

Corso di recupero di Fisica 2018/2019

Dario Madeo

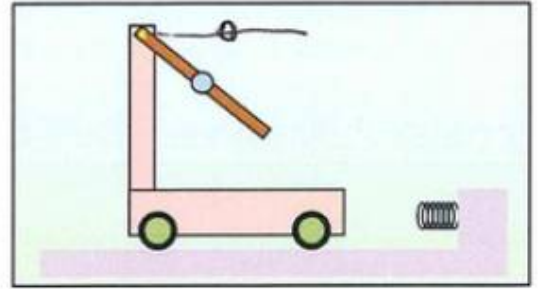


Lezione del 17/05/2019

Esercizio estratto dall'esame di Fisica 1 del 8 Febbraio 2019

Esercizio 1

La figura mostra un carrello di massa $2M$ sulla quale è applicato un pendolo fisico costituito da una sbarra sottile, omogenea, di massa M e lunghezza L impernata a un estremo, al cui centro è applicata una massa puntiforme M . Il carrello può muoversi senza attrito su un piano orizzontale. La sbarra è inizialmente ferma in posizione orizzontale, poi scende, e, quando raggiunge la verticale, il perno si libera così che la sbarretta si stacca dal carrello e cade fuori di esso. Il carrello poi procede sul piano fino ad urtare su un respingente costituito con una molla di costante elastica k . Dopo aver discusso con massima cura le quantità che si conservano nelle varie fasi del moto ed aver ben identificato tali fasi, stabilire la compressione massima del respingente.



[Nota: nello studio del moto della sbarretta, si consiglia di tener presente il 2° teorema di Koenig]

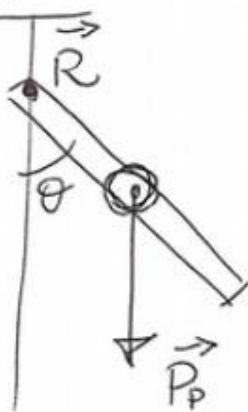
x_1, y_1 : posizione del com del pendolo

x_2, y_2 : posizione del com del carrello.

$y_2 = 0 \rightarrow$ Poiché il carrello non si muove lungo y , possiamo fissare la sua posizione a 0.

Diagramma delle forze

Pendolo

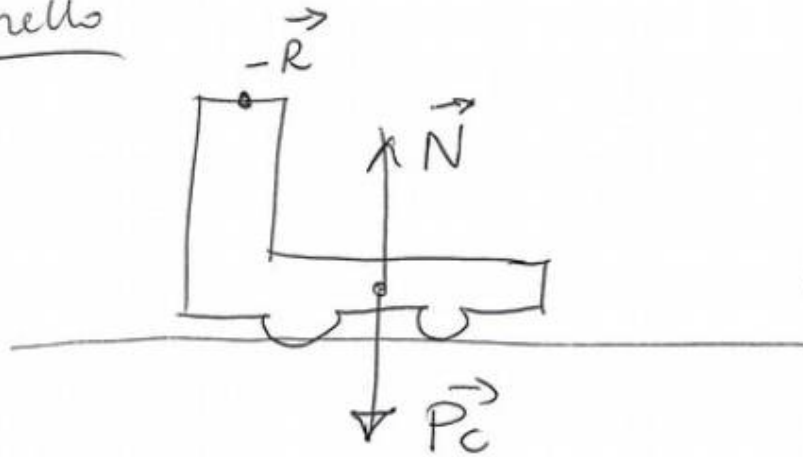


$$\vec{P}_P = \begin{bmatrix} 0 \\ -2Mg \end{bmatrix}$$

$$\vec{R} = \begin{bmatrix} R_x \\ R_y \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} R_x \in \mathbb{R} \\ R_y \in \mathbb{R} \end{matrix}$$

reazione tra carrello e pendolo che agisce sul fulcro.

Carrello



$$\vec{N} = \begin{bmatrix} 0 \\ N \end{bmatrix} \quad N > 0$$

$$\vec{P}_C = \begin{bmatrix} 0 \\ -2Mg \end{bmatrix}$$

Equazioni del moto

Pendolo

$$(x) \quad 2M \ddot{x}_2 = R_x$$

$$(y) \quad 2M \ddot{y}_2 = -2Mg + R_y \quad //$$

$$(rot) \quad I_F \ddot{\theta} = -MgL \sin \theta$$

↑
mom. di inerzia
rispetto al
fulcro

Carrello

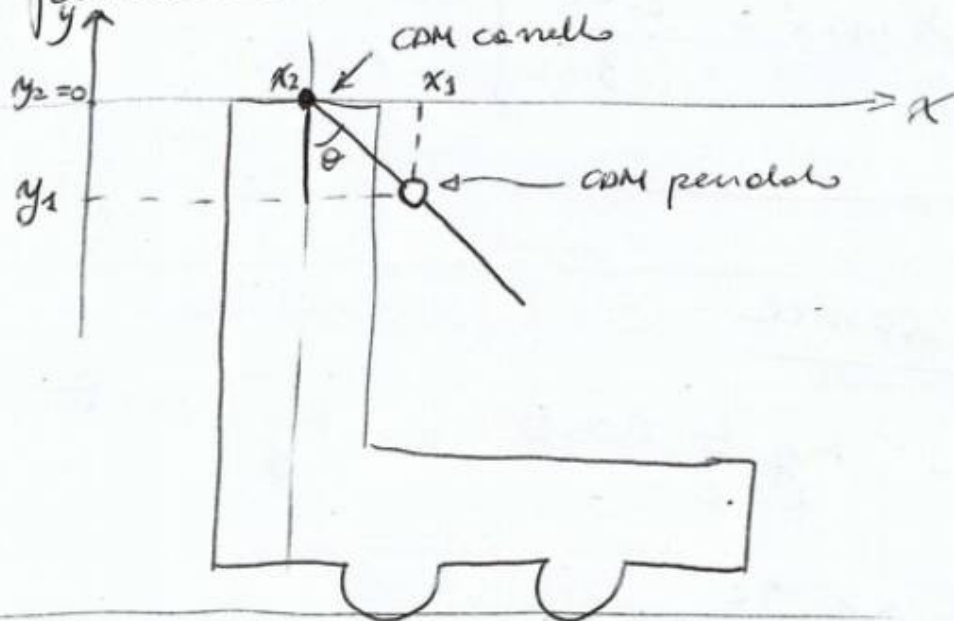
$$(x) \quad 2M \ddot{x}_2 = -R_x$$

$$(y) \quad 2M \ddot{y}_2 = -2Mg + N - R_y = 0 \quad (\ddot{y}_2 = 0)$$

↑
Il carrello non si muove lungo y!

Legame tra pendolo e carrello

Senza perdita di generalità, si suppone che il COM del carrello corrisponda con il fulcro del pendolo.



Data la posizione del COM del carrello (x_2, y_2 , con $y_2=0$), e dato l'angolo θ che il pendolo forma con la verticale, possiamo scrivere l'espressione del COM del pendolo (x_1, y_1):

$$x_1 = x_2 + \frac{L}{2} \sin \theta$$

$$y_1 = -\frac{L}{2} \cos \theta$$

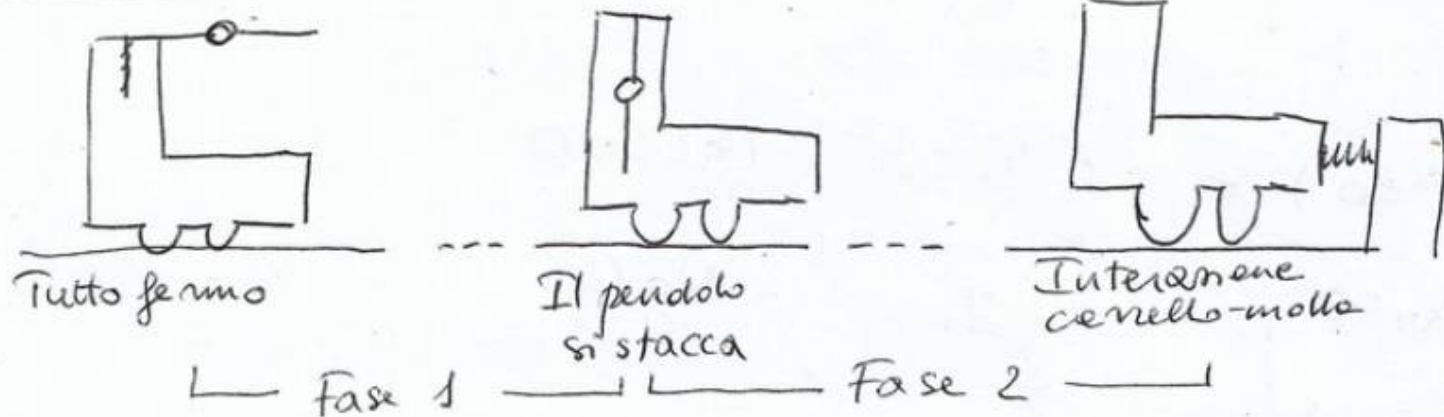
Posizione
COM
pendolo.

$$\dot{x}_1 = \dot{x}_2 + \frac{L}{2} \dot{\theta} \cos \theta$$

$$\dot{y}_1 = \frac{L}{2} \dot{\theta} \sin \theta$$

Velocità
COM
pendolo.

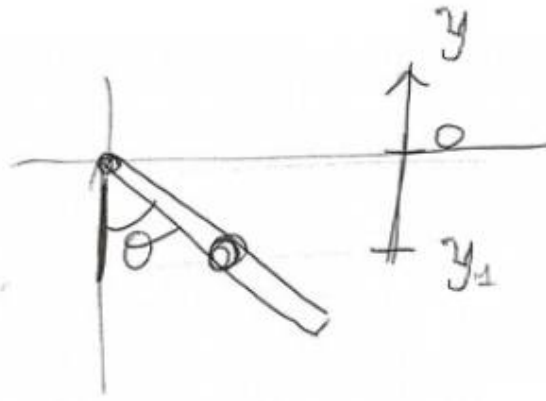
Fasi del moto



- Durante la fase 1 e la fase 2 non agiscono forze di attrito. Inoltre, ~~durante la fase 1~~ agiscono solo forze esterne conservative (gravità e molla).
 $\Rightarrow$ Durante le 2 fasi si conserva l'energia meccanica del sistema.
- Le equazioni del moto scritte in precedenza sono valide per la fase 1. Le equazioni lungo x ci dicono che in tale direzione le forze nette $\bar{F}$ è nulla.
 $\Rightarrow$ Si conserva la quantità di moto lungo x durante la fase 1.
- La presenza della gravità sul pendolo fa sì che durante la prima fase sia presente un momento torcente totale non nullo.
 $\Rightarrow$ Durante la prima fase, non si conserva il momento angolare.

Calcolo dell'energia meccanica del sistema durante la fase 1

Energia potenziale



$$U(\theta) = 2Mg y_1 = -2Mg \frac{L}{2} \cos \theta$$

Energia cinetica

$$K = K_C + K_P$$

K_C : e. cinetica del carrello

K_P : e. cinetica del pendolo

$$K_C = \frac{1}{2} 2M \dot{x}_2^2$$

K_P : lo calcolo con il II teorema di König.

Secondo Teorema di König

$$K_P = K'_P + K_{P,COM}$$

↓
e. cinetica

→ e. cinetica rispetto al COM

→ e. cinetica del COM.

Energia cinetica del centro di massa del pendolo

Corrisponde all'energia cinetica di traslazione del CDM, ovvero quella che avrebbe un corpo di massa pari a quella del pendolo, con la velocità propria del CDM.

$$K_{p\text{ COM}} = \frac{1}{2} 2M (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_1^2)$$

NOTA

$$\frac{1}{2} m \vec{v}^2 \rightarrow |\vec{v}|^2$$

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \end{bmatrix} \quad |\vec{v}|^2 = \dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2$$

$$\Delta = M \left(\dot{x}_2^2 + \underbrace{\frac{L^2 \dot{\theta}^2 \cos^2 \theta}{4}}_{\dot{x}_1^2} + \dot{x}_2 \dot{\theta} L \cos \theta + \underbrace{\frac{L^2 \dot{\theta}^2 \sin^2 \theta}{4}}_{\dot{y}_1^2} \right)$$

$$\left(\dot{x}_1 = \dot{x}_2 + \frac{L}{2} \dot{\theta} \cos \theta \right)$$

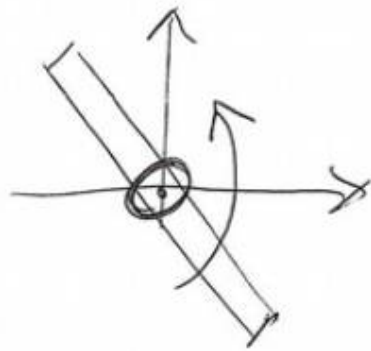
$$\dot{y}_1 = \frac{L}{2} \dot{\theta} \sin \theta$$

$$= M \left(\dot{x}_2^2 + \frac{L^2 \dot{\theta}^2}{4} + \dot{x}_2 \dot{\theta} L \cos \theta \right).$$

Energia cinetica rispetto al centro di massa del pendolo

Corrisponde all'energia cinetica rispetto ad un riferimento con origine nel CDM e assi invariabili rispetto al CDM.

In tal senso, si assume che il fulcro sia il CDM.



$\Rightarrow$ Ruoto intorno al CDM!

$$K'_P = \frac{1}{2} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{mom di} \\ \text{inerzia} \\ \text{CDM}}}{I_0} \dot{\theta}^2$$

Energia cinetica del pendolo

$$K_P = K_{PCDM} + K'_P$$

$$= M(\dot{x}_2^2) + \left(\frac{L^2 \dot{\theta}^2}{4} + \dot{x}_2 \dot{\theta} L \cos \theta \right) + \frac{1}{2} I_0 \dot{\theta}^2$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2} M \dot{x}_2^2} + \underbrace{\frac{1}{2} \left(I_0 + \frac{ML^2}{2} \right) \dot{\theta}^2}_{I_F} + \underbrace{ML \dot{x}_2 \dot{\theta} \cos \theta}$$

Da notare che:

$$I_0 = \frac{ML^2}{12}$$

(contribuisce solo l'asta!)

$$I_F = I_0 + \underbrace{(M+M)}_{\substack{\text{massa} \\ \text{dell'asta} \\ \text{sul com}}} \underbrace{\left(\frac{L}{2}\right)^2}_{\substack{\text{distanza} \\ \text{del fulcro}}} \quad (\text{Teorema di Steiner})$$

$$= \frac{ML^2}{12} + \frac{2ML^2}{4} = \frac{ML^2}{12} + \frac{ML^2}{2} = \frac{ML^2 + 6ML^2}{12} = \frac{7}{12} ML^2$$

L'energia cinetica del sistema conello-pendolo
è:

$$K = K_c + K_r$$

$$= \frac{1}{2} 4M\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2} I_F \dot{\theta}^2 + M\dot{x}_2 \dot{\theta} L \cos\theta$$

Energia meccanica:

$$E = K + U =$$

$$= \frac{1}{2} 4M\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2} I_F \dot{\theta}^2 + M\dot{x}_2 \dot{\theta} L \cos\theta - MgL \cos\theta$$

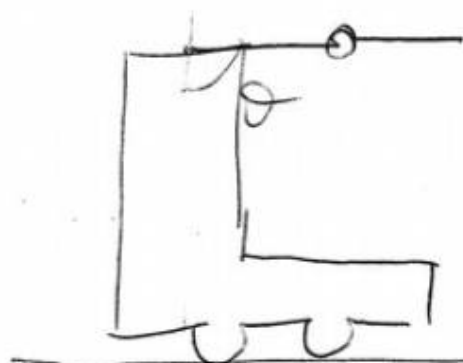
Quantità di moto lungo x

$$p = \underbrace{2M \dot{x}_2}_{\text{quantità di moto carrello}} + \underbrace{2M \dot{x}_1}_{\text{quantità di moto pendolo}}$$

$$= 2M \dot{x}_2 + 2M \left(\dot{x}_2 + \frac{L}{2} \dot{\theta} \cos \theta \right)$$

$$= 4M \dot{x}_2 + ML \dot{\theta} \cos \theta.$$

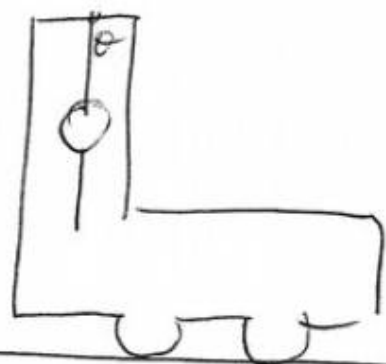
Per quali "punti" sfrutteremo la conservazione di E e di p? All'inizio e alla fine della fase 1.



$$\theta = \frac{\pi}{2}$$

$$\dot{\theta} = 0$$

$$\dot{x}_2 = 0$$



$$\theta = 0$$

$$\dot{\theta} = \omega_F \text{ (incognita)}$$

$$\dot{x}_2 = V_F \text{ (incognita)}$$

Energia meccanica per $\theta = \frac{\pi}{2}$:

$$E\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} 4M\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} I_F \dot{\theta}^2 + M \cdot 0 \cdot 0 \cdot L \cdot \cos \frac{\pi}{2} - MgL \cos \frac{\pi}{2}$$
$$= 0 + 0 + 0 - MgL \cdot 0 = 0.$$

Energia meccanica per $\theta = 0$:

$$E(0) = \frac{1}{2} 4Mv_F^2 + \frac{1}{2} I_F \omega_F^2 + Mv_F \omega_F L \cos 0 - MgL \cos 0$$
$$= 2Mv_F^2 + \frac{7}{24} ML^2 \omega_F^2 + Mv_F \omega_F L - MgL.$$

Quantità di moto lungo x per $\theta = \frac{\pi}{2}$

$$p\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4M \cdot 0 + ML \cdot 0 \cdot \cos \frac{\pi}{2}$$
$$= 0 + 0 = 0.$$

Quantità di moto lungo x per $\theta = 0$

$$p(0) = 4Mv_F + ML\omega_F \cos 0$$
$$= 4Mv_F + ML\omega_F.$$

Sia E che p si conservano!

$$\left\{ \begin{array}{l} (E) \quad 2Mv_F^2 + \frac{7}{24} ML^2 \omega_F^2 + Mv_F \omega_F L - MgL = 0 \\ (p) \quad 4Mv_F + ML\omega_F = 0 \end{array} \right.$$

Dalla seconda equazione, si trova che:

$$\boxed{W_F = -\frac{4V_F}{L}}$$

Sostituisco W_F nella prima equazione:

$$2\cancel{M}V_F^2 + \frac{7}{24}\cancel{M}\cancel{K^2}\frac{16V_F^2}{\cancel{K^2}} - \cancel{M}V_F\frac{4\cancel{V_F}K}{\cancel{K}} - MgL = 0$$

$$2V_F^2 + \frac{7 \cdot 16}{24}V_F^2 - 4V_F^2 - gL = 0$$

$$48V_F^2 + 112V_F^2 - 96V_F^2 = 24gL$$

$$64V_F^2 = 24gL$$

$$\boxed{V_F = \pm \sqrt{\frac{24gL}{64}} = \pm \sqrt{\frac{3gL}{8}}}$$

$$\Rightarrow \boxed{W_F = \mp \frac{4}{L} \sqrt{\frac{3gL}{8}}}$$

Da notare che, poiché il pendolo compie una rotazione ~~ora~~ oraria, allora il segno di W_F deve essere negativo!

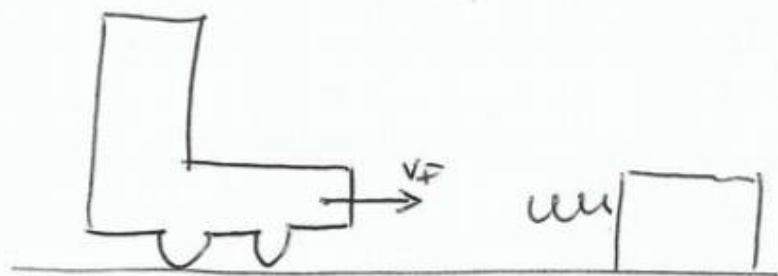
$$\Rightarrow W_F = -\frac{4}{L} \sqrt{\frac{3gL}{8}}$$

$$V_F = + \sqrt{\frac{3gL}{8}}$$

Dopo il distacco, il carrello continua a muoversi con velocità $v_F = \sqrt{\frac{3gL}{2}}$.

Tafath, nessuna forza ha agito su di esso, e pertanto non ha cambiato la sua velocità.

⇒ Il conello si muove verso le malle
con velocità costante (moto rettilineo
uniforme).



Ad un certo punto, il conello incontra le molle e le comprime. Durante questo processo, si conserva l'energia meccanica del sistema.

$$E = \frac{1}{2} 2M v_c^2 + \frac{1}{2} K x_m^2$$

↑
↑
 Velocità
del
conello
 compressione
molle.

Prima del contatto $V_C = V_F$, $x_H = 0$

Massima compressione $V_C = 0$, $x_H = x_{MAX}$

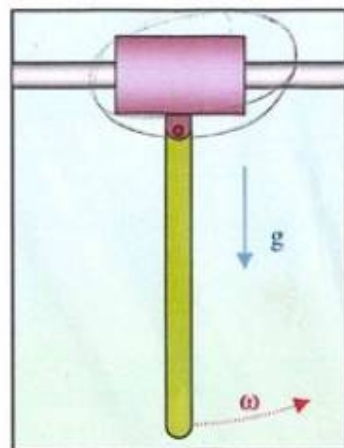
$$\Rightarrow \frac{1}{2} 2Mv_F^2 + \frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} 2Mv_0^2 + \frac{1}{2} kx_{\max}^2$$

$$M \frac{3gL}{8} = \frac{1}{2} K x_{\max}^2 \Rightarrow x_{\max} = \sqrt{\frac{3MgL}{4K}}$$

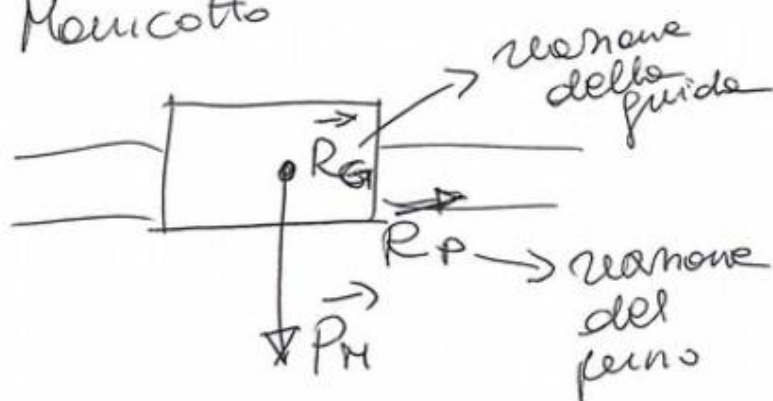
Esercizio estratto dall'esame di Fisica 1 del 3 Settembre 2015

Esercizio 2

Un manicotto di massa M è libero di scorrere lungo una guida liscia orizzontale. Al manicotto è connessa una sbarretta omogenea di lunghezza L e massa $2M$ per mezzo un perno liscio orizzontale applicato al suo estremo. Inizialmente (vd figura) il manicotto è fermo, la sbarretta è in posizione verticale e sta ruotando a velocità angolare ω . Dopo aver discusso in dettaglio le quantità che si conservano nel moto del sistema, determinare l'ampiezza angolare delle oscillazioni della sbarretta e la velocità massima assunta dal manicotto.



Manicotto

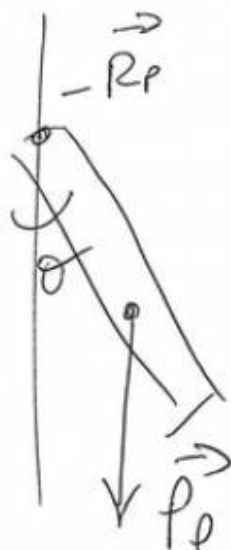


$$\vec{P}_M = \begin{bmatrix} 0 \\ -Mg \end{bmatrix}$$

$$\vec{R}_G = \begin{bmatrix} R_x \\ R_y \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} R_x \in \mathbb{R} \\ R_y \in \mathbb{R} \end{matrix}$$

$$\vec{R}_P = \begin{bmatrix} R_{Px} \\ R_{Py} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

Perno



$$\vec{P}_P = \begin{bmatrix} 0 \\ -2Mg \end{bmatrix}$$

Equazioni del moto

Meicotto

$$(x) \quad M \ddot{x}_M = R_{Gx} + R_{Px}$$

$$(y) \quad M \ddot{y}_M = -Mg + R_{Gy} + R_{Py} = 0$$

$(\ddot{y}_M = 0)$

Pendolo

$$(x) \quad 2M \ddot{x}_P = -R_{Px}$$

$$(y) \quad 2M \ddot{y}_P = -R_{Py} - 2Mg$$

$$(rot) \quad I_F \ddot{\theta} = -2Mg \frac{L}{2} \sin \theta$$

Guida

↓
agisce
-R_G

$$(x) \quad M \ddot{x}_G = -R_{Gx} = 0$$

$(\ddot{x}_G = 0)$

$$\Rightarrow \underline{R_{Gx} = 0}$$

Perche $R_{gx}=0$?

Nell'interazione tra i 2 corpi (manicotto e guida) si può instaurare la forza di reazione normale.

Tale forza agisce perpendicolarmente al contatto. In questo caso, agisce lungo y. $\Rightarrow R_{gy} \Rightarrow \odot$.

Se la guida fosse stata ruvida, allora la presenza della forza normale avrebbe generato forze d'attrito lungo x.

In questo caso, la guida è liscia, per cui:

$$\boxed{R_{gx}=0}$$

$$\vec{R}_G = \vec{N} + \vec{A}$$

$$\vec{N} = \begin{bmatrix} 0 \\ N \end{bmatrix} \quad \vec{A} = \begin{bmatrix} A \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} R_{gx} \\ R_{gy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \\ N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ N \end{bmatrix} \rightarrow \mu_s \text{ e } \mu_0 = 0!$$

Ricapitolando...

Menicotto (x) $M\ddot{x} = R\phi x$ ($R\alpha x = 0$) :

Pendolo (x) $2M\ddot{x} = -R\phi x$

Netto delle forze lungo x = 0

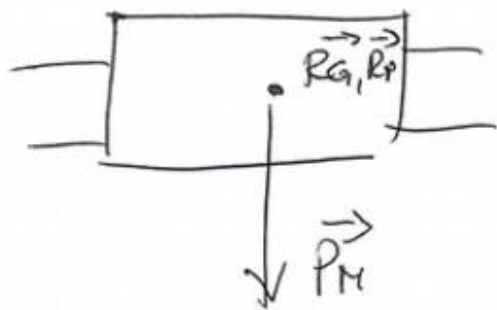
→ Si conserva la quantità di moto lungo x!

Abbiamo visto che ci sono forze che producono momento sul pendolo

⇒ Non si conserva il momento angolare!

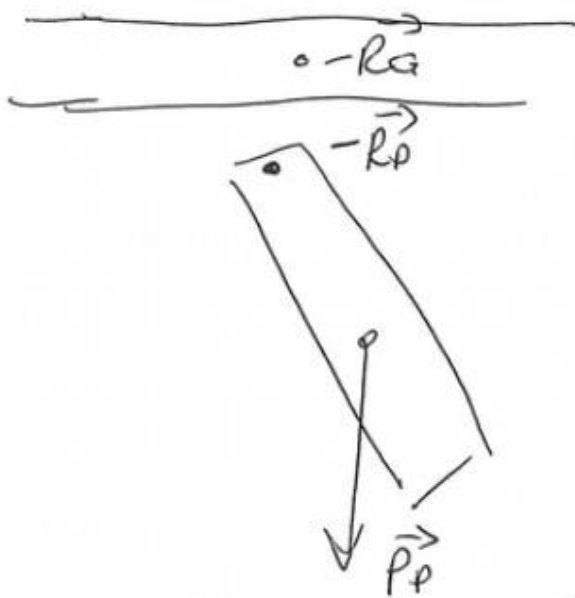
Sul sistema non agiscono forze dissipative.

⇒ Si conserva l'energia meccanica!



Queste forze
Non producono
momento.

+



Questa forza non
produce momento +

$-\vec{R}_P$ non produce
momento

$\vec{P}_P$ produce momento +

Momento $\neq 0$

→ Non si conserva mom. angolare.

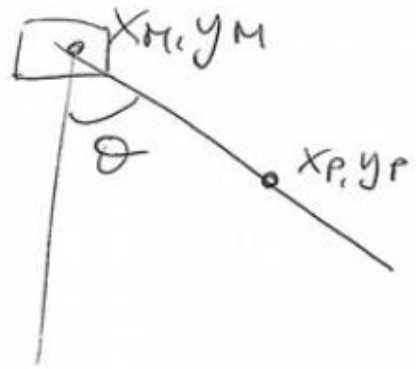
Si conserva l'energia meccanica.

Quantità di moto

$$p = M \dot{x}_M + 2M \dot{x}_P$$

$$x_P = x_M + \frac{L}{2} \sin \theta$$

$$y_P = -\frac{L}{2} \cos \theta$$



$$\dot{x}_P = \dot{x}_M + \frac{L}{2} \dot{\theta} \cos \theta$$

$$\dot{y}_P = \frac{L}{2} \dot{\theta} \sin \theta$$

x_P, y_P : posizione del CDM del pendolo
 x_M, y_M : posizione del CDM del manicotto
(assumiamo che $y_M = 0$)

$$p = M \dot{x}_M + 2M \left(\dot{x}_M + \frac{L}{2} \dot{\theta} \cos \theta \right)$$

$$= \boxed{3M \dot{x}_M} + ML \dot{\theta} \cos \theta$$

$$p(\theta=0) = 3M \cdot 0 + ML \omega \cos 0$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_M = 0 \\ \dot{\theta} = \omega \end{pmatrix} = ML \omega$$

$$p(\theta=\theta_{\max}) = 3M \dot{x}_{\max} + ML \cdot 0 \cdot \cos(\theta_{\max})$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_M = \dot{x}_{\max} \\ \dot{\theta} = 0 \end{pmatrix} = 3M \dot{x}_{\max}$$

Cons. quantità di moto:

$$ML\omega = 3M\dot{x}_{\max}$$

$$\boxed{\dot{x}_{\max} = \frac{L\omega}{3}}$$

Energia meccanica

$$U(\theta) = -2Mg \frac{L}{2} \cos\theta = -Mg L \cos\theta$$

$$K_M = \frac{1}{2} M \dot{x}_M^2$$

$$K_P = K_{PCOM} + K'_P$$

$$K_{PCOM} = \frac{1}{2} 2M (\dot{x}_P^2 + \dot{y}_P^2) = \dots$$

$$K'_P = \frac{1}{2} I_O \dot{\theta}^2 = \dots$$

$$K = K_M + K_P = K_M + K_{PCOM} + K'_P =$$

$$= \dots = \frac{1}{2} 3M \dot{x}_M^2 + \frac{1}{2} I_F \dot{\theta}^2 + ML \dot{x}_M \dot{\theta} \cos\theta$$

$$E(\theta) = \frac{1}{2} 3M\dot{x}_M^2 + \frac{1}{2} I_F \dot{\theta}^2 + MLx_M \dot{\theta} \cos \theta - MgL \cos \theta$$

$$E(\theta=0) = \frac{1}{2} I_F \omega^2 - MgL \cos 0$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_M=0 \\ \dot{\theta}=\omega \end{pmatrix} = \frac{1}{2} I_F \omega^2 - MgL$$

$$E(\theta=\theta_{\max}) = \frac{3}{2} M \dot{x}_{\max}^2 - MgL \cos \theta_{\max}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_M = \dot{x}_{\max} \\ \dot{\theta} = 0 \end{pmatrix}$$

Quando il pendolo raggiunge la sua massima ampiezza in termini di angolo, accade che:
1) la velocità angolare del pendolo è nulla;
2) la velocità del manicotto è massima.

Incongnite: $\dot{x}_{\max}$, $\theta_{\max}$

Conservazione energia:

$$\frac{1}{2} I_F \omega^2 - MgL = \frac{3}{2} M \dot{x}_{\max}^2 - MgL \cos \theta_{\max}$$

$$\dot{x}_{\max} = \frac{L\omega}{3}$$

$$\frac{1}{2} I_F \omega^2 - MgL = \frac{3}{2} M \frac{L^2 \omega^2}{9} - MgL \cos \theta_{\max}$$

$$I_F = \frac{2ML^2}{3}$$

$$\frac{ML^2 \omega^2}{3} - MgL = \frac{ML^2 \omega^2}{6} - MgL \cos \theta_{\max}$$

$$\frac{L\omega^2}{3} - g = \frac{L\omega^2}{6} - g \cos \theta_{\text{MAX}}$$

$$g \cos \theta_{\text{MAX}} = \frac{L\omega^2}{6} - \frac{L\omega^2}{3} + g$$
$$= -\frac{L\omega^2}{6} + g$$

$$\cos \theta_{\text{MAX}} = 1 - \frac{L\omega^2}{6g}$$

$$\theta_{\text{MAX}} = \arccos \left(1 - \frac{L\omega^2}{6g} \right).$$

$$\dot{x}_{\text{MAX}} = \frac{L\omega}{3}$$