "fuggire" via. L'orbita diventa iperbolica.

K_2 mi fa superare la barriera di potenziale.

NOTA TEORICA

Se $M \sim m$, allora non possiamo più assumere che M sia fermo!

In questo caso:

- ↳ L'energia meccanica si conserva.
- ↳ Il momento angolare si conserva.

↓
Sempre
validi

Per questi esercizi, si assume che il polo
(= centro di rotazione) sia il COM
del sistema.

Esercizio estratto dall'esame di Fisica 1 del 15 Aprile 2005

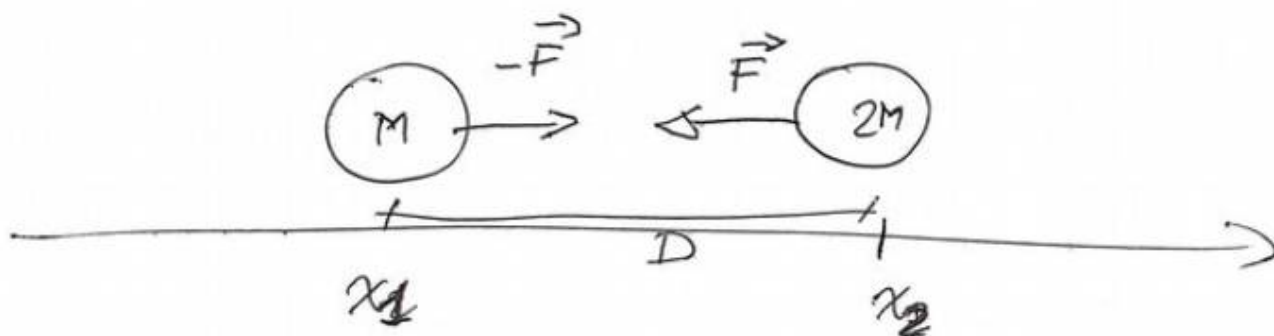
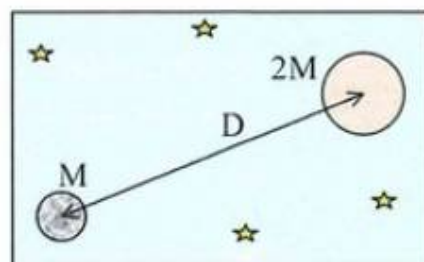
Esercizio 2

Due corpi celesti di massa M e $2M$ ruotano l'uno intorno all'altro mantenendosi ad una certa distanza D , costante.

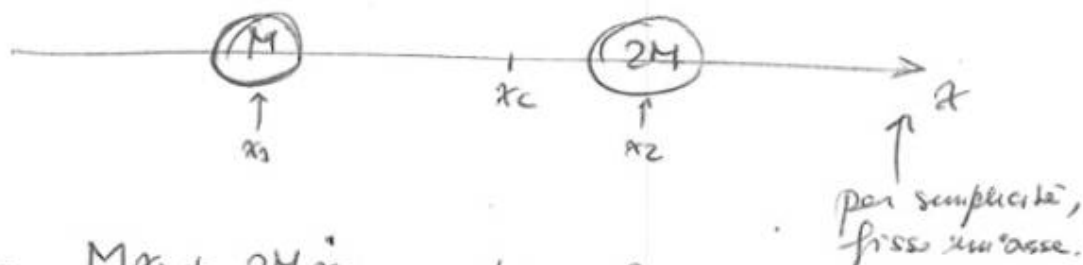
Determinare l'espressione del periodo T di rivoluzione del sistema.

Calcolare T nell'ipotesi che sia $M = 1.00 \times 10^{26} \text{ kg}$ e $D = 1.00 \times 10^{12} \text{ m}$.

[Si ricorda che la costante di gravitazione universale è $G = 6.67 \times 10^{-11}$ in unità MKS]



Calcoliamo il COM del sistema



$$x_c = \frac{Mx_1 + 2Mx_2}{M+2M} = \frac{1}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2.$$

Da cui:

$$\ddot{x}_c = \frac{1}{3}\ddot{x}_1 + \frac{2}{3}\ddot{x}_2$$

Sappiamo che:

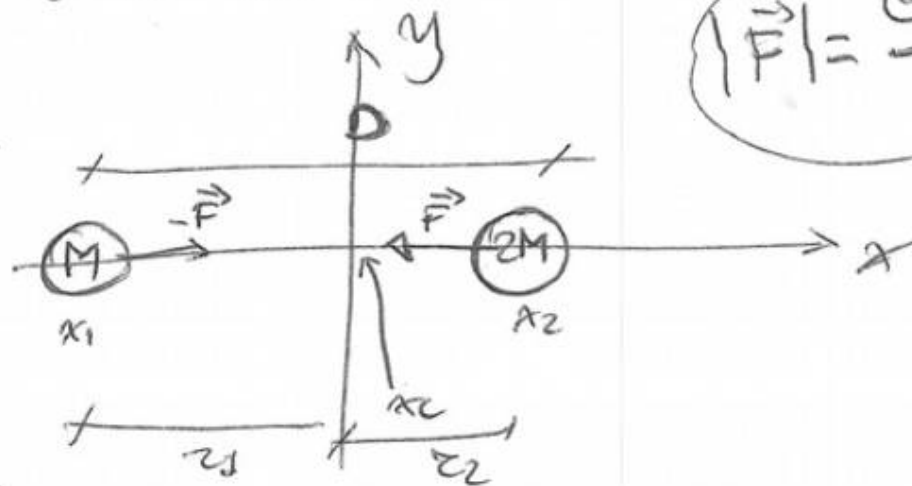
- $M\ddot{x}_1 = -F$
- $2M\ddot{x}_2 = +F$

Da cui:

$$\ddot{x}_c = \frac{1}{3}\left(-\frac{F}{M}\right) + \frac{2}{3}\left(\frac{F}{2M}\right) = 0 \Rightarrow \text{Il COM non accelera!}$$

(Ci ricorda qualcosa?)

Supponiamo che il CM corrisponda con l'origine, cioè $x_c = 0$:



$$|\vec{F}| = \frac{GM \cdot 2M}{D^2}$$

Si ha che:

$$\begin{cases} x_c = 0 = \frac{1}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2 \\ x_2 - x_1 = D \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 \\ x_2 - (-2x_2) = D \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{2}{3}D \\ x_2 = \frac{D}{3} \end{cases}$$

I due corpi compiono un moto circolare intorno all'origine. I raggi delle orbite sono:

$$r_1 = |x_1| = \frac{2}{3}D$$

$$r_2 = |x_2| = \frac{D}{3}$$

Per M:

$$M r_1 \dot{\theta}_1^2 = \frac{GM \cdot 2M}{D^2}$$

$$\dot{\theta}_1^2 = \frac{2GM}{D^2 r_1} =$$

$$= \frac{2GM \cdot 3}{2D^2 D} =$$

$$= \frac{3GM}{D^3}$$

Per 2M:

$$2M r_2 \dot{\theta}_2^2 = \frac{GM \cdot 2M}{D^2}$$

$$\dot{\theta}_2^2 = \frac{GM}{D^2 r_2} =$$

$$= \frac{GM \cdot 3}{D^2 D} =$$

$$= \frac{3GM}{D^3}$$

Le velocità angolari sono uguali!
Questo è ovvio perché sono entrambi
parte della stessa orbita.

$$\dot{\theta}_1 = \dot{\theta}_2 = \omega = \sqrt{\frac{3GM}{D^3}}$$

Ricordando che $\omega = \frac{2\pi}{T}$, si ha che:
(periodo)

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{D^3}{3GM}}$$

Risoluzione alternativa

Si supponga M fermo.

Sia $X = x_2 - x_1$ la posizione relativa di $2M$ rispetto a x_1 .

Si ha che:

$$\begin{aligned}\ddot{X} &= \ddot{x}_2 - \ddot{x}_1 = \frac{F}{2M} - \left(-\frac{F}{M}\right) = F \left(\frac{1}{2M} + \frac{1}{M}\right) \\ &= F \frac{2M + M}{2M \cdot M} = \frac{F}{\left(\frac{2M \cdot M}{2M + M}\right)} \rightarrow \mu \text{ massa ridotta}\end{aligned}$$

Cioè:

$$\mu \ddot{X} = F$$

$$\mu = \frac{2}{3} M$$

Usando le formule del moto circolare:

$$\mu \ddot{X} = F = \frac{G \cdot 2M \cdot M}{D^2}$$

Come
nei sistemi
massa-molla-
massa!!!

$$\mu \ddot{X} = \mu D \dot{\theta}^2$$

Quindi:

$$\mu D \dot{\theta}^2 = \frac{G 2M^2}{D^2}$$

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2GM^2}{D^3 \mu} = \frac{2GM^2}{D^3 \frac{2}{3} M} \cdot 3 = \frac{3GM}{D^3} \dots$$