Corso di recupero di Fisica 2018/2019

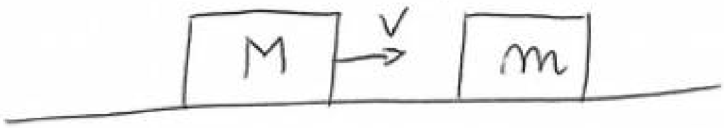
Dario Madeo

Lezione del 03/05/2019

madeo@dii.unisi.it
http://www.dii.unisi.it/~madeo/crf/crf1819.html

Urti

$v > 0$



$$\boxed{Mv = Mv_1 + mv_2}$$ (cons. q. di moto)

$$\frac{1}{2}Mv^2 = \frac{1}{2}Mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2$$ (cons. energia, solo caso elastico)

$$v_1 = v\,\frac{M-m}{M+m}$$

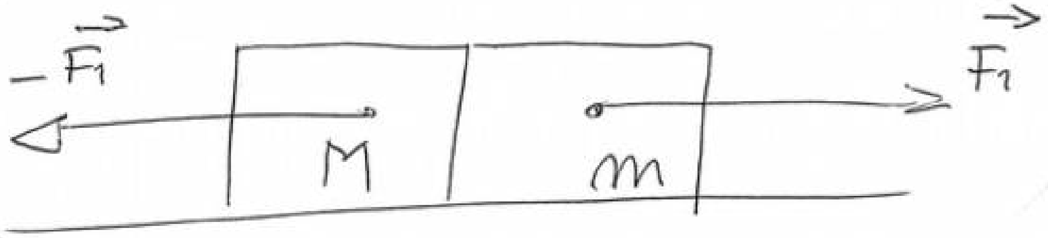
$$v_2 = \frac{2Mv}{M+m}$$

Fatti noti!!!

Cosa succede durante l'urto?

Si crea una coppia di forze del III principio di tipo impulsivo.

Durante l'urto $\quad t_u ; t_u + dt$

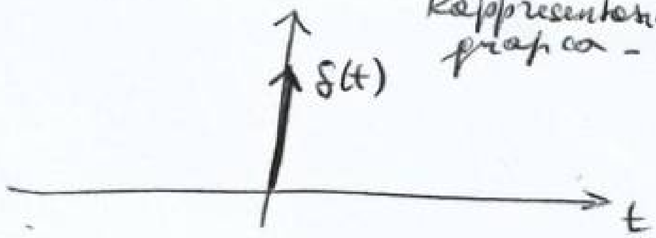


$\vec{F}_1$ e $-\vec{F}_1$ sono una coppia di forze di azione-reazione di tipo impulsivo che agiscono in un tempo infinitesimo $[t_u; t_u+dt]$ (t_u: istante dell'urto, dt: durata dell'urto)

NOTA TEORICA

Matematicamente, una forza impulsiva si descrive usando la delta di Dirac $\delta(t)$.

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & t=0 \\ \infty & t\neq 0 \end{cases}$$



Rappresentazione grafica -

Se l'urto avviene all'istante t_u, allora si usa la delta shiftata $\delta(t-t_u)$.

Di seguito, assumiamo $t_u=0$ (quindi si usa $\delta(t-0)=\delta(t)$)

La forza* si esprime come segue:

$$\vec{F_1} = \begin{bmatrix} F_1\,\delta(t) \\ 0 \end{bmatrix}$$

dove: $[F_1] = \frac{Kg\,m}{s}$, $[\delta(t)] = \frac{1}{s}$

Ricorda che: $\frac{Kg\cdot m}{s}\cdot\frac{1}{s} = N$

Proprietà della delta di Dirac

- $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\,dt = 1$ $\qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-t_u)\,dt = 1$
- $\int_{0^-}^{0^+} \delta(t)\,dt = 1$ $\qquad \int_{t_u^-}^{t_u^+} \delta(t-t_u)\,dt = 1$

---

* Vedi esempio a pagina precedente

Equazioni del moto

$$m \ddot{x}_1 = F_1 \, \delta(t)$$

$$M \ddot{x}_2 = - F_1 \, \delta(t)$$

urto @ $t = t_u = 0$:

Sfruttiamo le proprietà della delta di Dirac:

$$\int_{0^-}^{0^+} m \ddot{x}_1 \, dt = \int_{0^-}^{0^+} F_1 \, \delta(t) \, dt = F_1 \int_{0^-}^{0^+} \delta(t) \, dt = F_1 .$$

Notiamo che:

$$\int_{0^-}^{0^+} \dot{f} \, dt = f(0^+) - f(0^-) .$$

Per cui:

$$\int_{0^-}^{0^+} m \ddot{x}_1 \, dt = m \dot{x}_1(0^+) - m \dot{x}_1(0^-)$$

e quindi:

$$\underbrace{m \underbrace{\dot{x}_1(0^+)}_{\text{velocità subito dopo l'urto}}}_{\text{quantità di moto subito dopo l'urto}} - \underbrace{m \underbrace{\dot{x}_1(0^-)}_{\text{velocità subito prima dell'urto}}}_{\text{quantità di moto subito prima dell'urto.}} = F_1$$

$\Rightarrow F_1$ corrisponde alla variazione di quantità di moto del corpo di massa m causata dall'urto!

<u>Nota</u> $[F_1] = kg\,\frac{m}{s}$ ... torna dimensionalmente!

Per quanto riguarda il corpo di massa M:

$$M\dot{x}_2(0^+) - M\dot{x}_2(0^-) = -F_1$$

La variazione di quantità di moto del sistema "$m+M$" è:

$$\underbrace{\left(m\dot{x}_1(0^+) + M\dot{x}_2(0^+)\right)}_{\substack{\text{quantità di moto} \\ \text{di } m+M \\ \text{subito dopo l'urto}}} - \underbrace{\left(m\dot{x}_1(0^-) + M\dot{x}_2(0^-)\right)}_{\substack{\text{quantità di moto} \\ \text{di } m+M \\ \text{subito prima dell'urto}}} = F_1 - F_1 = 0$$

La quantità di moto non è cambiata.

$\Longrightarrow$ Conservazione della quantità di moto durante l'urto!

$$M\dot{x}_2^+ - M\dot{x}_2^- = -F_J$$

Q. di moto di M dopo

Q. di moto di M prima

Q. di moto totale del sistema

<u>DOPO</u>

PRIMA

$$m\dot{x}_1^+ + M\dot{x}_2^+ - (m\dot{x}_1^- + M\dot{x}_2^-) = \underline{F_1 - F_J} = 0$$

$$\Downarrow$$

Si conserva la quantità di moto del sistema

Cosa possiamo dire della conservazione della quantità di moto?

1) Disegno il diagramma delle forze agenti sul sys.

2) Se la somma di tutte le forze è $\vec{0}$, allora si ha conservazione della quantità di moto.*

Cosa possiamo dire della conservazione del momento angolare?

1) Disegno il diagramma delle forze agenti sul sys.

2) Individuo l'asse di rotazione.

3) Calcolo i raggi vettori che vanno dal fulcro al punto ~~delle~~ di applicazione delle forze.

4) Per ogni coppia forza - raggio, calcolo il momento torcente

$$\vec{\tau}_i = \vec{r}_i \times \vec{F}_i$$

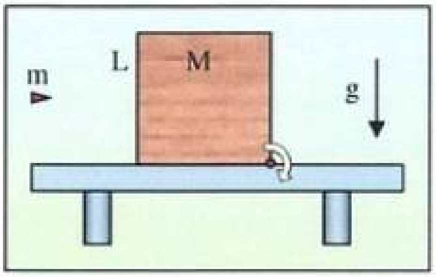
5) Se la somma di tutti i $\vec{\tau}_i$ è $\vec{0}$, allora si ha conservazione del momento angolare.**

---

* Se è 0 una componente della forza netta, allora possiamo dire che si conserva quella componente della q. di moto.

** Se è 0 una componente del momento netto, allora si conserva quella componente del momento angolare.

Esercizio estratto dall'esame di Fisica 1 del 9 Settembre 2016



Esercizio 1

Un cubo omogeneo di massa M e lato L poggia con una faccia su un piano orizzontale ed è fermo. Esso può ruotare intorno a uno degli spigoli appoggiati sul piano, che è fisso. Un proiettile di massa m (con m<<M) giunge con velocità $\underline{\mathbf{v}}_0$ perpendicolare alla faccia opposta a quella soprastante il fulcro e si conficca nel suo centro.

a) Discutere quali quantità si conservano durante l'urto e dopo l'urto.

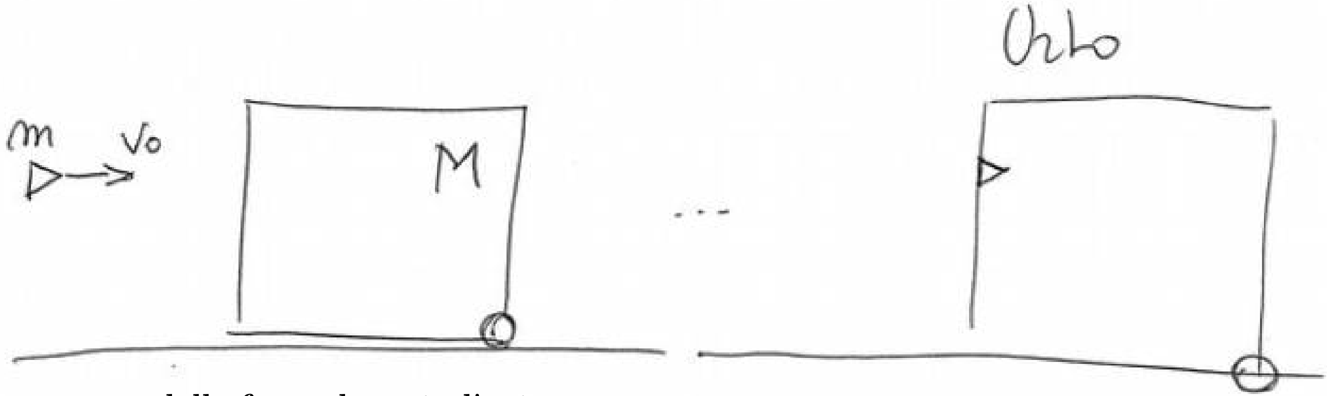
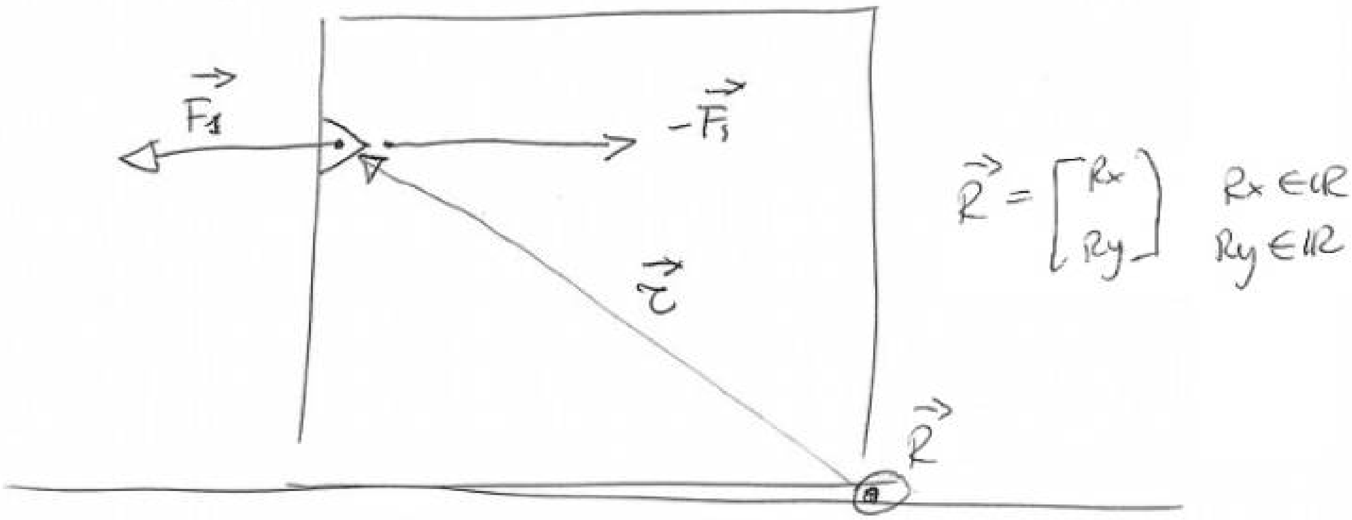


Diagramma delle forze <u>durante l'urto</u>

* $\vec{F}_1$ e $-\vec{F}_1$: coppia di forze di azione-reazione impulsive che si generano per l'urto tra proiettile e cubo.

* $\vec{R}$: forza di reazione che subisce il cubo a causa dell'interazione con il pavimento. Ovviamente, sul pavimento si genera una forza $-\vec{R}$. Tuttavia, il sistema in esame è formato da proiettile e cubo, quindi tale forza non viene considerata.



Forza totale agente sul sistema proiettile+cubo <u>**durante l'urto**</u>**:**

$$\vec{F}_{TOT} = \vec{F}_1 - \vec{F}_1 + \vec{R} = \vec{R} \neq \vec{0}$$

$\Longrightarrow$ Non si conserva la quantità di moto.

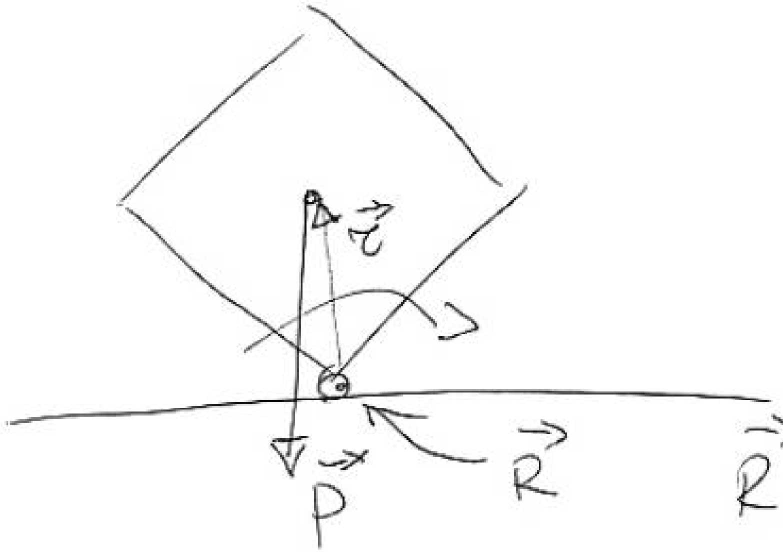
Momento torcente totale agente sul sistema proiettile+cubo **<u>durante l'urto</u>:**

$$\vec{\tau}_{TOT} = \vec{r} \times \vec{F_1} + \vec{r} \times (-\vec{F_1}) + \vec{0} \times \vec{F_2}$$

$$= \vec{r} \times \vec{F_1} - \vec{r} \times \vec{F_1} = \vec{0}$$

$\Rightarrow$ Si conserva il momento angolare!

Diagramma delle forze **<u>dopo l'urto</u>:**



$$\vec{R} = \begin{bmatrix} R_x \\ R_y \end{bmatrix} \qquad R_x \in \mathbb{R} \quad R_y \in \mathbb{R}$$

$$\vec{P} = \begin{bmatrix} 0 \\ -Mg \end{bmatrix}$$

$$\vec{F}_{TOT} = \vec{P} + \vec{R} \neq \vec{0}$$ $\Rightarrow$ non si cons la q. di moto.

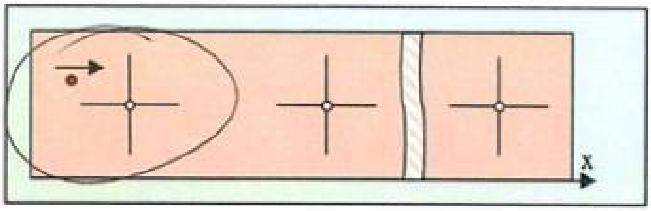
$$\vec{\tau}_{TOT} = \vec{r} \times \vec{P} + \vec{0} \times \vec{R} = \vec{r} \times \vec{P} \neq 0$$

$\Rightarrow$ non si cons. il mom. angolare.

Esercizio estratto dall'esame di Fisica 1 del 24 Luglio 2016

Esercizio 2

Su un piano orizzontale liscio giacciono 34354546 corpi a forma di "+". Ciascuno di questi corpi è costituito da due sbarrette di massa M e lunghezza L rigidamente connesse al centro ed è vincolato ad un asse verticale intorno al quale può ruotare liberamente. I centri dei corpi sono posti a distanza 2L l'uno dall'altro. Inizialmente tutti i "+" sono immobili, con una sbarretta orientata lungo x (e l'altra lungo y).



Un corpo puntiforme di massa m (da determinare) viaggia parallelamente all'asse x con velocità v_0, e, a t=0, arriva ad urtare elasticamente la prima "+" a distanza L/4 dal centro. Dopo l'urto, resta immobile, fino a quando ~~viene urtata~~ nuovamente da un braccio del "+" che si è messo in movimento e riparte (anche in questo caso l'urto è elastico).

a) Quanto vale m?

b) Qual è la velocità angolare con cui inizia a ruotare la 13151719ma "+"?

c) A quale istante avviene l'ultimo urto?

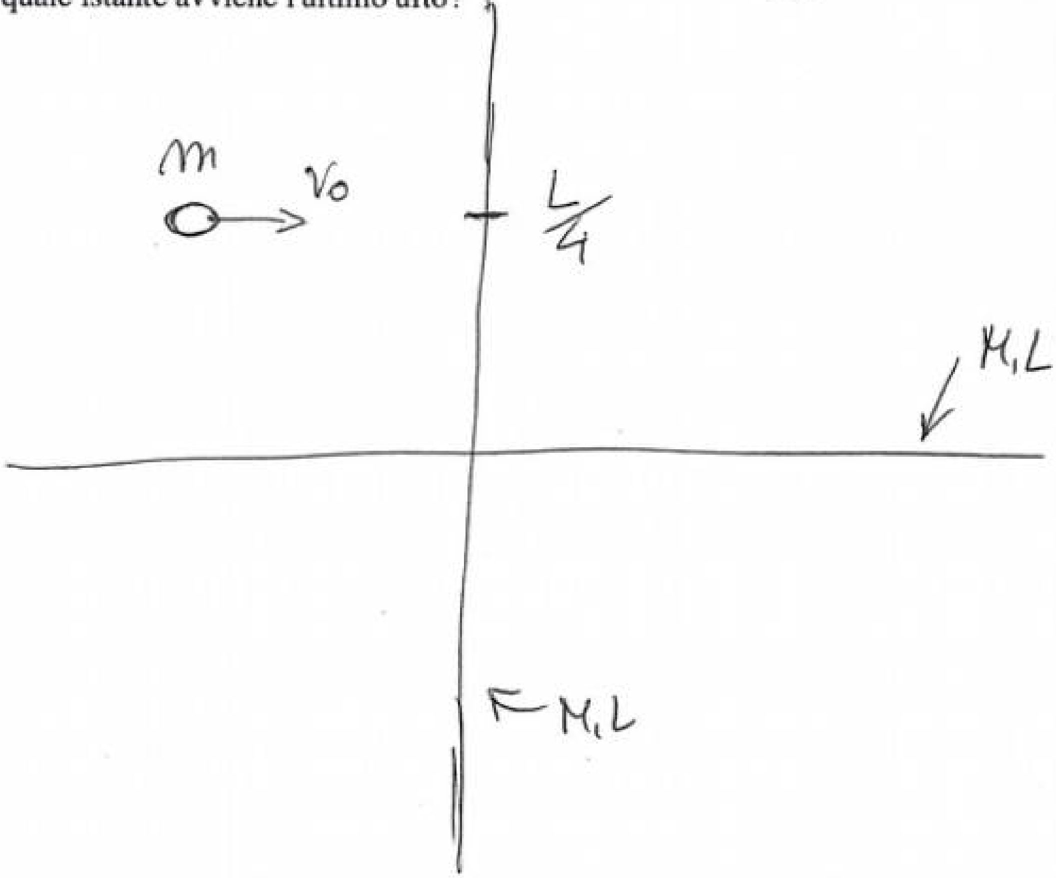
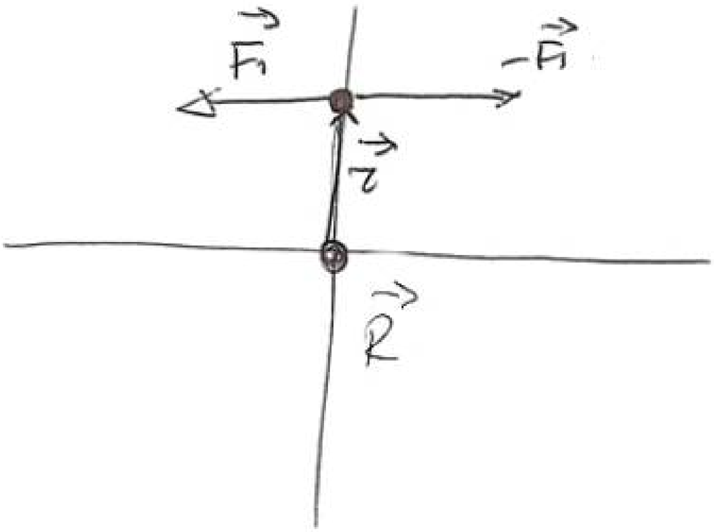


Diagramma delle forze durante l'urto



$$\vec{R} = \begin{bmatrix} R_x \\ R_y \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} R_x \in \mathbb{R} \\ R_y \in \mathbb{R} \end{matrix}$$

* $\vec{F}_1$ e $-\vec{F}_1$: coppia di forze di azione-reazione impulsive che si generano per l'urto tra proiettile e croce.
* $\vec{R}$: forza di reazione che subisce la croce a causa dell'interazione con il pavimento. Ovviamente, sul pavimento si genera una forza $-\vec{R}$. Tuttavia, il sistema in esame è formato da proiettile e croce, quindi tale forza non viene considerata

Forza totale agente sul sistema proiettile+croce durante l'urto:

$$\vec{F}_{TOT} = \vec{F_1} - \vec{F_1} + \vec{F_2} \neq \vec{0}$$

non si conserva la quantità di moto

Momento torcente totale agente sul sistema proiettile+croce durante l'urto:

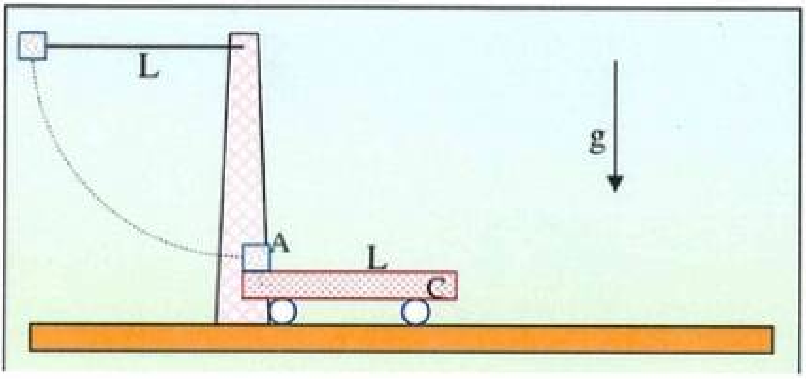
$$\vec{\tau}_{TOT} = \vec{r} \times \vec{F_1} + \vec{r} \times (-\vec{F_1}) + \vec{0} \times \vec{F_2} = \vec{0}$$

si conserva il momento angolar-

Esercizio estratto dall'esame di Fisica 1 del 4 Settembre 2014

Esercizio 1

Un corpo puntiforme A di massa M può strisciare sopra un carrello C di lunghezza L e massa 10M il quale è libero di muoversi senza attrito lungo un binario orizzontale. Inizialmente il sistema è immobile, ma un pendolo semplice di massa M e lunghezza L viene lasciato libero dalla posizione orizzontale (vd. figura), così che va ad urtare centralmente il corpo A in un processo istantaneo ed elastico. Successivamente, si osserva che A raggiunge l'estremità opposta di C, senza poi cadere.



a) Qual è l'energia dissipata per attrito?
b) Quanto lavoro è svolto dall'attrito sul corpo A? e sul corpo C?
c) Per quanto tempo dura lo strisciamento di A su C?
d) Qual è il coefficiente d'attrito dinamico?

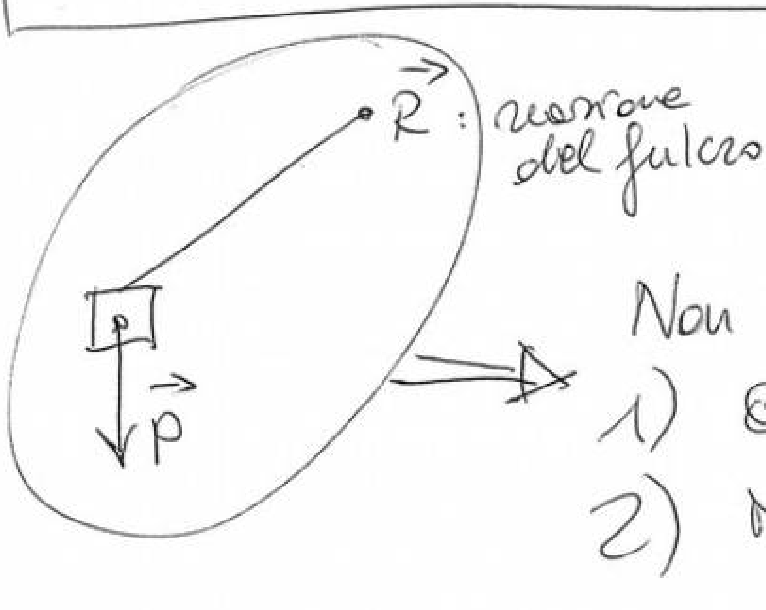
Prima dell'urto

1) Energia meccanica si conserva

$V_0 \equiv$ v. prima dell'urto $= \sqrt{2gL}$

$U = MgL$

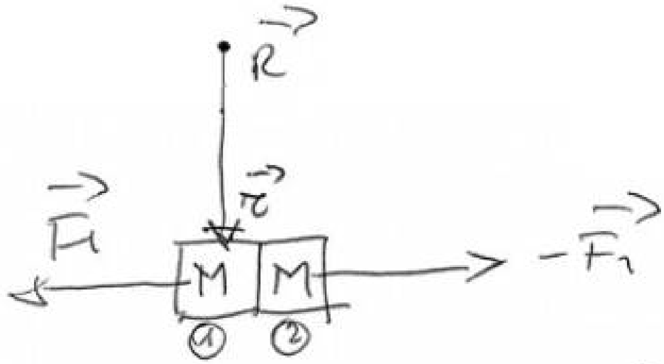
$K = \frac{1}{2} M v^2$



Non si conserva:

1) Q. di moto

2) Mom angolare



$$\vec{F}_{TOT} = \vec{F_1} - \vec{F_1} + \vec{R} \neq \vec{0}$$

$$\vec{\tau}_{TOT} = \vec{r} \times \vec{F_1} + \vec{r} \times (-\vec{F_1}) + \vec{0} \times \vec{R}$$

$$= \vec{0}.$$

Si cons. il momento angolare!

Prima dell'urto	Dopo l'urto
MLv_0	$MLv_1 + MLv_2$

$$\boxed{MLv_0 = MLv_1 + MLv_2}$$

Nell'urto si conserva il mom. angolare e l'energia.

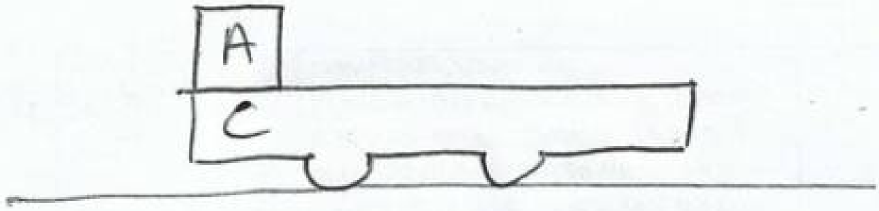
$$\begin{cases} MLv_0 = MLv_1 + MLv_2 \\ \frac{1}{2} Mv_0^2 = \frac{1}{2} Mv_1^2 + \frac{1}{2} Mv_2^2 \end{cases}$$

Soluzione:
$v_1 = 0$
$v_2 = v_0$

Dinamica dopo l'urto

x_A: posizione di A

x_C: posizione della parte posteriore di C.



$$\dot{x}_A(0) = v_1 = v_0 = \sqrt{2gL}$$

$$\dot{x}_C(0) = 0$$ (carrello inizialmente fermo)

Poiché A è in moto rispetto a C, l'attrito che si genera tra i 2 corpi è di tipo dinamico!

<u>NOTA</u> Velocità di A rispetto a C:

$$\dot{x}_A - \dot{x}_C$$

L'attrito dinamico agisce finché

$$\dot{x}_A - \dot{x}_C \neq 0.$$

Quando $\dot{x}_A = \dot{x}_C$, l'attrito dinamico cessa, e diventa statico.

Equazioni del moto

$$M\ddot{x}_A = -\mu_D M g$$
$$10M\ddot{x}_C = \mu_D M g$$

Accelerazioni dei corpi

$$\ddot{x}_A = -\mu_D g = -a$$
$$\ddot{x}_C = \frac{\mu_D g}{10} = \frac{a}{10} \qquad a = \mu_D g$$

Istante in cui i due corpi hanno la stessa velocità

$$t_F: \dot{x}_A(t_F) = \dot{x}_C(t_F)$$

I due corpi si muovono di moto uniformemente accelerato

Legge oraria della velocità del corpo A

$$\dot{x}_A(t) = \dot{x}_A(0) - a t_F$$

Legge oraria della velocità del corpo C

$$x_C(t) = \frac{a}{10} t_F$$

$$\dot{x}_A(t_F) = \dot{x}_C(t_F)$$

$$\boxed{t_F = \frac{10}{11}\frac{\dot{x}_A(0)}{a}}$$

Quanto spazio ha percorso A in un tempo pari a t_F?

$$x_A(t_F) = \dot{x}_A(0)\, t_F - \frac{1}{2} a t_F^2$$

Legge oraria della posizione del corpo A

$$= \frac{\dot{x}_A^2(0)}{a}\frac{10}{11} - \frac{1}{2}\cancel{a}\,\frac{10^2}{11^2}\,\frac{\dot{x}_A^2(0)}{a^{2}}$$

$$= \frac{\dot{x}_A^2(0)}{a}\left(\frac{10}{11} - \frac{1}{2}\cdot\frac{10^2}{11^2}\right) =$$

$$= \frac{2\cancel{g}L}{\mu_D \cancel{g}}\left(\frac{2\cdot 10\cdot 11 - 10^2}{2\cdot 11^2}\right)$$

$$= \frac{2L}{\mu_D}\left(\frac{220-100}{242}\right) = \frac{2L}{\mu_D}\,\frac{120}{242}$$

$$= \frac{L}{\mu_D}\,\frac{240}{242} = \frac{L}{\mu_D}\,\frac{120}{121}.$$

Legge oraria della posizione della parte posteriore del corpo C

$$x_C(t_F) = \frac{1}{2}\frac{a}{10}t_F^2 = \frac{\cancel{a}}{20}\frac{10^2}{11^2}\frac{\dot{x}_A^2(0)}{a^{\cancel{2}}}$$

$$= \frac{10\cancel{0}}{2\cancel{0}\cdot 11^2}\frac{2\cancel{g}L}{\mu_D \cancel{g}} = \frac{10\cdot\cancel{2}\cdot L}{\cancel{2}\cdot 11^2\cdot \mu_D} = \frac{L}{\mu_D}\frac{10}{121}$$

Spazio percorso da A relativamente alla parte posteriore di C

$$x_A(t_F) - x_C(t_F) = \frac{L}{\mu_D}\frac{120}{121} - \frac{L}{\mu_D}\frac{10}{121} =$$

$$= \frac{L}{\mu_D}\frac{110}{121} = \frac{L}{\mu_D}\frac{10}{11}$$

Dal testo del problema, si ha che A raggiunge C senza cadere. Questo significa che all'istante t_F, il corpo A raggiunge l'estremo destro di C!
In formule, deve succedere che:

$$x_A(t_F) = L + x_C(t_F).$$

Da cui:

$$\frac{L}{\mu_D}\frac{10}{11} = L$$

$$\boxed{\mu_D = \frac{10}{11}}$$

Valore del coefficiente di attrito dinamico

$$t_F = \frac{10}{11}\frac{\sqrt{2gL}}{\mu_D g} = \frac{\cancel{10}}{\cancel{11}}\frac{\sqrt{2gL}}{g}\frac{\cancel{11}}{\cancel{10}} = \sqrt{\frac{2L}{g}}.$$

Valore dell'istante in cui cessa lo strisciamento.

Spazio percorso da A

$$x_A(t_F) = \frac{L}{\mu_D}\frac{120}{121} = L\frac{\cancel{11}}{\cancel{10}}\cdot\frac{12\cancel{0}}{\cancel{121}_{11}} = L\frac{12}{11}$$

Lavoro compiuto dall'attrito su A

$$W_A = -\mu_D Mg\, L\frac{12}{11} = -\frac{10}{11}MgL\frac{12}{11} = -\frac{120}{121}MgL$$

Si noti che, poichè la forza di attrito è parallela al moto, allora il lavoro è banalmente dato dal prodotto tra forza e spostamento!

Spazio percorso da C

$$x_C(t_F) = \frac{L}{\mu_D}\frac{10}{121} = L\frac{\cancel{11}}{\cancel{10}}\frac{\cancel{10}}{\cancel{121}_{11}} = \frac{L}{11}$$

Lavoro compiuto dall'attrito su C

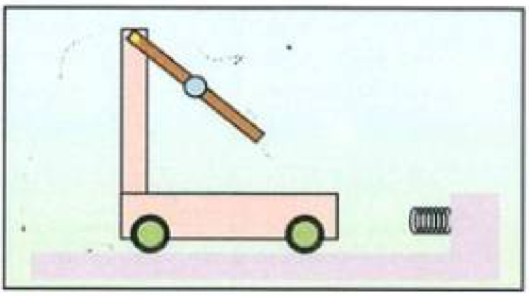
$$W_C = +\mu_D Mg\frac{L}{11} = \frac{10}{121}MgL.$$

Si noti che, poichè la forza di attrito è parallela al moto, allora il lavoro è banalmente dato dal prodotto tra forza e spostamento!

Energia dissipata dall'attrito

$$\mathbf{K}_{\text{bruciata}} = \mathbf{W}_A + \mathbf{W}_C$$

Esercizio estratto dall'esame di Fisica 1 del 8 Febbraio 2019

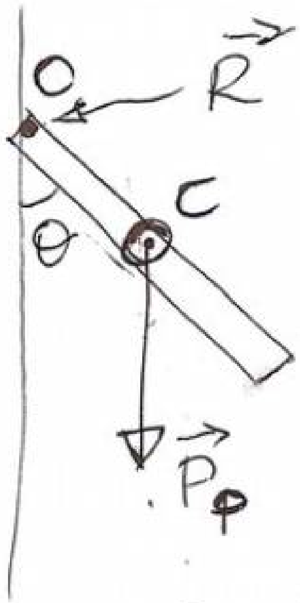


Esercizio 1

La figura mostra un carrello di massa 2M sulla quale è applicato un pendolo fisico costituito da una sbarra sottile, omogenea, di massa M e lunghezza L imperniata a un estremo, al cui centro è applicata una massa puntiforme M. Il carrello può muoversi senza attrito su un piano orizzontale. La sbarra è inizialmente ferma in posizione orizzontale, poi scende, e, quando raggiunge la verticale, il perno si libera così che la sbarretta si stacca dal carrello e cade fuori di esso. Il carrello poi procede sul piano fino ad urtare su un respingente costituito con una molla di costante elastica k. Dopo aver discusso con *massima* cura le quantità che si conservano nelle varie fasi del moto ed aver ben identificato tali fasi, stabilire la compressione massima del respingente.

[Nota: nello studio del moto della sbarretta, si consiglia di tener presente il 2° teorema di Koenig]

Pendolo

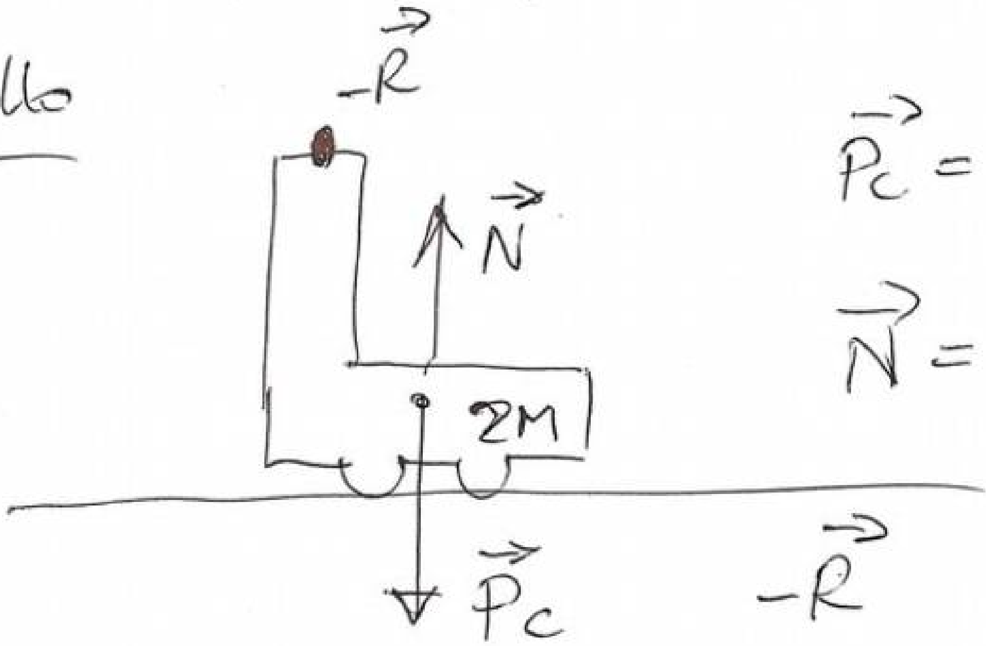


$$\vec{P}_\varphi = \begin{bmatrix} 0 \\ -2Mg \end{bmatrix}$$

$$\vec{R} = \begin{bmatrix} R_x \\ R_y \end{bmatrix}$$

$R_x \in \mathbb{R}$ $\quad R_y \in \mathbb{R}$

Carrello



$$\vec{P}_c = \begin{bmatrix} 0 \\ -2Mg \end{bmatrix}$$

$$\vec{N} = \begin{bmatrix} 0 \\ N \end{bmatrix} \quad N>0$$

$-\vec{R}$

NOTA: $\vec{R}$ è la forza di reazione tra pendolo e carrello.

Equazioni del moto

Pendolo (x)

$$2M\ddot{x}_1 = R_x$$

Carrello (x)

$$2M\ddot{x}_2 = -R_x$$

Si conserva la quantità di moto lungo x.

(y)

$$2M\ddot{y}_1 = -2Mg + R_y$$

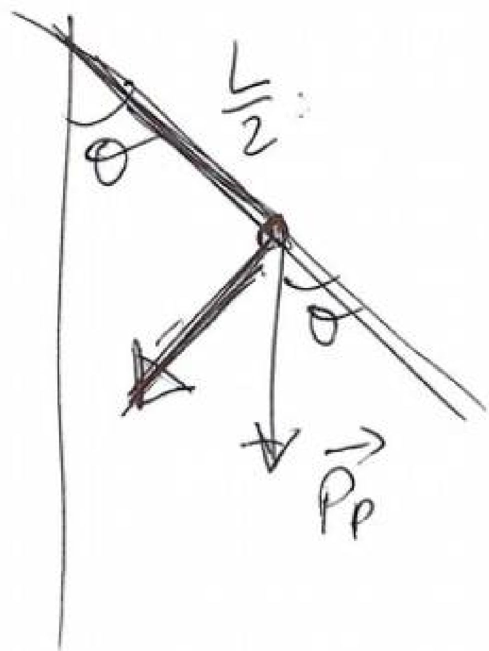
(y)

$$2M\ddot{y}_2 = -2Mg + N - R_y = 0$$

Il carrello non si muove lungo y

(θ)

$$I\ddot{\theta} = -2Mg\,\frac{L}{2}\sin\theta$$



$$I\ddot{\theta} = -Mgd\sin\theta$$

x_1, y_1: posizione centro di massa del pendolo
x_2, y_2: posizione centro di massa del carrello
θ: angolo del pendolo