

Corso di recupero di Fisica 2018/2019

Dario Madeo



Lezione del 07/06/2019

Moto circolare

Il COM percorre una traiettoria circolare (sul cerchio).

Equazioni del moto

$$\begin{aligned} M \ddot{x} &= F_x \\ M \ddot{y} &= F_y \end{aligned} \rightarrow \vec{F} = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{le} \\ \text{forze} \\ \text{totale} \\ \text{agite} \end{array}$$

$$\underline{I \ddot{\theta} = \tau}$$

Visto che il moto è circolare, si
sa anche la forma delle leggi
orarie.

$$\begin{aligned} x(t) &= R \cos \theta(t) \\ y(t) &= R \sin \theta(t) \end{aligned}$$

x, y : posizione del COM

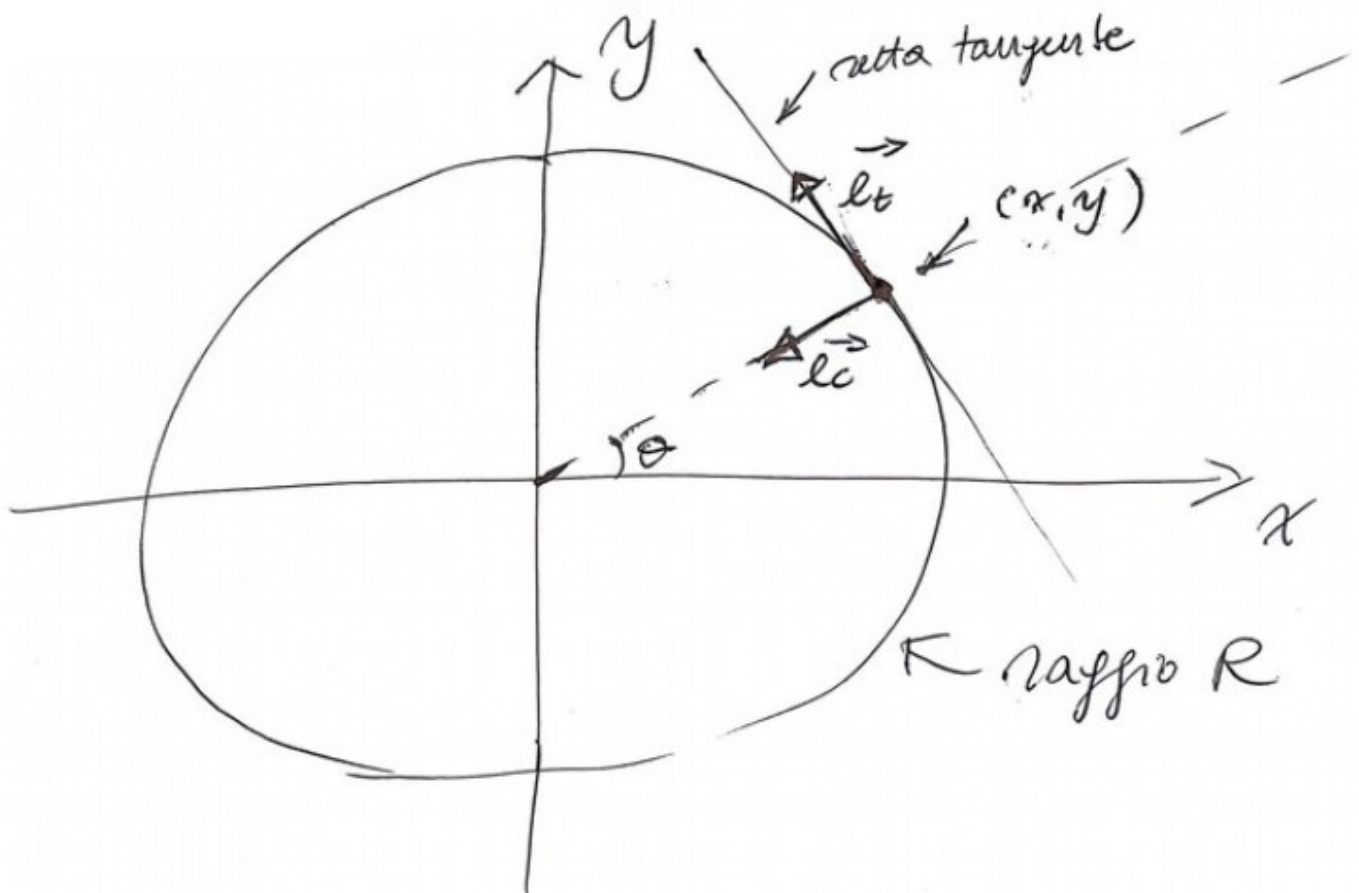
$$\dot{x}(t) = -R \dot{\theta}(t) \sin \theta(t)$$

$$\dot{y}(t) = +R \dot{\theta}(t) \cos \theta(t)$$

$$\ddot{x}(t) = -R \ddot{\theta}(t) \sin \theta(t) - R \dot{\theta}^2(t) \cos \theta(t)$$

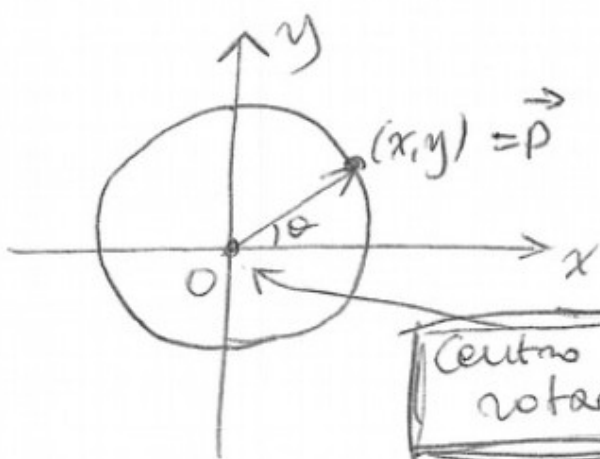
$$\ddot{y}(t) = \underbrace{+R \ddot{\theta}(t) \cos \theta(t)}_{\text{tangenziale}} - \underbrace{R \dot{\theta}^2(t) \sin \theta(t)}_{\text{centripeta}}$$

Da un punto di vista geometrico, gli aggettivi “tangenziale” e “centripeta” hanno un significato ben preciso.

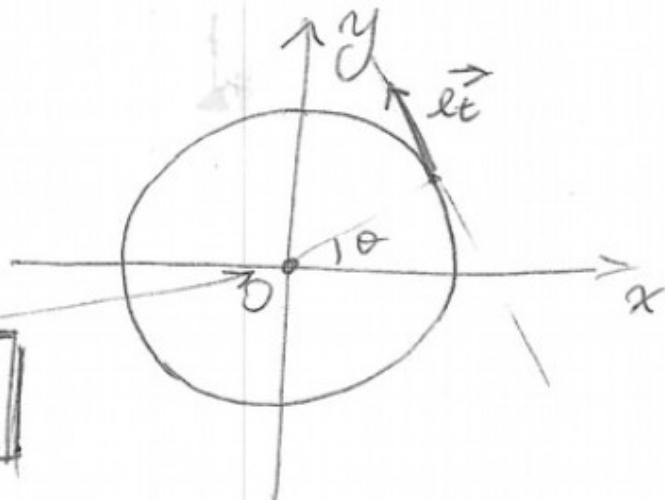


$\vec{l}_t$: versore della direzione tangenziale

$\vec{l}_c$: " " " " centripeta



Centro delle
rotazione



Posizione corpo:

$$x = R \cos \theta(t)$$

$$y = R \sin \theta(t)$$

$$\vec{P} = R \begin{bmatrix} \cos \theta(t) \\ \sin \theta(t) \end{bmatrix}$$

Direzione tangenziale.

È rappresentata dal
versore $\vec{l}_t$.

$$\vec{l}_t = \begin{bmatrix} l_{tx} \\ l_{ty} \end{bmatrix}$$

~~Nel caso di moto circolare~~

Il vettore tangente si trova derivando $\vec{P}$ rispetto
al tempo:

$$\frac{\partial \vec{P}}{\partial t} = R \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \cos \theta(t) \\ \frac{\partial}{\partial t} \sin \theta(t) \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} -\dot{\theta}(t) \sin \theta(t) \\ +\dot{\theta}(t) \cos \theta(t) \end{bmatrix} = \vec{Q}$$

$$\vec{l}_t = \frac{\vec{Q}}{|\vec{Q}|} \quad \leadsto \quad |\vec{Q}| = \sqrt{R^2 \dot{\theta}^2(t) \sin^2 \theta(t) + R^2 \dot{\theta}^2 \cos^2 \theta(t)} \\ = R \dot{\theta}(t).$$

$$\Rightarrow \vec{l}_t = \begin{bmatrix} -\sin \theta(t) \\ +\cos \theta(t) \end{bmatrix}$$

Proprietà del moto circolare:

⊗ $\vec{P}$ e $\vec{l}_t$ sono ortogonali! Provare!

Di resone centripeta

Ritornando alla forma della legge oraria, si ha che:

$$\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} = \underbrace{R\ddot{\theta} \vec{e}_t}_{\text{oss}} + \boxed{R\dot{\theta}^2 \vec{e}_c}$$

Oss

$$\underline{R\dot{\theta}^2 > 0}$$

$$R\ddot{\theta} \in \mathbb{R}$$

Nel moto circolare uniforme, $\ddot{\theta} = 0$.
Quindi ha solo la parte centripeta.

$$I\ddot{\theta} = \tau$$

Da notare che:

$a_t = R\ddot{\theta} \equiv$ accelerazione tangenziale

$a_c = R\dot{\theta}^2 \equiv$ accelerazione centripeta

NOTE

- La parte centripeta è fondamentale per il moto circolare. Non si ha moto circolare senza la parte centripeta.
- La parte centripeta è legata alla velocità angolare del CDM del corpo.
- La parte tangenziale invece può essere assente. In tal caso, si ha moto circolare uniforme.
- La presenza della parte tangenziale dipende dalla presenza di forze che producono momento. In questo caso, ha senso scrivere la seconda cardinale.
- La parte tangenziale è in relazione con l'accelerazione angolare del CDM del corpo.

Equazioni del moto:

$$M\ddot{x} = F_x$$

$$M\ddot{y} = F_y$$

$$I\ddot{\theta} = \tau$$

$$\left\| \begin{aligned} \ddot{x} &= -R\ddot{\theta} \sin\theta + R\dot{\theta}^2 \cos\theta \\ \ddot{y} &= +R\ddot{\theta} \cos\theta - R\dot{\theta}^2 \sin\theta \end{aligned} \right.$$

$$\hookrightarrow M\ddot{x} = -MR\ddot{\theta} \sin\theta - MR\dot{\theta}^2 \cos\theta$$

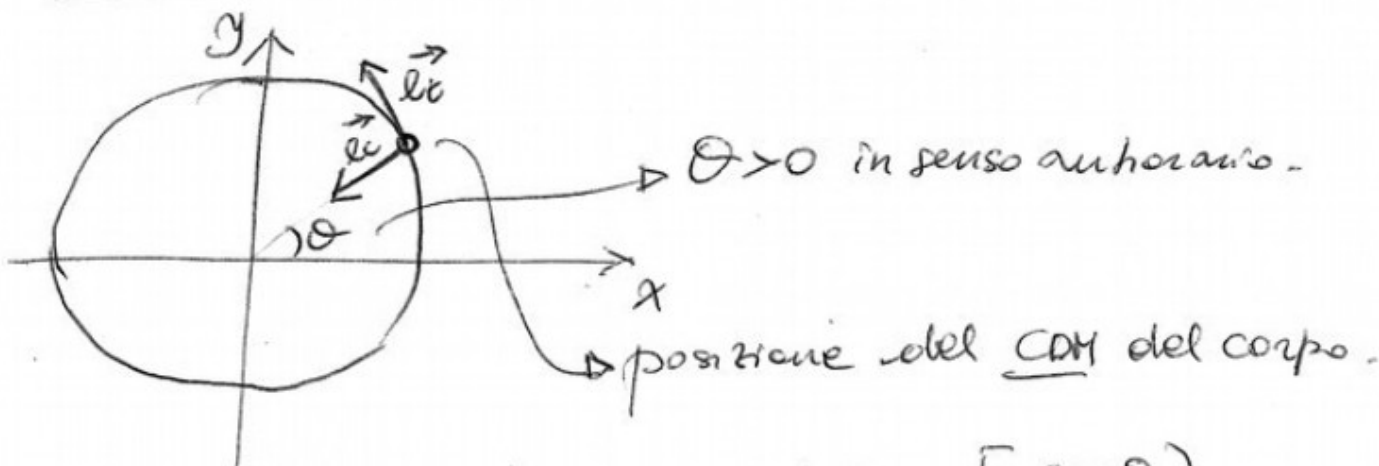
$$M\ddot{y} = \underbrace{+MR\ddot{\theta} \cos\theta}_{\text{forza tangenziale}} - \underbrace{MR\dot{\theta}^2 \sin\theta}_{\text{forza centripeta}}$$

$$M \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} = MR\ddot{\theta} \vec{e}_t + MR\dot{\theta}^2 \vec{e}_c = \vec{F} = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \end{bmatrix}$$

$\hookrightarrow$ In generale, è necessario scomporre la forza netta $\vec{F}$ lungo le direzioni tangenziale e centripeta!

Scomposizione delle forze nelle direzioni tangenziale e centripeta.

METODO ALGEBRICO



$\vec{e}_t$: versore tangenziale
 $\vec{e}_c$: versore centripeto

$$\vec{e}_t = \begin{bmatrix} -\sin\theta \\ +\cos\theta \end{bmatrix}$$

$$\vec{e}_c = \begin{bmatrix} -\cos\theta \\ -\sin\theta \end{bmatrix}$$

Sia $\vec{F}$ le forze agente sul corpo. Allora:

$$\vec{F} = (\underbrace{\vec{F} \cdot \vec{e}_t}_{\text{prodotti scalari}}) \vec{e}_t + (\underbrace{\vec{F} \cdot \vec{e}_c}_{\text{prodotti scalari}}) \vec{e}_c$$

Da cui:

$$\begin{cases} (\vec{F} \cdot \vec{e}_t) = MR\ddot{\theta} = M a_t \\ (\vec{F} \cdot \vec{e}_c) = MR\dot{\theta}^2 = M a_c \end{cases}$$

$$(\vec{F} \cdot \vec{e}_t) \vec{e}_t$$

Proiezione ortogonale di F lungo la direzione tangenziale

$$(\vec{F} \cdot \vec{e}_c) \vec{e}_c$$

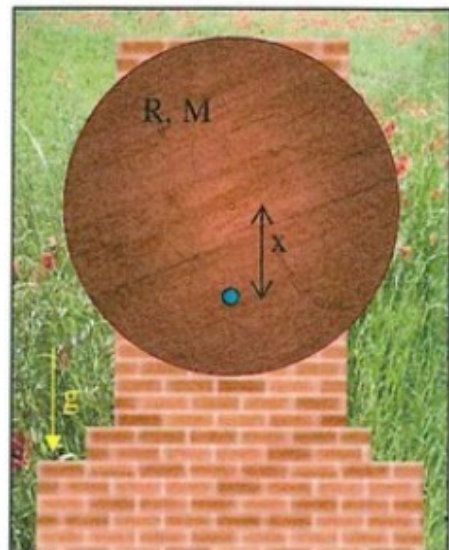
Proiezione ortogonale di F lungo la direzione centripeta

Il metodo grafico invece è stato trattato varie volte durante il corso e verrà utilizzato negli esercizi che seguono.

Esercizio estratto dall'esame di Fisica 1 del 5 Aprile 2011

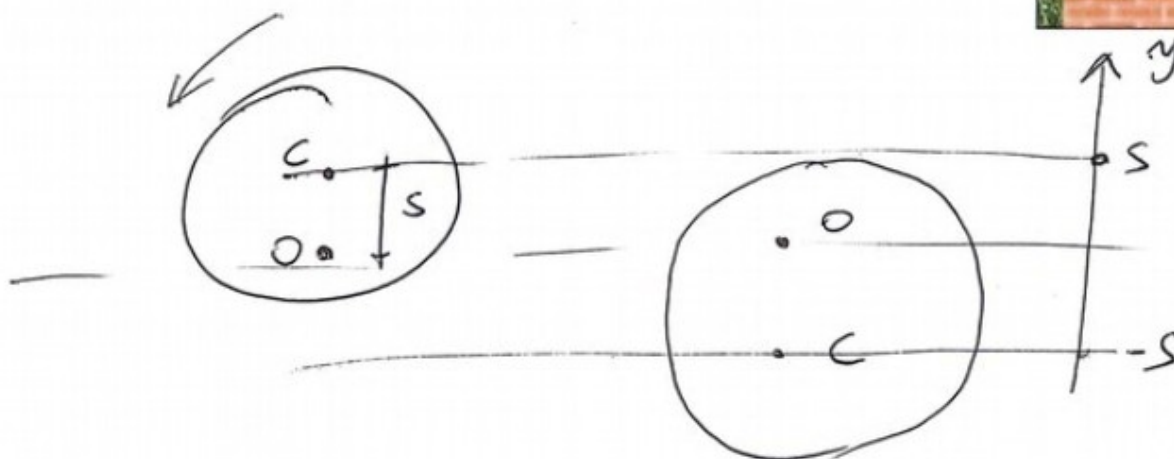
Esercizio 1

Un disco omogeneo di massa M e raggio R ruota senza incontrare attriti su un piano verticale essendo impernato ad un asse orizzontale. L'asse è posto a distanza s dal centro. Si supponga che esso parta da fermo dalla posizione d'equilibrio instabile e compia mezza rotazione. Determinare la velocità angolare ω e il modulo della reazione vincolare R nella configurazione finale e determinare quali valori di x rendono massime tali quantità.



Configurazione iniziale

Configurazione finale



C: CDM

O: fulcro

Per determinare la velocità angolare nella configurazione finale, possiamo usare la conservazione dell'energia meccanica. Infatti, non agiscono forze esterne dissipative!

Conservazione energia meccanica

$$K_0 + U_0 = K_1 + U_1$$

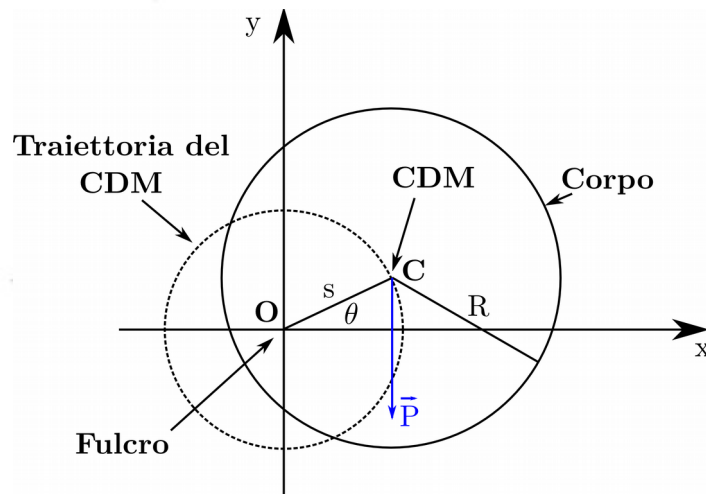
$$0 + Mgs = \frac{1}{2} I \omega^2 + (-Mgs)$$

$$\left(I = \frac{1}{2} MR^2 + Ms^2 \right)$$

$$\frac{1}{2} I \omega^2 = 2Mgs$$

$$\omega = 2 \sqrt{\frac{Mgs}{I}} \dots$$

Per calcolare il modulo delle reazioni vincolari $\vec{R}$ nella configurazione finale, ricorriamo al diagramma delle forze e alle equazioni del moto.



Su C (com) agisce la forza peso $\vec{P} = \begin{bmatrix} 0 \\ -Mg \end{bmatrix}$.

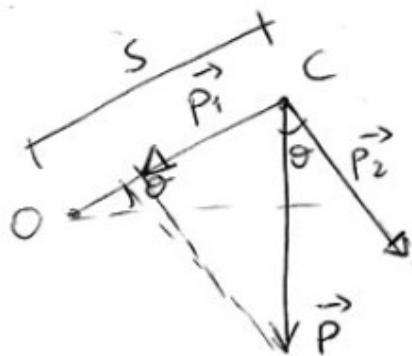
Su O (fulcro) agisce la reazione vincolare $\vec{R} = \begin{bmatrix} R_x \\ R_y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

Equazioni del moto:

$$M\ddot{x} = R_x$$

$$M\ddot{y} = R_y - Mg$$

Per quanto riguarda la seconda coordinata ($I\ddot{\theta} = \dots$), si nota che solo $\vec{P}$ crea momento!



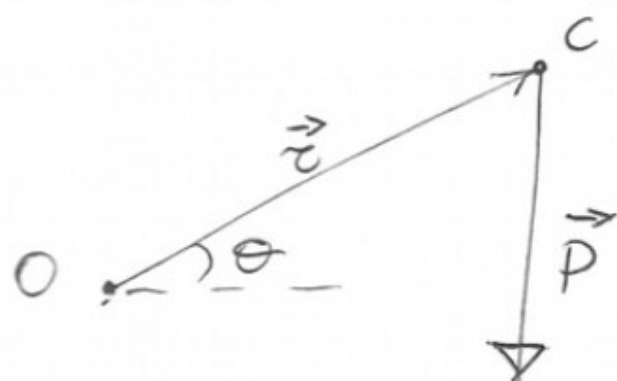
$$|\vec{P}_2| = Mg \cos \theta$$

$$\tau = -Mg s \cos \theta$$

↑
regola della mano destra

BONUS

Calcolo analitico del momento torcente



$$\vec{r} = s \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{P} = \begin{bmatrix} 0 \\ -Mg \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{P} = \det \begin{bmatrix} \vec{x} & \vec{y} & \vec{z} \\ s \cos\theta & s \sin\theta & 0 \\ 0 & -Mg & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \vec{z} (s \cos\theta (-Mg)) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -Mg s \cos\theta \end{bmatrix}$$

La rotazione avviene lungo z , quindi prendo solo la componente z di $\vec{\tau}$.

Da cui:

$$I \ddot{\theta} = -Mg s \cos\theta$$

Con il metodo analitico, non ci sono problemi sulle determinazioni del segno del momento!

BONUS

Sell'esercizio avesse richiesto di studiare il sistema per piccole oscillazioni, come avremmo dovuto agire?

$$I \ddot{\theta} = -Mgs \cos \theta$$

Punto di equilibrio stabile $\bar{\theta} = -\frac{\pi}{2}$

$$\text{Sia } \beta = \theta + \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Da cui } \theta = \beta - \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \ddot{\beta} = \ddot{\theta}$$

$$I \ddot{\beta} = -Mgs \cos\left(\beta - \frac{\pi}{2}\right)$$

Per $\beta \simeq 0$

$$\cos\left(\beta - \frac{\pi}{2}\right) \simeq \cos\left(0 - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{(-\sin(0 - \frac{\pi}{2}))}{1} \cdot \beta$$

$$= 0 + 1 \cdot \beta$$

$$= \beta$$

$$I \ddot{\beta} = -Mgs \beta$$

Abbiamo che:

$$M\ddot{x} = R_x = Ms\ddot{\theta}(-\sin\theta) + Ms\dot{\theta}^2(-\cos\theta)$$

$$M\ddot{y} = R_y - Mg = Ms\ddot{\theta}(\cos\theta) + Ms\dot{\theta}^2(-\sin\theta)$$

$$I\ddot{\theta} = -Mgs\cos\theta$$

Da cui:

$$\ddot{\theta} = -\frac{Mgs\cos\theta}{I}$$

$$R_x = Ms\left(-\frac{Mgs\cos\theta}{I}\right)(-\sin\theta) + Ms\dot{\theta}^2(-\cos\theta)$$

$$R_y = Ms\left(-\frac{Mgs\cos\theta}{I}\right)\cos\theta + Ms\dot{\theta}^2(-\sin\theta) + Mg$$

$$R_x = \frac{M^2s^2g\cos\theta\sin\theta}{I} - Ms\dot{\theta}^2\cos\theta$$

$$R_y = -\frac{M^2s^2g\cos^2\theta}{I} - Ms\dot{\theta}^2\sin\theta + Mg$$



Espressione generale della reazione
vincolare data la posizione θ e la
velocità angolare $\dot{\theta}$.

La reazione $\vec{R}$ non è una forza uguale
in ogni configurazione come la forza peso!

A noi interessa $\vec{R}$ per $\Theta = \frac{3}{2}\pi$ (configurazione finale).

Si noti che, per $\Theta = \frac{3}{2}\pi$, allora $\dot{\Theta} = \omega = 2\sqrt{\frac{Mgs}{I}}$

Quindi:

$$R_x = \frac{M^2 s^2 g \cos \frac{3}{2}\pi \sin \frac{3}{2}\pi}{I} - Ms \left(2\sqrt{\frac{Mgs}{I}} \right)^2 \cos \frac{3}{2}\pi =$$

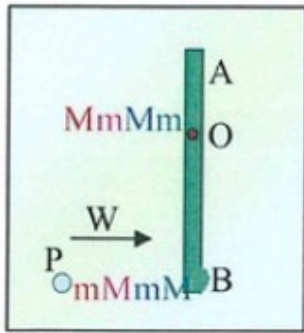
$$= 0.$$

$$R_y = \frac{-M^2 s^2 g \cos^2 \frac{3}{2}\pi}{I} - Ms \left(2\sqrt{\frac{Mgs}{I}} \right)^2 \sin \frac{3}{2}\pi + Mg =$$

$$= Ms \cdot 4 \frac{Mgs}{I} + Mg = \frac{4M^2 s^2 g}{I} + Mg.$$

$$\Rightarrow \vec{R} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{4M^2 s^2 g}{I} + Mg \end{bmatrix}.$$

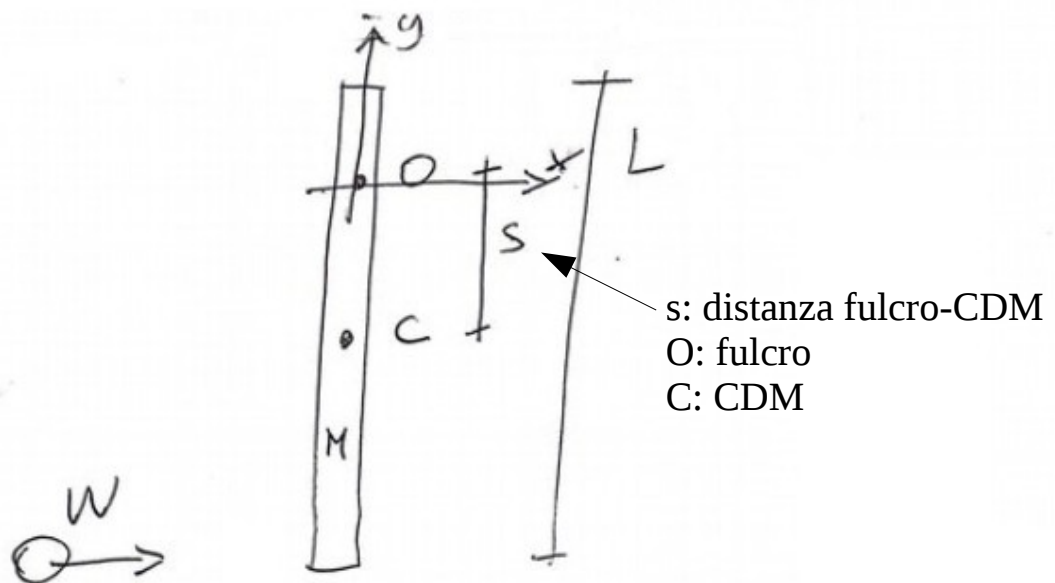
Esercizio estratto dall'esame di Fisica 1 del 17 Maggio 2019



Esercizio 2

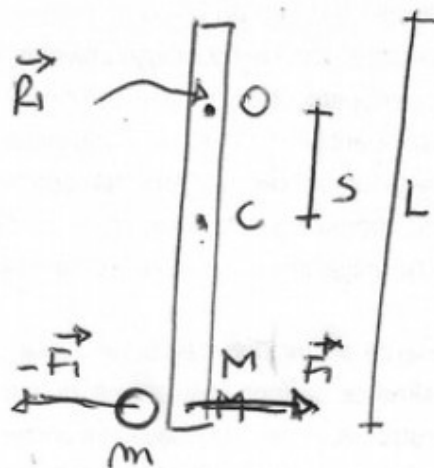
La figura mostra una sbarretta omogenea AB di massa M e lunghezza L imperniata in O, che dista $L/3$ dall'estremo A, e un punto materiale P di massa m (incognita). Entrambi i corpi sono su un piano orizzontale liscio. Inizialmente AB è ferma e P si muove con velocità V in direzione perpendicolare ad essa verso il suo estremo B, che va ad urtare in un processo elastico ed istantaneo. Dopo l'urto, P resta immobile mentre la sbarretta ruota, fino ad urtare nuovamente P con lo stesso estremo B, stavolta in maniera perfettamente anelastica. Determinare:

- la massa m di P;
- la quantità di energia dissipata in tutto il processo;
- l'intensità della forza esercitata dal vincolo dopo il secondo urto;
- l'impulso fornito dal vincolo nel primo e nel secondo urto;



m: massa della pallina

Urto 1



O: fulcro
C: Cdm

Forze impulsive
che agiscono
durante l'urto

$$\vec{R}_1 = \begin{bmatrix} R_{1x} \delta(t) \\ R_{1y} \delta(t) \end{bmatrix}$$

$$R_{1x}, R_{1y} \in \mathbb{R}$$

$$\vec{F}_1 = \begin{bmatrix} F_1 \delta(t) \\ 0 \end{bmatrix}, F_1 > 0$$

L'urto è elastico. Si conserva l'energia:

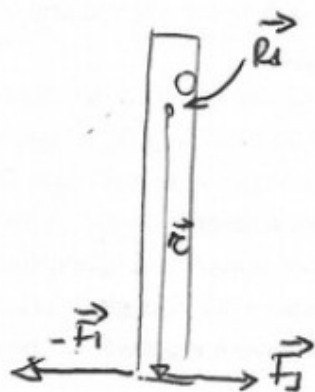
$$\frac{1}{2} m W^2 = \frac{1}{2} I \omega_i^2$$

$$\left(I = \frac{1}{12} M L^2 + M s^2 \right)$$

Forza netta sul sistema:

$$\underbrace{\vec{F}_1 + \vec{R}_1}_{\text{sulla sbarretta}} + \underbrace{(-\vec{F}_1)}_{\text{sulla pallina}} = \vec{R}_1 \neq \vec{0}$$

$\Rightarrow$ Non si conserva la quantità di moto.



Sul sistema agisce il seguente momento:

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \underbrace{\vec{r} \times \vec{F}_1}_{\text{sulla sbarretta}} + (\vec{0} \times \vec{R}_1) + \underbrace{(\vec{e} \times (-\vec{F}_1))}_{\text{sulla pallina}} \\ &= \vec{r} \times \vec{F}_1 + \vec{0} - \vec{e} \times \vec{F}_1 = \vec{0} \end{aligned}$$

$\hookrightarrow$ Si conserva il momento angolare!

Momento angolare prima e dopo l'urto:

$$L_1^- = L_1^+ \quad \curvearrowright$$
$$* m \left(\frac{L}{2} + s \right) w = I \omega_1$$

Energia cinetica prima e dopo l'urto:

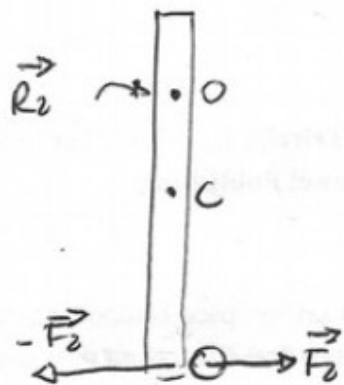
$$K_1^- = K_1^+ \quad \curvearrowright$$
$$* \frac{1}{2} m w^2 = \frac{1}{2} I \omega_1^2$$

Incongnite: ω_1 e m .

$$\dots \left| \begin{array}{l} \omega_1 = \frac{2w}{2s+L} \\ m = \frac{4I}{(2s+L)^2} \end{array} \right.$$

← Soluzione del sistema

Uzto 2



Forze impulsive:

$$\vec{R}_2 = \begin{bmatrix} R_{2x}(t) \\ R_{2y}(t) \end{bmatrix}$$

$$R_{2x}, R_{2y} \in \mathbb{R}$$

$$\vec{F}_2 = \begin{bmatrix} F_2(t) \\ 0 \end{bmatrix}, F_2 > 0$$

- L'urto è anelastico. Non si conserva l'energia.
- Per quanto riguarda le quantità di moto ed il momento angolare, valgono le stesse considerazioni fatte per il primo urto.

Conservazione momento angolare:

$$L_2^- = L_2^+ \Rightarrow L_1^+ = L_2^+$$

$$\parallel$$

$$L_1^+$$

$$I\omega_1 = I'\omega_2 \Rightarrow \omega_2 = \frac{I}{I'}\omega_1$$

I' è il momento d'inertia dello spinnetto con le palline appiccicate.

$$I' = I + m\left(s + \frac{L}{2}\right)^2 = I + \frac{4I}{(2s+L)^2} \left(\frac{L}{2} + s\right)^2 = 2I$$

$$\Rightarrow \left| \omega_2 = \frac{1}{2}\omega_1 = \frac{\omega}{2s+L} \right|$$

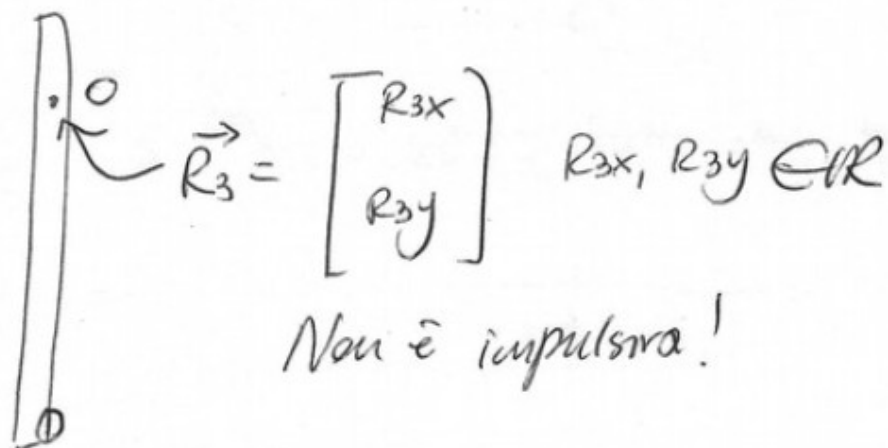
Energia dissipata = cinetica iniziale - cinetica finale

$$\Rightarrow \frac{1}{2} m w^2 - \frac{1}{2} I' \omega_2^2 =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{4I w^2}{(2s+L)^2} - \frac{1}{2} 2I \left(\frac{w}{2s+L} \right)^2$$

$$= \frac{2I w^2}{(2s+L)^2} - \frac{I w^2}{(2s+L)^2} = \frac{I w^2}{(2s+L)^2}, \quad (\text{risposta b})$$

Dopo il secondo urto, agisce solo le forze sul vincolo.



Equazioni del moto

$$(M+m) \ddot{x} = R_{3x}$$

$$(M+m) \ddot{y} = R_{3y}$$

(x, y) posizione com.

$$I' \ddot{\theta} = 0 \quad \leftarrow \vec{R}_3 \text{ non crea momento.}$$

Primo urto

$$M \ddot{x}_B = R_x + F_1$$

$$M \ddot{y}_{SB} = R_y$$

$$m \ddot{x}_P = -F_1$$

$$m \ddot{y}_P = 0$$

$$R_x, R_y$$

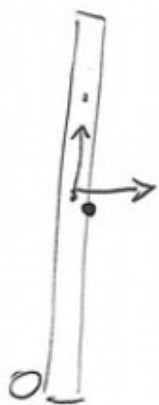
$$R_x = 0 \delta(t)$$

$$R_y = M \omega_1^2 R \delta(t) \quad \left. \vphantom{R_y} \right\} \text{Forza impulsiva.}$$

Qual'è l'impulso creato da $\vec{R}_1$?

$$\Rightarrow M \omega_1^2 R.$$

Secondo urto ---



$$M \ddot{x} = R_x + F_1$$

$$M \ddot{y} = R_y$$

$$I \ddot{\theta} = F_1 R$$

$$M \ddot{x} = -MR \dot{\theta}^2 \cos \theta - MR \ddot{\theta} \sin \theta = R_x + F_1$$

$$M \ddot{y} = -MR \dot{\theta}^2 \sin \theta + MR \ddot{\theta} \cos \theta = R_y$$

Il mob dopo il 2° urto è circolare.

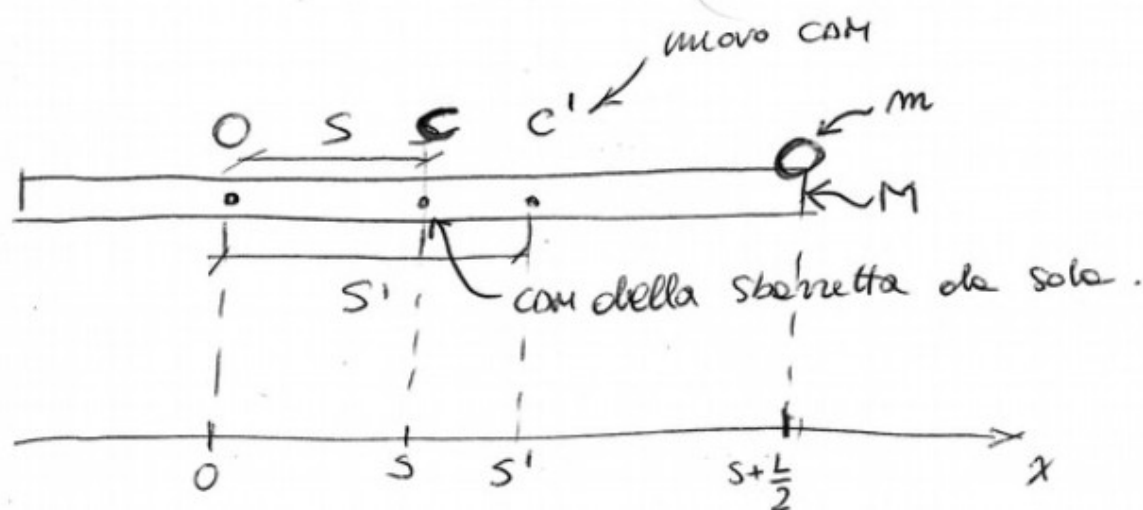
Quindi:

$$(M+m)\ddot{x} = R_x = (M+m)s'\ddot{\theta}(-\sin\theta) + (M+m)s'\dot{\theta}^2(-\cos\theta)$$

$$(M+m)\ddot{y} = R_y = \underbrace{(M+m)s'\ddot{\theta}(\cos\theta)}_{\text{tangenziale}} + \underbrace{(M+m)s'\dot{\theta}^2(-\sin\theta)}_{\text{centrifuga.}}$$

NOTE

- s' è la ^{distanza} ~~posizione~~ del "nuovo" CM del feucro. Calcoliamo s' :



$$s' = \frac{s \cdot M + \left(s + \frac{L}{2}\right)m}{M + m} = \frac{s(M+m)}{M+m} + \frac{m}{M+m} \left(s + \frac{L}{2}\right) =$$

$$= s + \frac{\frac{4I}{(2s+L)^2}}{M + \frac{4I}{(2s+L)^2}} \left(\frac{2s+L}{2}\right) =$$

$$= s + \frac{4I}{(2s+L)^2} \frac{(2s+L)^2}{M(2s+L)^2 + 4I} \left(\frac{2s+L}{2}\right) =$$

$$= s + \frac{2I}{M(2s+L)^2 + 4I} (2s+L).$$

Sia $d = \frac{4I}{M(2s+L)^2 + 4I} (2s+L)$. Allora

$$s' = s + d.$$

- $I\ddot{\Theta} = 0 \Rightarrow \ddot{\Theta} = 0 \Rightarrow$ moto circolare uniforme.
Scomponi la parte tangenziale.

- Poiché il moto è circolare uniforme, allora la velocità angolare rimane costante.

In particolare:

$$\dot{\Theta} = \omega_2 = \frac{v}{2s+L}.$$

Quindi:

$$(M+m)\ddot{x} = R_{3x} = (M+m)(s+d)\omega_2^2 (-\cos\theta)$$

$$(M+m)\ddot{y} = R_{3y} = (M+m)(s+d)\omega_2^2 (-\sin\theta)$$

$$\Rightarrow \vec{R}_{3x} = \underbrace{(M+m)(s+d)\omega_2^2}_{\text{Intensità della reazione}} \begin{bmatrix} -\cos\theta \\ -\sin\theta \end{bmatrix}.$$

Intensità della reazione $\rightarrow$ risposta c.

Domanda d

Calcolare l'impulso fornito del vincolo nel primo e nel secondo urto.

Urto 1

• Pallina

$$m \ddot{x}_p = -F_1 S(t)$$

istante dopo l'urto $\rightarrow 0^+$

$$\int_{0^-}^{0^+} m \ddot{x}_p dt = \int_{0^-}^{0^+} -F_1 S(t) dt$$

istante prima dell'urto $\rightarrow 0^-$

$$m(\dot{x}_p(0^+) - \dot{x}_p(0^-)) = -F_1$$

↑
velocità
dopo
l'urto

↑
velocità
prima
dell'urto.

$$\rightarrow m(0 - w) = -F_1 \Rightarrow \boxed{F_1 = mw}$$

Impulso fornito dalla forza $-F_1$ alla pallina

NOTA Impulso $\equiv$ variazione quantità di moto!

• Sbornetta

$$M \ddot{x}_s = F_1 \delta(t) + R_{1x} \delta(t)$$

$$M(\dot{x}_s(0^+) - \dot{x}_s(0^-)) = F_1 + R_{1x}$$

NOTA $\dot{x}_s$ è la velocità del centro di massa della sbornetta.

$$\dot{x}_s = s \odot$$

$$\Rightarrow M s (\dot{\theta}(0^+) - \dot{\theta}(0^-)) = F_1 + R_{1x}$$

$$M s (\omega_1 - 0) = F_1 + R_{1x}$$

$$R_{1x} = M s \omega_1 - F_1 =$$

$$= \boxed{M s \omega_1 - (m \omega_0)}$$

→ Impulso fornito da $\vec{R}_1$.

Lungo y... $M \ddot{y}_s = R_{1y} \delta(t)$

$$M(\dot{y}_s(0^+) - \dot{y}_s(0^-)) = R_{1y}$$

↑ ↑
Sono entrambe pari a 0. Infatti non c'è moto lungo y

$$\Rightarrow R_{1y} = 0$$

Quindi: $\vec{R}_1 = \begin{bmatrix} Msw_1 - mw \\ 0 \end{bmatrix} \delta(t)$

Ricorda
 $[\delta(t)] = \frac{1}{s}$
 $[\vec{R}_1] = N \cdot s = \frac{kg \cdot m}{s}$
 Ha le dimensioni della quantità di moto!

$|\vec{R}_1| = |Msw_1 - mw|$

~~Uso~~

Via più rapida

- La forza totale sul sistema $\vec{x}$: $\vec{F}_1 + \vec{R}_1 + (-\vec{F}_1) = \vec{R}_1$
- Il moto si sviluppa lungo x . $\Rightarrow \vec{R}_1 = \begin{bmatrix} R_{1x} \\ 0 \end{bmatrix} \delta(t)$
- R_{1x} deve essere pari alla variazione della quantità di moto del sistema!

$$\begin{aligned} R_{1x} &= (m\dot{x}_p(0^+) + M\dot{x}_s(0^+)) - (m\dot{x}_p(0^-) + M\dot{x}_s(0^-)) = \\ &= (m \cdot 0 + Msw_1) - (mw + M \cdot 0) = \\ &= Msw_1 - mw. \end{aligned}$$

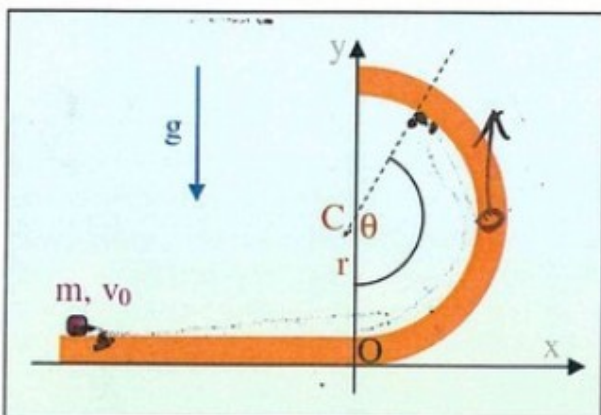
Usiamo la via più rapida per calcolare l'impulso nel secondo urto.

- Forza totale: $\vec{F}_2 + \vec{R}_2 + (-\vec{F}_2) = \vec{R}_2$
- $\vec{R}_2 = \begin{bmatrix} R_{2x} \\ 0 \end{bmatrix} \delta(t)$ poiché il moto $\vec{x}$ lungo x .
- $R_{2x} = (m\dot{x}_p(0^+) + M\dot{x}_s(0^+)) - (m\dot{x}_p(0^-) + M\dot{x}_s(0^-)) =$
 $= (m(s + \frac{L}{2})\omega_2 + Msw_2) - (m \cdot 0 + Msw_1) =$
 $= m(s + \frac{L}{2}) + Ms(\omega_2 - \omega_1).$

Esercizio estratto dall'esame di Fisica 1 del 24 Gennaio 2012

Esercizio I

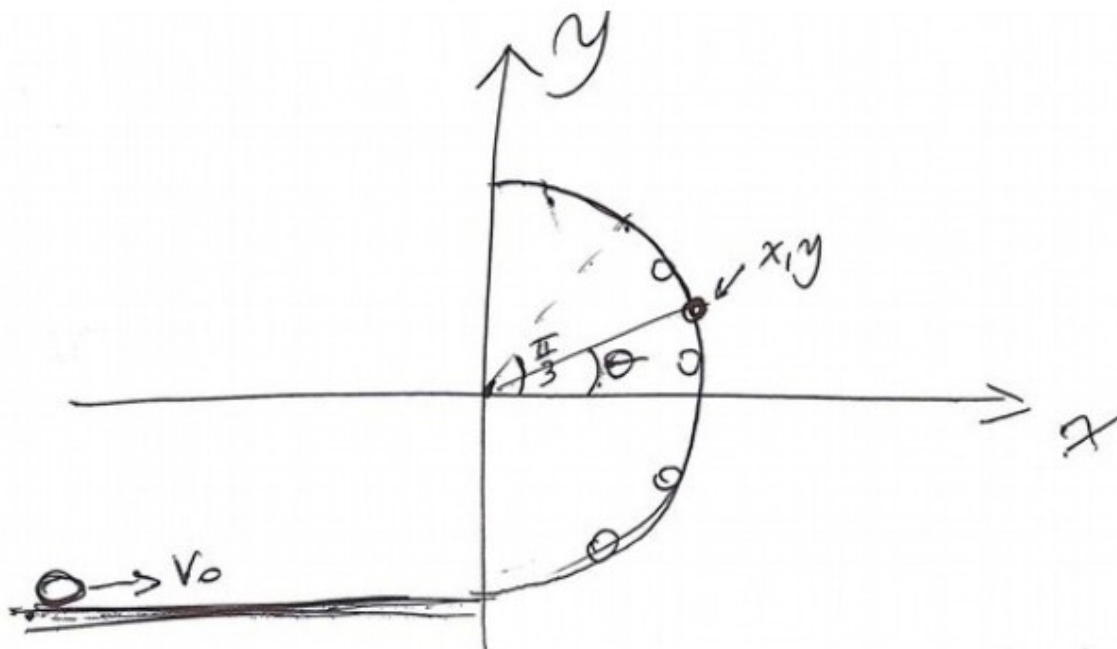
Si ha un profilo liscio come quello rappresentato in figura (un tratto orizzontale seguito da una semicirconferenza di raggio r , giacente sul piano verticale). Un corpo puntiforme di massa m viene lanciato verso destra sul tratto orizzontale e si osserva che esso segue il profilo fino ad aver



percorso un arco di semicirconferenza il quale sottende un angolo θ di 150° . Si chiede di determinare:

- il modulo e le componenti del vettore velocità $\underline{v}_1$ all'istante del distacco;
- la velocità iniziale v_0 del corpo;
- la reazione normale all'istante in cui la velocità del corpo è diretta verticalmente;
- l'angolo di impatto con cui il corpo ricade sul tratto orizzontale della guida.

Per comodità, cambiamo sistema di riferimento.

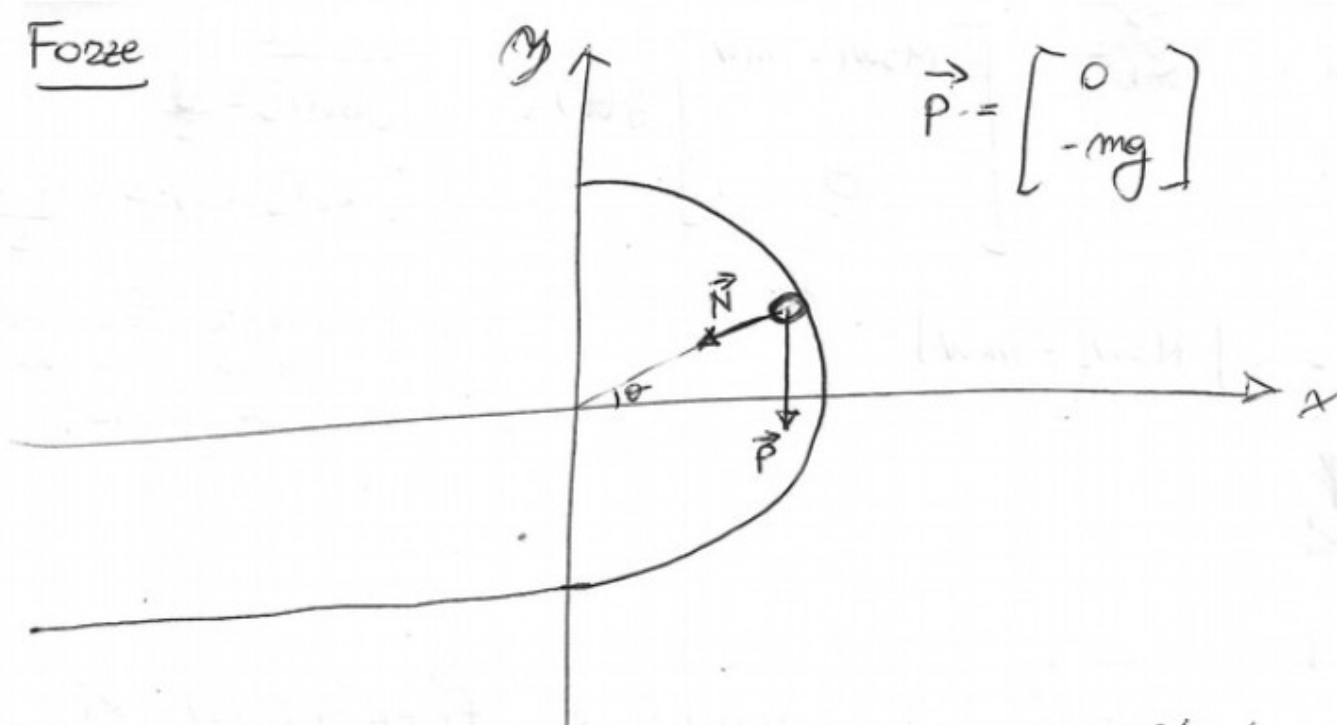


Il moto della pallina sarà circolare, quindi:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -mR\dot{\theta}^2 \cos\theta - mR\ddot{\theta} \sin\theta \\ m\ddot{y} &= -mR\dot{\theta}^2 \sin\theta + mR\ddot{\theta} \cos\theta \end{aligned}$$

centripeta tangenziale

Forze



$\vec{N}$ è la forza normale che si crea per l'interazione tra corpo e guida.

La forza normale è sempre ortogonale alla superficie di contatto.



Questo ~~non~~ vuol dire che $\vec{N} \perp \vec{e}_t$.

Ma sappiamo che $\vec{e}_c \perp \vec{e}_t$.

Quindi:

$$\boxed{\vec{N} = N \cdot \vec{e}_c, \quad N > 0}$$

$\vec{N}$ è già scomposta!
Scomponiamo $\vec{P}$:

$$\vec{e}_t = \begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix} \quad \vec{e}_c = \begin{bmatrix} -\cos\theta \\ -\sin\theta \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \vec{P} &= (\vec{P} \cdot \vec{e}_t) \vec{e}_t + (\vec{P} \cdot \vec{e}_c) \vec{e}_c = \\ &= -mg \cos\theta \vec{e}_t + mg \sin\theta \vec{e}_c \end{aligned}$$

Quindi:

~~$m\ddot{x} = +mR\dot{\theta}^2(-\cos\theta)$~~

$$\begin{aligned} m \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} &= mR\ddot{\theta} \vec{e}_t + mR\dot{\theta}^2 \vec{e}_c = \vec{N} + \vec{P} \\ &= -mg \cos\theta \vec{e}_t + (mg \sin\theta + N) \vec{e}_c \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} mR\ddot{\theta} = -mg \cos\theta \\ mR\dot{\theta}^2 = mg \sin\theta + N \end{cases}$$

Quando il corpo raggiunge $\theta = \frac{\pi}{3}$ e si stacca, allora l'interazione con la guida cessa e la forza normale si annulla. Cioè, $N=0$, e quindi:

$$\begin{cases} mR\ddot{\theta} = -mg \cos \frac{\pi}{3} \\ mR\dot{\theta}^2 = mg \sin \frac{\pi}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{\theta} = -\frac{g}{2R} \\ \dot{\theta}^2 = \frac{g\sqrt{3}}{2R} \end{cases}$$

Per cui, la velocità angolare del corpo al momento del distacco è:

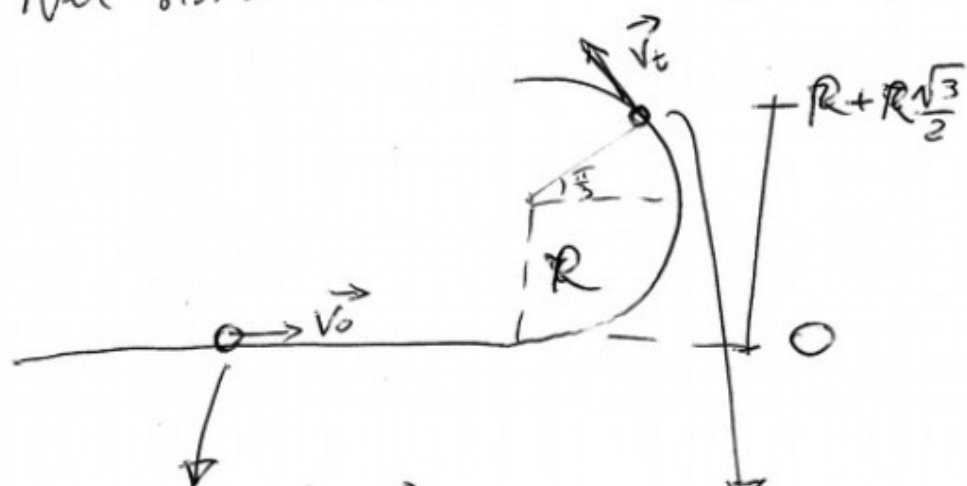
$$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{g\sqrt{3}}{2R}}$$

La velocità tangenziale è

$$\vec{V}_t = R\dot{\theta}\vec{e}_t \quad \& \text{ risposta a}$$

Come si lega $\vec{V}_t$ alla velocità iniziale?

Nel sistema si conserva l'energia meccanica:



$$K_0 + U_0 = \frac{1}{2} m |\vec{V}_0|^2 + 0$$

$$K_1 + U_1 = \frac{1}{2} m |\vec{V}_t|^2 + mg(R + R\frac{\sqrt{3}}{2})$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} m V_0^2 = \frac{1}{2} m (R\dot{\theta})^2 + mgR\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$V_0^2 = R^2 \frac{g\sqrt{3}}{2R} + 2gR\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$V_0^2 = gR\frac{\sqrt{3}}{2} + 2gR + gR\sqrt{3}$$

$$= gR\left(\frac{3}{2}\sqrt{3} + 2\right) \Rightarrow V_0 = \sqrt{gR\left(\frac{3}{2}\sqrt{3} + 2\right)}$$

Risposta b

Domanda C

Risolvere per $\theta=0$.

Dalle equazioni del moto:

$$mR\dot{\theta}^2 = mg \sin\theta + N$$

$$\Rightarrow N = mR\dot{\theta}^2 - mg \sin\theta$$

Per $\theta=0$, posso calcolare $\dot{\theta}$ usando la conservazione dell'energia:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}m v^2(\theta=0) + mgR$$

$$v_0^2 = v^2(\theta=0) + 2gR$$

$$v^2(\theta=0) = v_0^2 - 2gR$$

$$= gR \left(\frac{3}{2}\sqrt{3} + 2 \right) - 2gR = gR \frac{3}{2}\sqrt{3}.$$

$$\hookrightarrow \dot{\theta}(\theta=0) = \frac{v(\theta=0)}{R} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{3\sqrt{3}gR}{2}}.$$

Quindi:

$$N(\theta=0) = mR\dot{\theta}^2(\theta=0) - mg \sin\theta$$

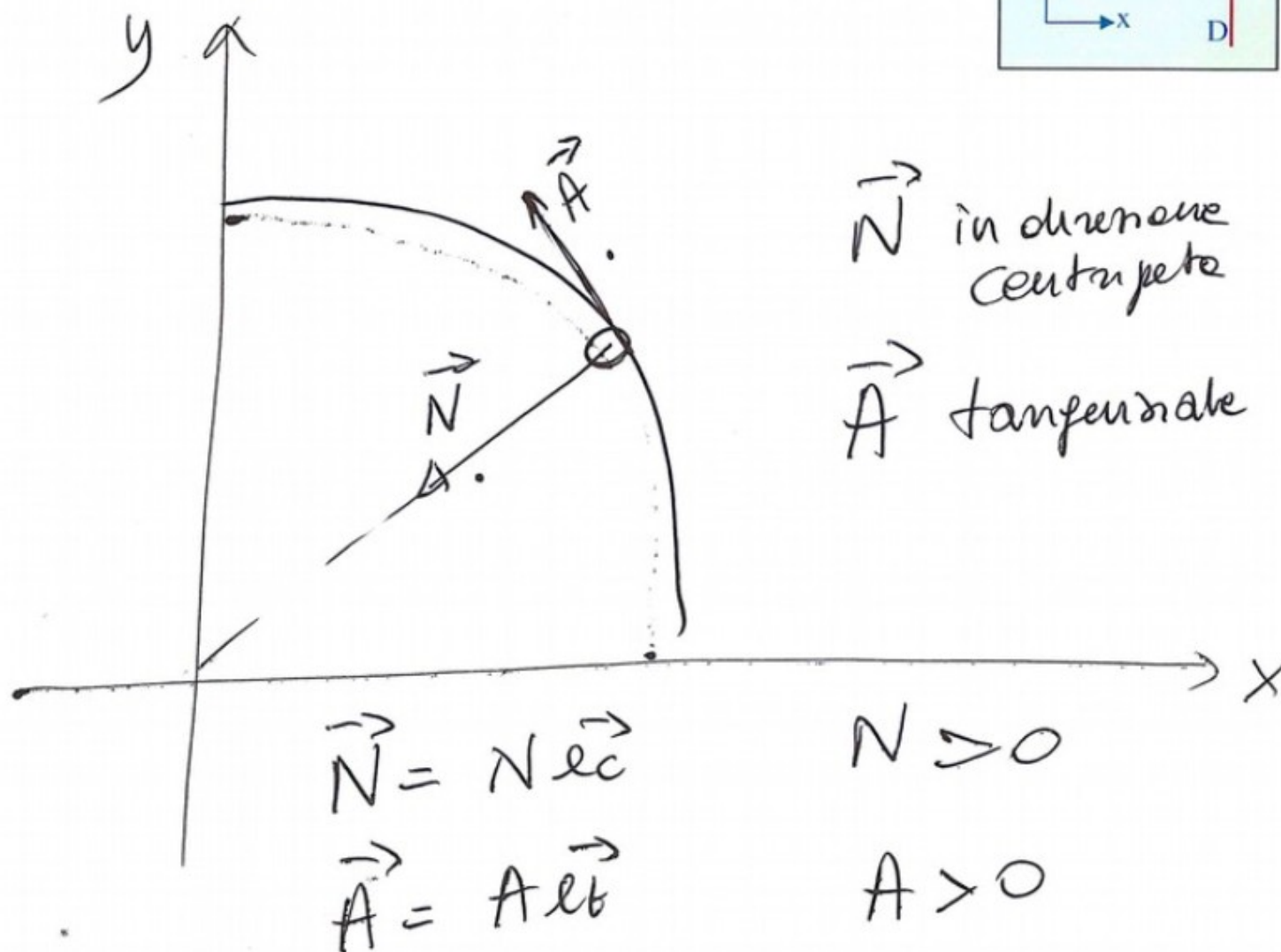
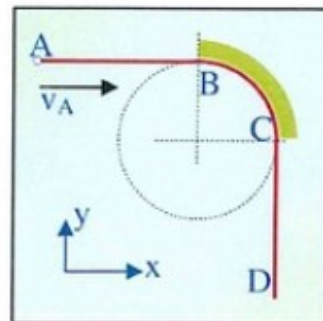
$$= mR \frac{1}{R^2} \frac{3\sqrt{3}gR}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2} mg.$$

Esercizio estratto dall'esame di Fisica 1 del 24 Settembre 2013

Esercizio 1

La figura rappresenta una vista dall'alto di un piano orizzontale liscio, su cui si muove un punto materiale di massa M seguendo la traiettoria ABCD. Da B a C il punto striscia contro la superficie interna di una parete cilindrica ruvida, sulla quale subisce un attrito radente dinamico descritto dal coefficiente μ_D . I tratti rettilinei hanno lunghezza $2R$. La parete ha raggio di curvatura R e sottende un angolo retto. Si conosce la velocità iniziale v_A che è diretta lungo x e si chiede di determinare

- la dipendenza dell'accelerazione tangenziale dalla velocità, durante il contatto con la parete cilindrica;
- la legge oraria della velocità durante il contatto con la parete;
- la durata temporale $\Delta t_{BC} = t_C - t_B$ del contatto con la parete;
- l'impulso totale scambiato fra massa e guida e (facoltativo per il N.O.) il tempo necessario a coprire l'intero percorso.



$\vec{N}$ in direzione
centripeta

$\vec{A}$ tangenziale

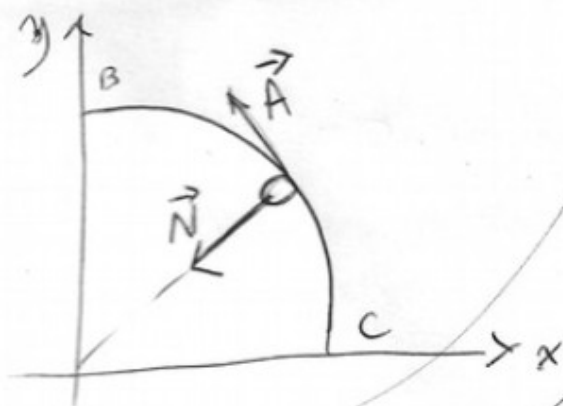
$$\vec{N} = N \vec{e}_c$$

$$N > 0$$

$$\vec{A} = A \vec{e}_t$$

$$A > 0$$

$$A = \mu_D N$$



• $\vec{A}$: attrito dinamico

$$\vec{A} = \mu_0 N \vec{e}_t$$

$\vec{N}$: forza normale

$$\vec{N} = N \vec{e}_c, N > 0$$

► L'attrito agisce lungo la superficie di contatto $\equiv$ agisce tangenzialmente.

► Il suo modulo è pari a $\mu_0 N$.

Equazioni del moto:

$$M \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} = MR\ddot{\theta} \vec{e}_t + MR\dot{\theta}^2 \vec{e}_c$$

$$= \mu_0 N \vec{e}_t + N \vec{e}_c$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \mu_0 N = MR\ddot{\theta} \\ N = MR\dot{\theta}^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{\theta} = \frac{\mu_0 N}{MR} \\ \dot{\theta}^2 = \frac{N}{MR} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} = \frac{\mu_0}{MR} MR\dot{\theta}^2 = \mu_0 \dot{\theta}^2$$

Da cui:

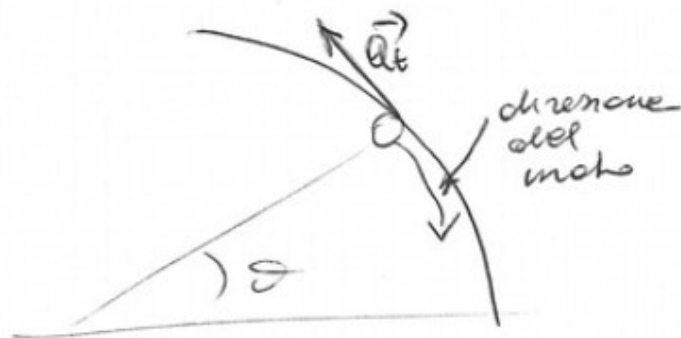
$$a_t = R\ddot{\theta}, \quad v_t = R\dot{\theta}$$

$$\Rightarrow a_t = \mu_0 \frac{v_t^2}{R}$$

← Risposta

NOTA

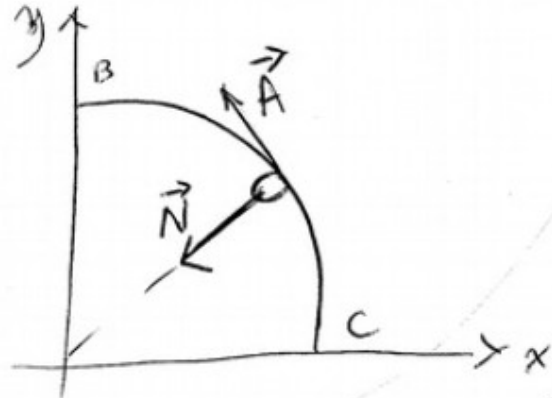
- il corpo compie una rotazione in senso orario.
- Subisce un'accelerazione tangenziale diretta in senso antiorario



Come trovo la legge oraria?

$$a_t = \mu_D \frac{v_t^2}{R} \Rightarrow \dot{v}_t = \frac{\mu_D}{R} v_t^2$$

→ Eq. diff. non lineare a variabili separabili!



• $\vec{A}$: attrito dinamico

$$\vec{A} = \mu_0 N \vec{e}_t$$

$\vec{N}$: forza normale

$$\vec{N} = N \vec{e}_c, N > 0$$

► L'attrito agisce lungo la superficie di contatto $\equiv$ agisce tangenzialmente.

► Il suo modulo è pari a $\mu_0 N$.

Equazioni del moto:

$$M \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} = MR\ddot{\theta} \vec{e}_t + MR\dot{\theta}^2 \vec{e}_c$$

$$= \mu_0 N \vec{e}_t + N \vec{e}_c$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \mu_0 N = MR\ddot{\theta} \\ N = MR\dot{\theta}^2 \end{cases} \Rightarrow \ddot{\theta} = \frac{\mu_0 N}{MR}$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} = \frac{\mu_0}{MR} MR\dot{\theta}^2 = \mu_0 \dot{\theta}^2$$

Da cui:

$$a_t = R\ddot{\theta}, \quad v_t = R\dot{\theta}$$

$$\Rightarrow \left[a_t = \mu_0 \frac{v_t^2}{R} \right] \quad \text{Risposta}$$

Impulso tra B e C.

$$\text{Impulso} = \Delta p = m v_t(t_c) - m v_t(t_B)$$

~~AM~~

$$= m \left(- \frac{1}{\frac{1}{V_A} + \frac{\mu_D}{R} (t_c - t_B)} + \frac{1}{\frac{1}{V_A} + \frac{\mu_D}{R} (t_B - t_B)} \right)$$

$$= m \left(- \frac{1}{\frac{1}{V_A} + \frac{\mu_D}{R} (t_c - t_B)} + V_A \right)$$