Corso di recupero di Fisica
2018/2019

Dario Madeo

Lezione del 24/05/2019

madeo@dii.unisi.it

Equazioni differenziali del primo ordine e equazioni del moto.

Un'equazione del moto è un'equazione che descrive il moto di un sistema fisico.
In generale, un'equazione del moto si ottiene utilizzando il secondo principio della dinamica (2ª legge di Newton).
Nel caso di moto monodimensionale, si ha che:

$$m\ddot{x} = F(x, \dot{x}, t) \quad , \quad m > 0$$

La forza F agente sul corpo di massa m può in generale dipendere dalla ~~spazio~~ posizione x, dalla velocità $\dot{x}$ e dal tempo t.

Similmente, per sistemi rotanti si ha che:

$$I\ddot{\theta} = \tau(\theta, \dot{\theta}, t) \quad , \quad I > 0$$

Il momento τ agente sul corpo con momento di inerzia I può in generale dipendere ~~dalla~~ dalla posizione θ, dalla velocità angolare $\dot{\theta}$ e del tempo t.

Se non vi è dipendenza dalla posizione, si ha che:

$$m\ddot{x} = F(\dot{x}, t)$$

e

$$I\ddot{\theta} = \tau(\dot{\theta}, t)$$

Analogamente:

$$m\dot{v} = F(v,t)$$

e

$$I\dot{\omega} = \tau(\omega,t)$$

Le precedenti equazioni del moto sono del <u>primo ordine</u>, in quanto le derivate delle variabile di stato (v e ω) con grado massimo è di grado 1 ($\dot{v}$ e $\dot{\omega}$).

Se l'equazione del moto non dipende esplicitamente da t, si dice che il sistema è <u>autonomo</u>.

$$m\dot{v} = F(v)$$

e

$$I\dot{\omega} = \tau(\omega)$$

Altrimenti, il sistema si dice <u>non autonomo</u>.

Data una condizione iniziale

$$V(t_0) = V_0$$

e

$$\omega(t_0) = \omega_0$$

è possibile trovare un'unica soluzione alle equazioni differenziali.* Tale soluzione si chiama "legge oraria".

La coppia equazione differenziale + cond. iniziale prende il nome di "problema di Cauchy*.

---

* Le ipotesi per l'esistenza e l'unicità della soluzione di un problema di Cauchy sono ~~generalm~~ sempre soddisfatte nei problemi di fisica proposti.

EXTRA

Si consideri
$$\begin{cases} m\dot{v} = F(v,t) \\ v(t_0) = v_0 \end{cases}$$
(N.B. lo stesso vale per $\begin{cases} I\dot{\omega} = F(\omega,t) \\ \omega(t_0) = \omega_0 \end{cases}$)

Sia $F(v,t) = A(v) \cdot B(t)$.
In tal caso, si dice che l'equazione differenziale è a variabili separabili.

La legge oraria si ottiene risolvendo i seguenti integrali:
$$\int_{v(t_0)}^{v(t)} \frac{m\,dv}{A(v)} = \int_{t_0}^{t} B(s)\,ds$$
ed esplicitando $v(t)$.

Se l'equazione è autonoma, allora è sempre vero che è a variabili separabili (si ponga $B(t) = 1$).

Esempio
$$\begin{cases} m\dot{v} = -\lambda v + q \\ v(0) = 0 \end{cases}$$
$A(v) = -\lambda v + q$
$B(t) = 1$

$$\int_{v(0)}^{v(t)} \frac{m\,dv}{-\lambda v + q} = \int_0^t 1 \cdot ds$$

$$-\frac{m}{\lambda}\left[\log(q - \lambda v)\right]_0^{v(t)} = t$$

$$\log(q - \lambda v(t)) - \log(q) = -\frac{\lambda}{m} t$$

$$\log \frac{g - \lambda v(t)}{g} = -\frac{\lambda}{m} t$$

$$\frac{g - \lambda v(t)}{g} = e^{-\frac{\lambda}{m} t}$$

$$g - \lambda v(t) = g\, e^{-\frac{\lambda}{m} t}$$

$$\boxed{v(t) = \frac{g}{\lambda}\left(1 - e^{-\frac{\lambda}{m} t}\right)}$$

<u>Legge oraria</u>

Caso lineare

Si suppenga che:

$$F(v,t) = -\lambda v + G(t).$$

e

$$\tau(\omega,t) = -\lambda\omega + G(t)$$

Le equazioni del moto si riscrivono come segue:

$$m\dot{v} + \lambda v = G(t)$$

e

$$I\dot{\omega} + \lambda\omega = G(t)$$

Se $G(t)=0$, l'equazione si dice <u>omogenea</u>. Altrimenti, il sistema è <u>non omogeneo</u>.

La parte $m\dot{v}+\lambda v$ $(I\dot{\omega}+\lambda\omega)$ si dice "<u>parte omogenea</u>" anche quando $G(t)\neq 0$.

La parte omogenea $m\dot{v}+\lambda v$ $(I\dot{\omega}+\lambda\omega)$ ha la proprietà di essere <u>lineare</u>.

Cosa significa lineare?

Si supponga che $v_1(t)$ e $v_2(t)$ ($\omega_1(t)$ e $\omega_2(t)$) siano soluzioni (leggi orarie) dell'equazione
$m\dot{v} + \lambda v = 0$ ($I\dot{\omega} + \lambda\omega = 0$).

Ovvero:

$$m\dot{v}_1 + \lambda v_1 = 0 \qquad \left(I\dot{\omega}_1 + \lambda\omega_1 = 0\right.$$
$$m\dot{v}_2 + \lambda v_2 = 0 \qquad \left.I\dot{\omega}_2 + \lambda\omega_2 = 0\right)$$

Si considerino 2 valori reali qualsiasi, a e b.

Sia $v_3 = av_1 + bv_2$ ($\omega_3 = a\omega_1 + b\omega_2$).

Si ha che v_3 (ω_3) è ancora soluzione del problema di partenza. Infatti:

$$\begin{aligned}
m\dot{v}_3 + \lambda v_3 &= m(a\dot{v}_1 + b\dot{v}_2) + \lambda(av_1 + bv_2) \\
&= a(m\dot{v}_1 + \lambda v_1) + b(m\dot{v}_2 + \lambda v_2) \\
&= a \cdot 0 + b \cdot 0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

(Idem per ω_3).

Equazioni differenziali lineari omogenee del primo ordine

$$\begin{cases} m\dot{v} + \lambda v = 0 & m > 0 \\ v(t_0) = v_0 \end{cases}$$

Procedura risolutiva

1) Si crea il polinomio caratteristico.
Sia $D \in \mathbb{C}$. Sostituiamo D^k alle derivate di ordine k di v, con la convenzione che la derivata di ordine $k=0$ corrisponde alla funzione v.

$$m\dot{v} + \lambda v = 0 \implies mD' + \lambda D^0 = 0$$
$$mD + \lambda = 0$$

2) Calcolo gli zeri di tale polinomio.

$$mD + \lambda = 0 \implies D_1 = -\frac{\lambda}{m}.$$

3) La soluzione è nella forma

$$v(t) = A e^{D_1 t} \quad \text{con } A \in \mathbb{R}.$$

4) A si determina usando la condizione iniziale.

$$v(t_0) = A e^{D_1 t_0} = v_0 \implies A = v_0 e^{-D_1 t_0}$$

$$\implies v(t) = v_0 e^{-D_1 t_0} e^{D_1 t} = v_0 e^{D_1(t - t_0)}.$$

EXTRA

Un caso notevole è dato da $m>0$, $\lambda=0$.

$$\begin{cases} m\dot{v}=0 \\ v(t_0)=v_0 \end{cases}$$

Polinomio caratteristico: $mD=0$

Zeri del polinomio caratteristico: $D_1=0$

Soluzione: $v(t)=Ae^{D_1 t}=Ae^{0\cdot t}=A$.

$$v(t_0)=A=v_0$$

$$\Rightarrow \boxed{v(t)=v_0}$$

Commento

Questo risultato ci riporta al primo principio della dinamica.
Infatti, essendo nulle le forze agenti sul corpo ($m\dot{v}=0$), esso rimane nel suo stato di moto rettilineo uniforme (o di quiete, se $v_0=0$).

Caso non omogeneo $(G(t) \neq 0)$

$$m\dot{v} + \lambda v = G(t)$$

Supponiamo che v_1 soddisfi la precedente equazione, ovvero:

$$m\dot{v}_1 + \lambda v_1 = G(t).$$

Supponiamo inoltre che v_0 soddisfi la seguente equazione omogenea:

$$m\dot{v}_0 + \lambda v_0 = 0.$$

Allora $v_2 = v_0 + v_1$ soddisfa il problema non omogeneo.

Infatti:

$$\begin{aligned} m\dot{v}_2 + \lambda v_2 &= m(\dot{v}_0 + \dot{v}_1) + \lambda(v_0 + v_1) = \\ &= [m\dot{v}_0 + \lambda v_0] + [m\dot{v}_1 + \lambda v_1] = \\ &= 0 + G(t) \\ &= G(t). \end{aligned}$$

Per risolvere una non omogenea, devo cercare:

- una soluzione v_0 per il caso omogeneo;
- una soluzione v_1, detta "particolare", per il caso non omogeneo.

Si consideri:

$$m\dot{v} + \lambda v = a + bt$$

Per annullare $a+bt$, applico 2 volte $\frac{d}{dt}$:

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(m\dot{v} + \lambda v\right) = \frac{d^2}{dt^2}\left(a + bt\right)$$

$$m\dddot{v} + \lambda \ddot{v} = 0$$

$$mD^3 + \lambda D^2 = 0$$

$$D_1 = e^{-\frac{\lambda}{m}}$$

$$D_2 = 0$$

$$D_3 = 0$$

Qual'è la soluzione?

Idea dietro il metodo risolutivo

Si consideri:

$$m\dot{v} + \lambda v = a \,.$$

Vorrei trasformarla in un'equazione omogenea.
Se derivo entrambi i membri rispetto a t, ottengo che:

$$\frac{d}{dt}(m\dot{v} + \lambda v) = \frac{d}{dt}a$$

$$m\ddot{v} + \lambda\dot{v} = 0 \quad \leftarrow \text{omogenea!}$$

Polinomio caratteristico "esteso": $mD^2 + \lambda D = 0$
Zeri del p.c. e : $D_1 = -\frac{\lambda}{m}$, $D_2 = 0$.
Soluzione: $v(t) = Ae^{D_1 t} + Be^{D_2 t}$
$$= Ae^{-\frac{\lambda}{m}t} + B \,.$$

$\Rightarrow$ Estendo l'equazione per renderla omogenea.
$\Rightarrow$ Estendo il polinomio caratteristico e le sue soluzioni.

$D_1 = -\frac{\lambda}{m}$ è la soluzione del polinomio caratteristico dell'equazione omogenea.

$D_2 = 0$ "nasce" dal polinomio esteso.

Per trovare la soluzione, la seguente tabella ci viene in aiuto.

Termini in $G(t)$ *	Zeri del polinomio caratteristico esteso
1	0
t	$0, 0$
t^n	$\underbrace{0, 0 \dots 0}_{n+1}$
e^{pt}	p
$t e^{pt}$	p, p
$t^n e^{pt}$	$\underbrace{p, p \dots p}_{n+1}$

Nel caso precedente, la soluzione è:

$$v(t) = \underbrace{A e^{-\frac{\lambda}{m} t}}_{\Downarrow} + \underbrace{B + Ct}_{\Downarrow}$$

Da D_1, parte omogenea

Da $D_2 = D_3 = 0$ parte non omogenea.

---

* $G(t)$ è una combinazione lineare dei termini riportati nella tabella.

EXTRA

Perché le tabelle precedente funziona?

1) $$m\dot{v} + \lambda v = t^n$$

Applico la derivata nel tempo $n+1$ volte:

$$\frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}}(m\dot{v} + \lambda v) = \frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}} t^n$$

$$m\, v^{(n+2)} + \lambda v^{(n+1)} = 0$$

Polinomio caratteristico esteso:

$$m D^{n+2} + \lambda D^{n+1} = 0$$

$$D^{n+1}(mD + \lambda) = 0$$

Zeri relativi al polinomio caratteristico della parte omogenea

$\Rightarrow$ Ottengo $\boxed{D_1 = -\frac{\lambda}{m}}$ e

Zeri relativi al polinomio caratteristico esteso, dovuti alla parte non omogenea

$D_2 = \ldots = D_{n+2} = 0$.

2) $$m\dot{v} + \lambda v = e^{pt}$$

Per annullare e^{pt}, applico la derivata prima e sottraggo p volte la funzione.

$$\left(\frac{d}{dt} - p\right)(m\dot{v} + \lambda v) = \left(\frac{d}{dt} - p\right) e^{pt}$$

$$\frac{d}{dt}(m\dot{v} + \lambda v) - p(m\dot{v} + \lambda v) = \frac{d}{dt} e^{pt} - p e^{pt}$$

$$m\ddot{v} + \lambda\dot{v} - pm\dot{v} - p\lambda v = \cancel{pe^{pt}} - \cancel{pe^{pt}} = 0$$

$$m\ddot{v} + (\lambda - pm)\dot{v} - p\lambda v = 0$$

Polinomio caratteristico esteso:

$$mD^2 + (\lambda - pm)D - p\lambda = 0$$

Soluzioni:

$$D_{1,2} = \frac{pm - \lambda \pm \sqrt{(\lambda - pm)^2 + 4p\lambda m}}{2m}$$

$$= \frac{pm - \lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - 2\lambda pm + 4p\lambda m + p^2 m^2}}{2m}$$

$$= \frac{pm - \lambda \pm \sqrt{\lambda^2 + 2p\lambda m + p^2 m^2}}{2m}$$

$$= \frac{pm - \lambda \pm \sqrt{(\lambda + pm)^2}}{2m}$$

$$= \frac{pm - \lambda \pm |\lambda + pm|}{2m}.$$

<u>NOTA</u> Se $\lambda + pm > 0$, allora $|\lambda + pm| = \lambda + pm$.

Se $\lambda + pm < 0$, allora $|\lambda + pm| = -(\lambda + pm)$.

È facile verificare che, grazie alla presenza del "$\pm$", il risultato è identico in entrambi i casi!

$$D_{1,2} = \frac{pm - \lambda \pm (\lambda + pm)}{2m}$$

$$\Rightarrow \boxed{D_1 = -\frac{\lambda}{m}}$$ Zeri relativi al polinomio caratteristico della parte omogenea

$$\boxed{D_2 = p}$$ Zeri relativi al polinomio caratteristico esteso, dovuti alla parte non omogenea

3) $m\dot{v} + \lambda v = t e^{pt}$

Notare che:

$$\left(\frac{d}{dt} - p\right)^2 e^{pt} = \left(\frac{d^2}{dt^2} - 2p\frac{d}{dt} + p^2\right) e^{pt} =$$

$$= \frac{d^2}{dt^2} e^{pt} - 2p\frac{d}{dt} e^{pt} + p^2 e^{pt} =$$

$$= p^2 e^{pt} - 2p^2 e^{pt} + p^2 e^{pt} = 0$$

In generale, se ho $t^n e^{pt}$, uso

$$\left(\frac{d}{dt} - p\right)^{n+1}.$$

Dal punto di vista del polinomio esteso, si ha che:

$$(D - p)^{n+1}(mD + \lambda) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{D_2 = \ldots = D_{n+2} = p}$$

Zeri relativi al polinomio caratteristico esteso, dovuti alla parte non omogenea

$$\Downarrow$$

$$\boxed{D_1 = -\frac{\lambda}{m}}$$

Zeri relativi al polinomio caratteristico della parte omogenea

EXTRA

Si consideri:

$$\begin{cases} m\dot{v} = F \\ v(t_0) = v_0 \end{cases} \qquad (\lambda = 0)$$

Polinomio caratteristico parte omogenea: $mD = 0$

Soluzioni: $D_1 = 0$

Equazione estesa:

$$\frac{d}{dt} m\dot{v} = \frac{d}{dt} F$$

$$m\ddot{v} = 0$$

Polinomio caratteristico: $mD^2 = 0$

Soluzioni: $D_1 = 0$, $D_2 = 0$

$$\Rightarrow \boxed{v(t) = A + Bt}$$

Commento

In questo caso, si ottiene la legge oraria tipica del moto uniformemente accelerato. Infatti, la forza che agisce sul sistema è costante.

Note

- I coefficienti relativi agli zeri del polinomio caratteristico ottenuto dalla parte omogenea, si determinano usando le condizioni iniziali.
- I coefficienti relativi agli zeri "in più", ottenuti dal polinomio caratteristico esteso, si determinano sostituendo la soluzione nell'equazione differenziale.

Esempio

$$\begin{cases} m\dot{v} = F \\ v(t_0) = v_0 \end{cases}$$

$$v(t) = A + Bt$$

$$\dot{v}(t) = B$$

Sostituisco:

$$mB = F \Rightarrow B = \frac{F}{m}$$

$$\boxed{\frac{F}{m} = acc.}$$

$$v(t) = A + \frac{F}{m} t$$

$$v(t_0) = v_0 = A + \frac{F}{m} t_0$$

$$\Rightarrow A = v_0 - \frac{F}{m} t_0$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} v(t) &= v_0 - \frac{F}{m} t_0 + \frac{F}{m} t \\ &= v_0 + \frac{F}{m}(t - t_0) \end{aligned}}$$

legge oraria moto uniformemente accelerato.

Un esempio pratico

Consideriamo un corpo di massa m.
Viene lanciato verticalmente con velocità iniziale $v_0 > 0$.
Il corpo è soggetto alla forza peso e alla forza di attrito causata dall'aria.

Equazione del moto (lungo y):

$$m\ddot{y} = -\beta\dot{y} - mg$$

Sia $v = \dot{y}$:

$$\boxed{m\dot{v} = -\beta v - mg}$$

Risoluzione

1) Cerco una soluzione per la parte omogenea.

$$\Rightarrow m\dot{v} + \beta v = 0$$

Polinomio caratteristico:

$$mD + \beta = 0 \Rightarrow D_1 = -\frac{\beta}{m}.$$

2) Data la presenza di un termine costante $(-mg)$, so che devo aggiungere un modo alla soluzione, che corrisponde a $D_2 = 0$.

$$D_1 = -\frac{\beta}{m}$$

$$D_2 = 0$$

$$v(t) = Ae^{-\frac{\beta}{m}t} + Be^{0t}$$

$$= \underbrace{A}e^{-\frac{\beta}{m}t} + \underbrace{B}.$$

$$A, B \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} m\dot{v} = -\beta v - mg \\ v(0) = v_0 \end{cases}$$

Soluzione generica: $v(t) = Ae^{-\frac{\beta}{m}t} + B$

$$\dot{v}(t) = -A\frac{\beta}{m}e^{-\frac{\beta}{m}t}$$

Sostituisco la soluzione generica nell'equazione del moto.

$$m\left(-\frac{A\beta}{m}e^{-\frac{\beta}{m}t}\right) = -\beta\left(Ae^{-\frac{\beta}{m}t} + B\right) - mg$$

$$\cancel{-\beta A e^{-\frac{\beta}{m}t}} = \cancel{-\beta A e^{-\frac{\beta}{m}t}} - \beta B - mg$$

$$0 = -\beta B - mg$$

$$\beta B = -mg$$

$$\boxed{B = -\frac{mg}{\beta}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v(t) = Ae^{-\frac{\beta}{m}t} - \frac{mg}{\beta} \\ v(0) = 0 \end{cases}$$

$$v(0) = A e^{-\frac{\beta}{m} 0} - \frac{mg}{\beta} = 0$$

$$A - \frac{mg}{\beta} = 0$$

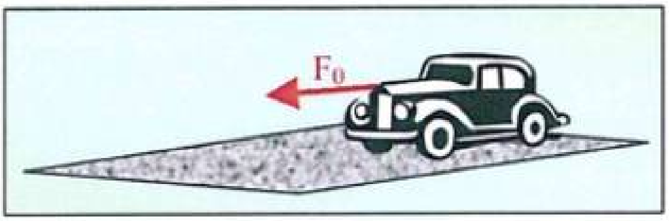
$$\boxed{A = \frac{mg}{\beta}}$$

$$v(t) = \frac{mg}{\beta} e^{-\frac{\beta}{m} t} - \frac{mg}{\beta}$$

legge oraria

Esercizio estratto dall'esame di Fisica 1 del 19 Luglio 2004

Esercizio 1



Un veicolo di massa m si muove orizzontalmente senza incontrare altri attriti oltre a quello con l'aria, il quale è di tipo viscoso ed è descritto dall'espressione **F**(v)=-γ**v**, dove **F** è la forza, **v** la velocità e γ una costante assegnata. Al veicolo, che inizialmente è fermo, viene applicata per un tempo Δt una forza costante F_0 diretta orizzontalmente, che poi viene rimossa.

a) Scrivere le equazioni del moto valide prima e dopo la rimozione della forza; ✓
b) Determinare le leggi orarie della velocità valide per $0<t<\Delta t$ e per $t>\Delta t$;
c) Calcolare il lavoro svolto dalla forza applicata;
d) Determinare lo spostamento complessivo del corpo, dopo un tempo indefinitamente lungo.

FASE 1 $\quad 0 < t \le \Delta t$

$$\begin{cases} M\dot{v} = -\gamma v + F_0 \\ v(0) = 0 \end{cases}$$

lineare non omo-autonoma

FASE 2 $\quad t > \Delta t$

$$\begin{cases} M\dot{v} = -\gamma v \\ v(\Delta t) = ? \end{cases}$$

Leggi orarie

FASE 1

$$D_1 = -\frac{\gamma}{M} \quad \text{(viene dal P.C. } MD+\gamma=0\text{)}$$

$$D_2 = 0 \quad \text{(viene dalla parte non omo)}$$

$$\boxed{v(t) = Ae^{-\frac{\gamma}{M}t} + B}$$

$$\dot{v}(t) = -\frac{A\gamma}{M}e^{-\frac{\gamma}{M}t}$$

Sostituisco v e $\dot{v}$ nell'equazione del moto

$$M\left(-\frac{A\gamma}{M}e^{-\frac{\gamma}{M}t}\right) = -\gamma\left(Ae^{-\frac{\gamma}{M}t}+B\right)+F_0$$

$$\cancel{-A\gamma e^{-\frac{\gamma}{M}t}} = \cancel{-A\gamma e^{-\frac{\gamma}{M}t}} - \gamma B + F_0$$

$$\gamma B = F_0 \Rightarrow \boxed{B = \frac{F_0}{\gamma}}$$

$$\boxed{v(t) = Ae^{-\frac{\gamma}{M}t} + \frac{F_0}{\gamma}}$$

$v(0) = 0$

$$Ae^{-\frac{\gamma}{M}0} + \frac{F_0}{\gamma} = 0$$

$$A + \frac{F_0}{\gamma} = 0$$

$$\boxed{A = -\frac{F_0}{\gamma}}$$

$$v(t) = -\frac{F_0}{\gamma} e^{-\frac{\gamma}{M}t} + \frac{F_0}{\gamma}$$

velocità nella prima fase.

$$= \boxed{\frac{F_0}{\gamma}\left(1 - e^{-\frac{\gamma}{M}t}\right)}$$

$$v(\Delta t) = \frac{F_0}{\gamma}\left(1 - e^{-\frac{\gamma}{M}\Delta t}\right) = V_1 .$$

FASE 2

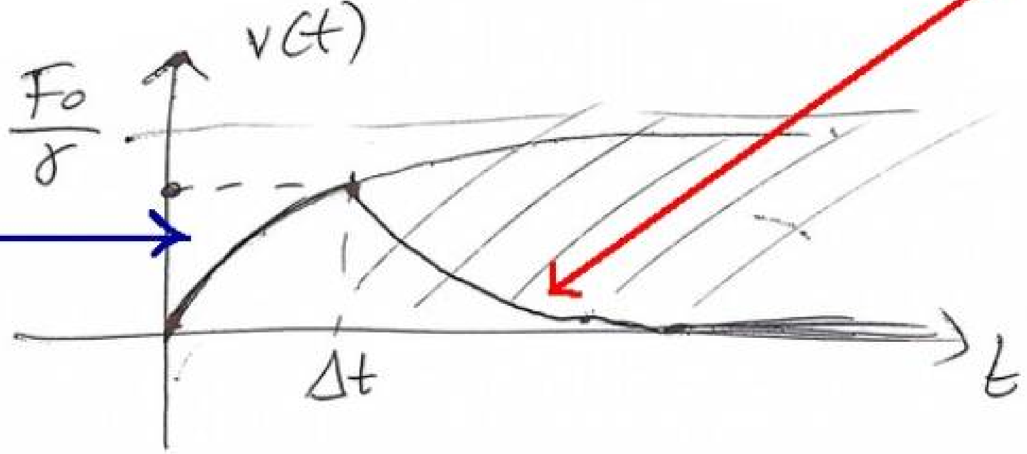
$$\begin{cases} M\dot{v} = -\gamma v \\ v(\Delta t) = V_1 \end{cases}$$

$$v(t) = A e^{-\frac{\gamma}{M}t} \qquad A \in \mathbb{R}$$

$$v(\Delta t) = A e^{-\frac{\gamma}{M}\Delta t} = V_1$$

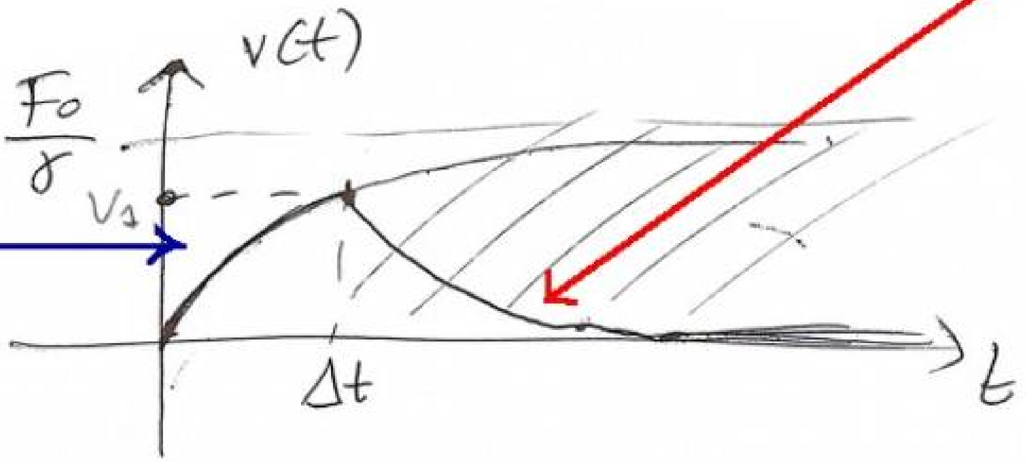
$$\Rightarrow A = V_1 e^{\frac{\gamma}{M}\Delta t}$$

$$v(t) = V_1 e^{\frac{\gamma}{M}\Delta t} e^{-\frac{\gamma}{M}t} = \boxed{V_1 e^{-\frac{\gamma}{M}(t-\Delta t)} .}$$



$$v(t) = \begin{cases} \frac{F_0}{\gamma}\left(1 - e^{-\frac{\gamma}{M}t}\right) & 0 \le t \le \Delta t \\ V_1 \, e^{-\frac{\gamma}{M}(t-\Delta t)} & t > \Delta t \end{cases}$$

con $V_1 = \frac{F_0}{\gamma}\left(1 - e^{-\frac{\gamma}{M}\Delta t}\right)$



In questa fase, l'auto accelera ma al contempo subisce la frenata dell'aria.
La sua velocità cresce.

In questa fase, l'auto non accelera più. Essa è solo frenata dall'aria. Asintoticamente, l'auto si ferma.

NOTA

Se l'autista avesse continuato ad accelerare imprimendo una forza costante F_0, asintoticamente la velocità sarebbe stata pari a F_0 / γ.

Che lavoro ha compiuto la forza $\vec{F}$?

$$W = \int_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

Γ: percorso

$d\vec{s}$: spostamento infinitesimo

$$d\vec{s} = \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix}$$

Nel nostro caso:

$$\vec{F} = \begin{bmatrix} F_0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{F} \cdot d\vec{s} = F_0 dx + 0 \cdot dy + 0 dz = $$
$$= F_0 dx$$

Quindi:

$$W = \int_\Gamma F_0 dx$$

F_0 non dipende da x (è costante). Per cui:

$$W = F_0 \int_\Gamma dx$$

$\int_\Gamma dx = \Delta x \equiv$ spazio percorso!

(nell'intervallo $0 \leq t \leq \Delta t$)

$$\Delta x = \int_0^{\Delta t} v(t)\,dt =$$

$$= \int_0^{\Delta t} \frac{F_0}{\gamma}\left(1 - e^{-\frac{\gamma}{M}t}\right)dt$$

$$= \int_0^{\Delta t} \frac{F_0}{\gamma}\,dt - \int_0^{\Delta t} \frac{F_0}{\gamma} \cdot e^{-\frac{\gamma}{M}t}\,dt$$

$$= \frac{F_0}{\gamma}\Delta t - \frac{F_0}{\gamma}\left[\frac{e^{-\frac{\gamma}{M}t}}{-\frac{\gamma}{M}}\right]_0^{\Delta t}$$

$$= \frac{F_0}{\gamma}\Delta t - \frac{F_0}{\gamma}\left[\frac{e^{-\frac{\gamma}{M}\Delta t} - 1}{-\frac{\gamma}{M}}\right]$$

$$= \boxed{\frac{F_0}{\gamma}\Delta t + \frac{F_0 M}{\gamma^2}\left(e^{-\frac{\gamma}{M}\Delta t} - 1\right)}$$

$$W = F_0 \Delta x =$$

$$= \frac{F_0^2 \Delta t}{\gamma} + \frac{F_0^2 M}{\gamma^2}\left(e^{-\frac{\gamma}{M}\Delta t} - 1\right).$$

$$\Delta x_2 = \int_{\Delta t}^{+\infty} v(t)\, dt$$

Spostamento fase 2

$$= \int_{\Delta t}^{+\infty} v_1 e^{-\frac{\gamma}{M}(t-\Delta t)}\, dt$$

$$= \cancel{\int_{\Delta t}^{+\infty} v_1 e^{-\frac{\gamma}{M}t}\, dt + \int_{\Delta t}^{+\infty} v_1 e^{\frac{\gamma}{M}\Delta t}\, dt}$$

$$= \int_{\Delta t}^{+\infty} \left(v_1 e^{\frac{\gamma}{M}\Delta t}\right) e^{-\frac{\gamma}{M}t}\, dt$$

$$= v_1 e^{\frac{\gamma}{M}\Delta t} \int_{\Delta t}^{+\infty} e^{-\frac{\gamma}{M}t}\, dt$$

$$= v_1 e^{\frac{\gamma}{M}\Delta t} \left[\frac{e^{-\frac{\gamma}{M}t}}{-\frac{\gamma}{M}}\right]_{\Delta t}^{+\infty}$$

$$= V_1 e^{\frac{\gamma}{M}\Delta t} \cdot \left[\frac{0 - e^{-\frac{\gamma}{M}\Delta t}}{-\frac{\gamma}{M}} \right]$$

$$= \frac{V_1 M}{\gamma} .$$

Spazio totale percorso:

$$\Delta x + \Delta x_2 = \ldots$$

Esercizio estratto dall'esame di Fisica 1 del 26 Settembre 2016

Esercizio 2

Un corpo di massa M parte da fermo e si muove strisciando lungo una traiettoria rettilinea e orizzontale. Oltre all'attrito radente descritto dai parametri μ_S e μ_D, esso subisce una forza crescente linearmente con il tempo $F(t)=\beta t$ nell'intervallo di tempo da $t=0$ a $t=t_0$. Dopo t_0, la forza F(t) cessa e al suo posto interviene un attrito di natura viscosa che si somma a quello radente ed è descritto dalla relazione $F_v=-\gamma v$. Calcolare l'energia dissipata per attrito radente fra 0 e t_0 ed il lavoro svolto dalla forza F(t). Scrivere l'equazione di moto per la velocità nella seconda fase, e determinare l'istante t_1 al quale l'oggetto si ferma.

[Per alleggerire le notazioni, si consiglia di definire qualche quantità intermedia]

FASE 1 $\quad 0 \leq t \leq t_{AS}$

$$M\dot{v} = \beta t - F_{AS} = 0$$

Sia t_{AS} : $\quad \beta t_{AS} = \max F_{AS} = \mu_S Mg$

$$\beta t_{AS} = \mu_D Mg$$

$$\boxed{t_{AS} = \frac{\mu_D Mg}{\beta}}$$

legge oraria $\quad v(t) = 0$

Perchè la legge oraria è v(t) = 0?

Si ottiene questo risultato notando che la forza netta agente sul corpo è nulla. Inoltre, il corpo è inizialmente fermo. Per esercizio, verificare che il problema di Cauchy associato, ovvero:

$$\begin{cases} M\dot{v} = 0 \\ v(0) = 0 \end{cases}$$

ha come soluzione v(t) = 0.

FASE 2

$t_{AS} < t \le t_0$

$$M\dot{v} = \beta t - \mu_D M g$$

lineare
non omogenea
non autonoma

P.C.
NON OMO

$MD = 0 \rightarrow D_1 = 0$

$-\mu_D M g \rightarrow D_2 = 0$

$\beta t \rightarrow D_3 = 0$

$\rightarrow 1, t, t^2$

$$v(t) = A + Bt + Ct^2$$

$$\dot{v}(t) = B + 2Ct$$

Sostituisco

$$M(B + 2Ct) = \beta t - \mu_D M g$$

$$MB + 2MCt = \beta t - \mu_D M g$$

$$\begin{cases} MB = -\mu_D M g \\ 2MC = \beta \end{cases} \qquad \begin{cases} B = -\mu_D g \\ C = \dfrac{\beta}{2M} \end{cases}$$

$$v(t) = A - \mu_D g\, t + \frac{\beta}{2M} t^2$$

$$v(t_{AS}) = 0$$

$$v(t_{AS}) = A - \mu_D g\, t_{AS} + \frac{\beta}{2M} t_{AS}^2 = 0$$

$$A = \mu_D g\, t_{AS} - \frac{\beta}{2M} t_{AS}^2$$

$$v(t) = \underbrace{\mu_D g\, t_{AS} - \frac{\beta}{2M} t_{AS}^2}_{A} - \mu_D g\, t + \frac{\beta}{2M} t^2$$

FASE) $t \dots$

$$M\dot{v} = -\mu_D M g - \beta v$$

lineare
non om.
autonoma

$$M\dot{v} + \beta v = 0$$ OMO

PC $\Rightarrow MD + \beta = 0$ $\qquad D_1 = -\frac{\beta}{M}$

NON OMO

$$D_2 = 0$$

$$\Rightarrow v(t) = D e^{-\frac{\beta}{M}t} + E$$

$$\dot{v}(t) = -\frac{D\beta}{M} e^{-\frac{\beta}{M}t}$$

Sostituisco

$$\cancel{-MD\frac{\beta}{M}e^{-\frac{\beta}{M}t}} = -\mu_D M g - \cancel{\beta D e^{-\frac{\beta}{M}t}} - \beta E$$

$$\beta E = -\mu_D M g$$

$$\boxed{E = -\frac{\mu_D M g}{\beta}}$$

$$v(t) = D e^{-\frac{\beta}{M}t} + \frac{\mu_0 M g}{\beta}$$

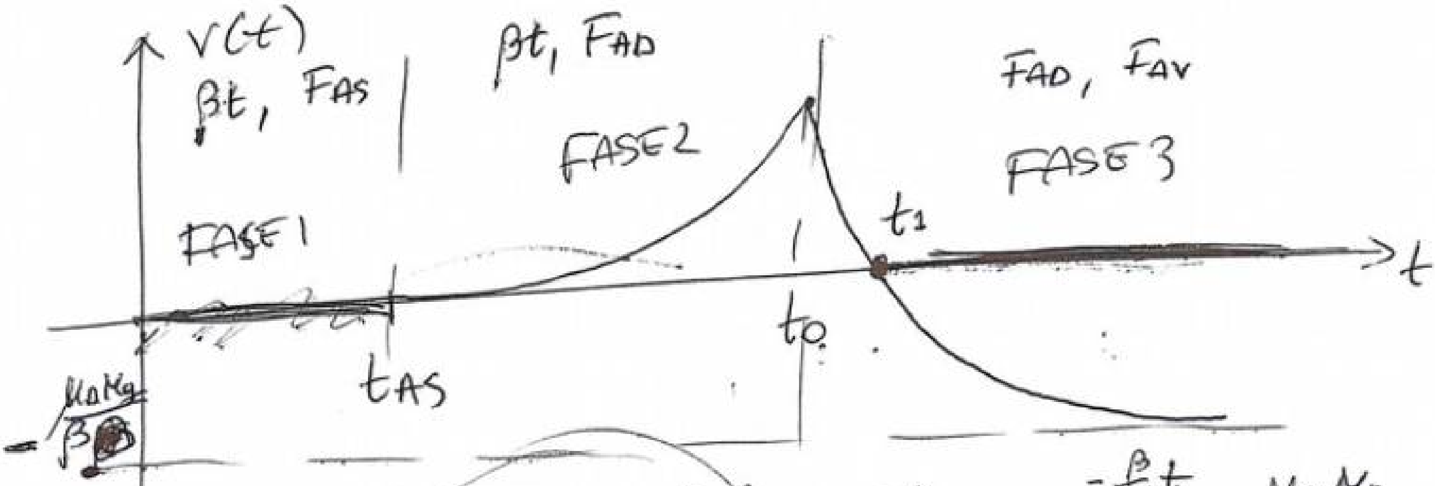
$v(t_0) = V_0$ ⇐ velocità del corpo alla fine della seconda fase.

$$v(t_0) = D e^{-\frac{\beta}{M}t_0} + \frac{\mu_0 M g}{\beta} = V_0$$

$$D = \left(V_0 - \frac{\mu_0 M g}{\beta}\right) e^{\frac{\beta}{M}t_0}.$$

Quando si ferma il corpo?

Siamo nella fase 3.



$v(t) = 0$ | $v(t) = A - \mu_D g t + \frac{\beta}{2M} t^2$ | $v(t) = D e^{-\frac{\beta}{M} t} - \frac{\mu_D M g}{\beta}$

$$v(t_1) = D e^{-\frac{\beta}{M} t_1} - \frac{\mu_D M g}{\beta} = 0$$

$$D e^{-\frac{\beta}{M} t_1} = \frac{\mu_D M g}{\beta}$$

$$e^{-\frac{\beta}{M} t_1} = \frac{\mu_D M g}{\beta D}$$

$$-\frac{\beta}{M} t_1 = \log \frac{\mu_D M g}{\beta D}$$

$$t_1 = -\frac{M}{\beta} \log \frac{\mu_0 M g}{\beta D}$$

$$= \frac{M}{\beta} \log \frac{\beta D}{\mu_0 M g}$$

$$F_{AD} = -\mu_D M g$$
$$F_{AV} = -\beta v$$

Energia diss. da F_{AD} per $t \in [0; t_0]$

o meglio da t_{AS} a t_0.

$$W = K_f - K_i$$: energia acquisita

$$K_i - K_f$$: energia bruciata

$$-W$$ è energia bruciata

$$W_{AD} = -\mu_D M g \, \Delta x$$

Calcolo analogo a quello svolto nella slide 28.

$$\Delta x = \int_{t_{AS}}^{t_0} v(t)\,dt =$$

$$= \int_{t_{AS}}^{t_0} A\,dt - \int_{t_{AS}}^{t_0} \mu_D g\, t\,dt + \int_{t_{AS}}^{t_0} \frac{\beta}{2M} t^2\,dt$$

$$= A(t_0 - t_{AS}) - \mu_D g \frac{t_0^2 - t_{AS}^2}{2} + \frac{\beta}{2M} \frac{t_0^3 - t_{AS}^3}{3}.$$

$$W_{\beta t} = \int_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

$$\vec{F} = \begin{bmatrix} \beta t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad d\vec{s} = \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow W_{\beta t} = \int_\Gamma \beta t \, dx$$

Ricordando che, $dx = v\,dt$, si ha che:

$$W_{\beta t} = \int_{t_{AS}}^{t_0} \beta t \, v dt$$

$$= \int_{t_{AS}}^{t_0} \beta t \left(A - \mu_D g t + \frac{\beta}{2M} t^2\right) dt$$

$$= \int_{t_{AS}}^{t_0} \beta A t dt - \int_{t_{AS}}^{t_0} \beta \mu_D g t^2 dt + \int_{t_{AS}}^{t_0} \frac{\beta^2}{2M} t^3 dt$$

$$= \beta A \frac{(t_0^2 - t_{AS}^2)}{2} - \beta \mu_D g \frac{(t_0^3 - t_{AS}^3)}{3} + \frac{\beta^2}{2M} \frac{t_0^4 - t_{AS}^4}{4}.$$

FASE 2

$-\mu_D Mg$

βt

Abbiamo calcolato W_{AD}

Teorema dell'energia cinetica

$$K_f - K_i = W_{AD} + W_{\beta t}$$

$$\frac{1}{2} M v^2(t_0) \quad 0 = W_{AD} + W_{\beta t}$$

$$W_{\beta t} = \frac{1}{2} M v^2(t_0) - W_{AD}$$

Sfruttando il teorema dell'energia cinetica, potevamo giungere alla soluzione del problema risolvendo solo un integrale (quello per il calcolo di W_{AD}). Per esercizio, si verifichi che le soluzioni coincidono.