Corso di recupero di Fisica 2018/2019

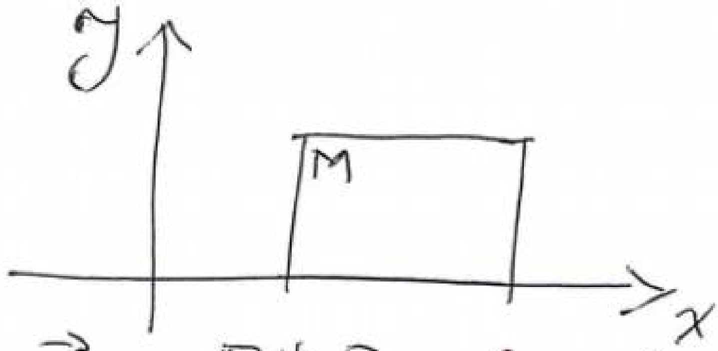
Dario Madeo

Lezione del 05/04/2019

madeo@dii.unisi.it

http://www.dii.unisi.it/~madeo/crf/crf1819.html

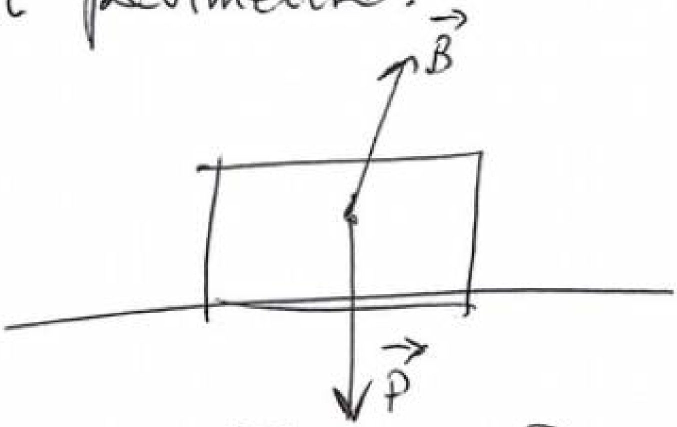
Precisazione - Forza normale



Sia $\vec{F} = \begin{bmatrix} * \\ F \end{bmatrix}$ la forza totale agente sul corpo, senza contare l'interazione con il pavimento.

$\vec{B} = \begin{bmatrix} B_x \\ B_y \end{bmatrix}$ $\vec{P} = \begin{bmatrix} 0 \\ -Mg \end{bmatrix}$

Es



$\hookrightarrow \vec{F} = \begin{bmatrix} * \\ \underbrace{B_y - Mg}_{F} \end{bmatrix}$

- Se $F > 0$, il corpo si solleva $\Rightarrow$ Non esiste la forza normale!
- Se $F < 0$ $\Rightarrow$ Esiste la forza normale!

Esiste $\vec{N} = \begin{bmatrix} 0 \\ N \end{bmatrix}$

Il corpo è fermo lungo y $\Rightarrow$ $\underbrace{\vec{F} + \vec{N}} = \begin{bmatrix} * \\ 0 \end{bmatrix}$

$\hookrightarrow$ $B_y - Mg + N = 0$

$\hookrightarrow$ $N = Mg - B_y$

Poichè $F < 0$, cioè $B_y - Mg < 0$

$\hookrightarrow$ $\underline{N > 0}$

Altre conseguenze ...

Se $F \geq 0$ $\Rightarrow$ <u>Non ho attrito.</u>

Attrito statico

$\vec{A}$: $|\vec{A}| \leq \mu_s |\vec{N}|$

Se $\vec{N} = \vec{0}$ $\Rightarrow$ $\vec{A} = \vec{0}$

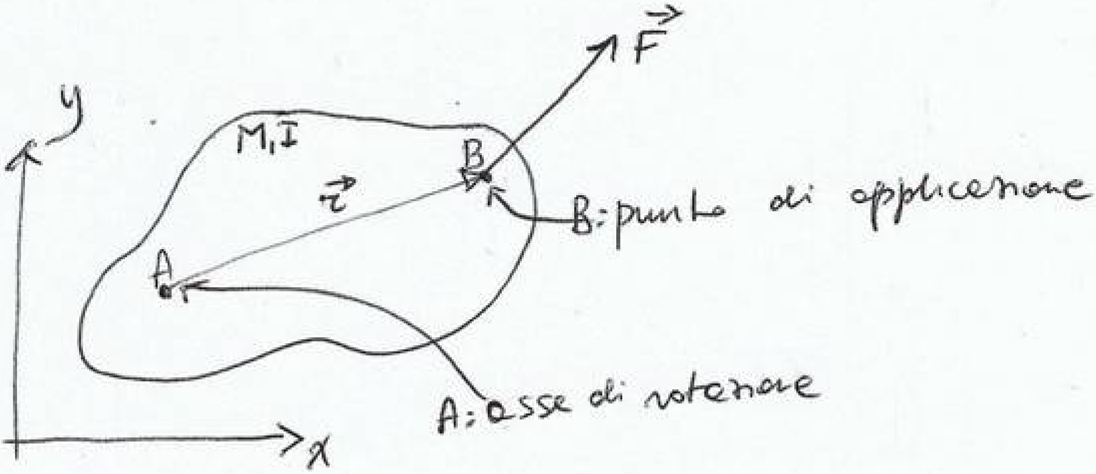
Attrito dinamico

$\vec{A}$: $|\vec{A}| = \mu_D |\vec{N}|$

Se $\vec{N} = \vec{0}$ $\Rightarrow$ $\vec{A} = \vec{0}$

Momenti torcenti – Breve guida pratica

Consideriamo un corpo che può ruotare intorno ad una asse parallelo all'asse z e che è soggetto ad una forza $\vec{F} = [F_x\ F_y\ F_z]^T$, con $F_z = 0$.



$$\vec{F} = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \end{bmatrix} \qquad \vec{r} = \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \end{bmatrix}$$

(ometto le componenti z, essendo esse nulle).

$\tau_z \equiv$ componente z di $\vec{r} \times \vec{F}$.

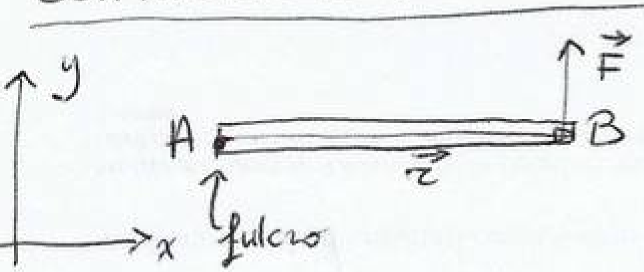
$$\vec{r} \times \vec{F} = \det \begin{bmatrix} \vec{x} & \vec{y} & \vec{z} \\ r_x & r_y & 0 \\ F_x & F_y & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ r_x F_y - r_y F_x \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{\tau_z = r_x F_y - r_y F_x}$$

NOTA

Questa formula funziona sempre. E' possibile usare la regola della mano destra come verifica.

Consideriamo alcuni casi notevoli



$\vec{r} = \begin{bmatrix} r_x \\ 0 \end{bmatrix}, \; r_x > 0$

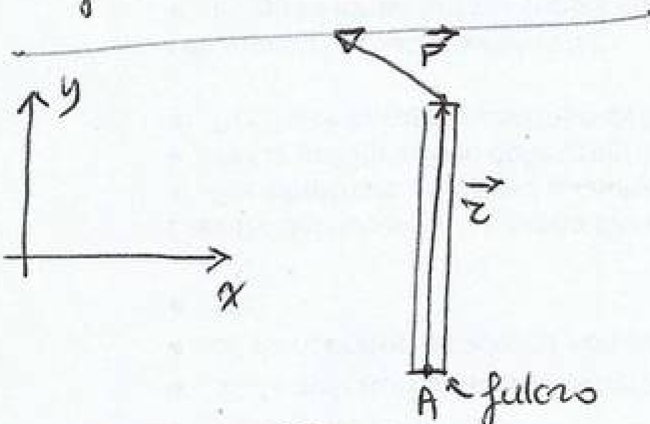
$\vec{F} = \begin{bmatrix} 0 \\ F_y \end{bmatrix}, \; F_y > 0$

$\tau_z = r_x F_y - r_y F_x$

$\Rightarrow \tau_z = r_x F_y > 0$

Il fatto che τ_z sia positivo viene confermato dalla regola della mano destra. Provate!

Se avessimo avuto $F_y < 0$, avremmo ottenuto $\tau_z < 0$; anche questo è confermato dalla regola della mano destra.



$\vec{r} = \begin{bmatrix} 0 \\ r_y \end{bmatrix}, \; r_y > 0$

$\vec{F} = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \end{bmatrix}, \; F_x < 0, \; F_y > 0$

$\tau_z = r_x F_y - r_y F_x$

$\Rightarrow \tau_z = - r_y F_x > 0$ (verificare mano dx)

Come mostrato in questo esempio, la componente della forza che conta per il calcolo di τ_z è quella ortogonale ad $\vec{r}$, in questo caso F_x.

Procedura pratica

CASO 1 $\vec{r}$ ed $\vec{F}$ sono noti.

METODO 1 $\tau_z = r_x F_y - r_y F_x$

Uso la formula. Posso usare la regola della mano destra per verifica.

METODO 2

1) Determino la componente di $\vec{F}$ ortogonale ad $\vec{r}$. Indichiamo con $\vec{F}_{ORT}$ tale componente.

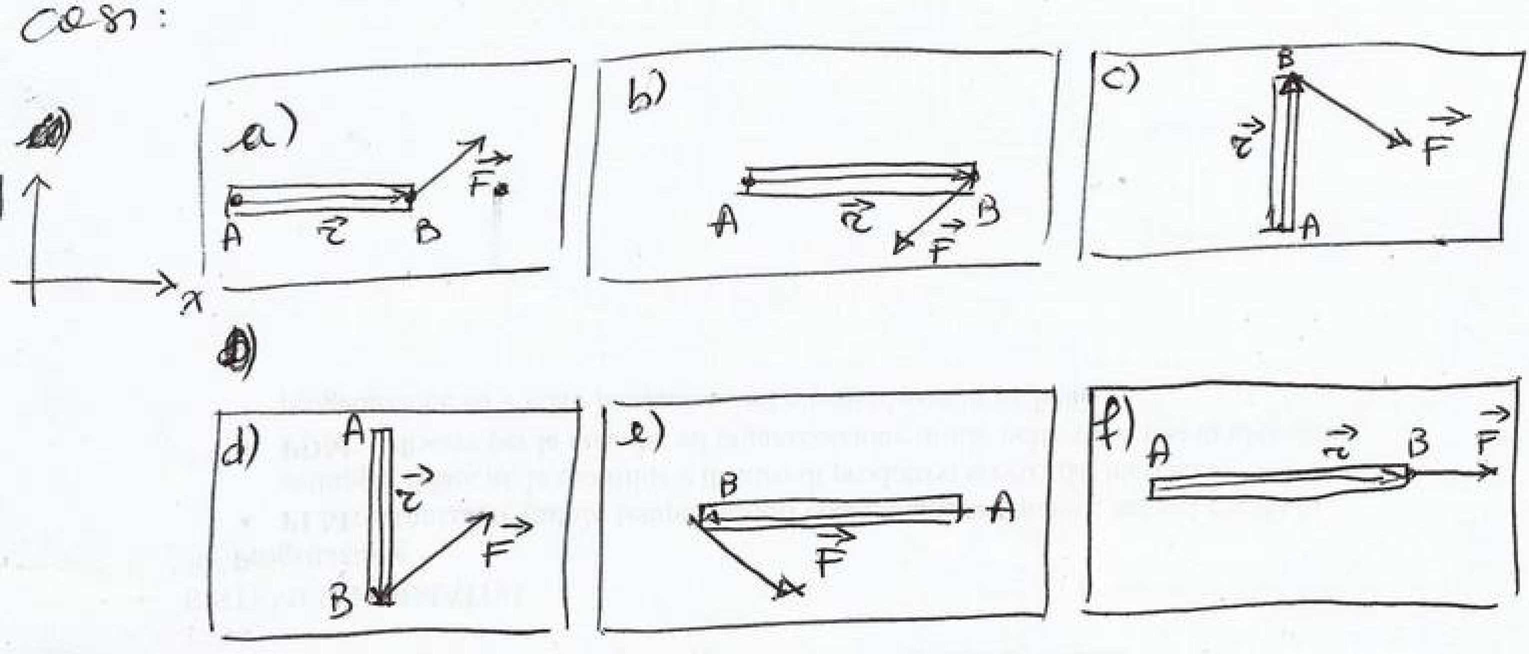
2) $$\tau_z = \pm |\vec{r}| \cdot |\vec{F}_{ORT}|$$

→ Questo segno lo determino con la regola della mano destra.

Nota I due metodi sono equivalenti.

Esercizio

Calcolare τ_z usando i 2 metodi per i seguenti casi:

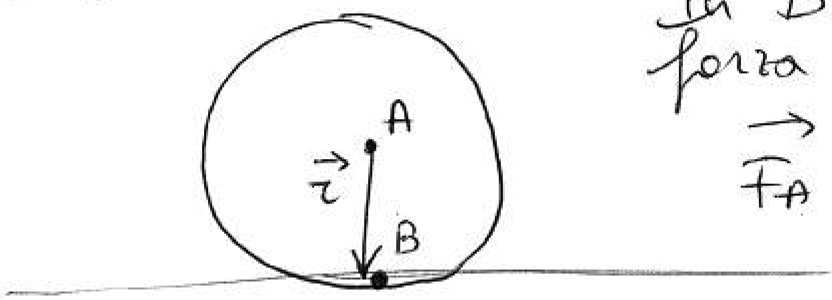


Cosa fare quando la forza $\vec{F}$ non è completamente nota?

Questo capita per esempio quando abbiamo a che fare con alcune forze di reazione come l'attrito statico, di cui conosciamo solo la direzione, ma non il modulo ed il verso.

$\boxed{\text{Usiamo il metodo 2}}$

Esempio

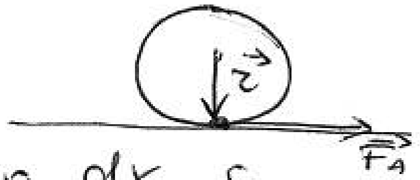


In B agisce la forza di attrito $\vec{F_A}$

$$\vec{F_A} = \begin{bmatrix} F_A \\ 0 \end{bmatrix}, \quad F_A \in \mathbb{R}$$

Momento torcente

• Ipotesi 1: $F_A > 0$



Dalla regola della mano dx si vede che τ_z deve essere positivo.

• Ipotesi 2: $F_A < 0$

In questo caso, $\tau_z < 0$.

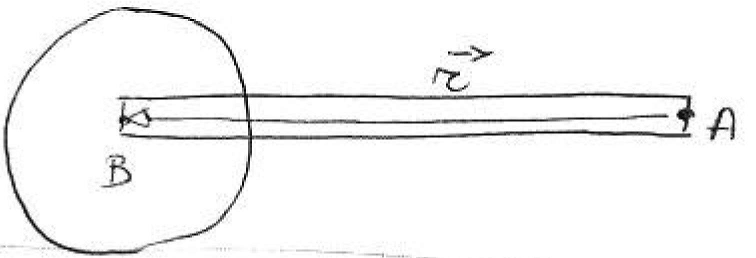
Si osserva che il segno di τ_z è uguale a quello di F_A. Quindi:

$$\tau_z = +|\vec{r}| \cdot F_A$$

$\tau_z > 0$ se $F_A > 0$

$\tau_z < 0$ se $F_A < 0$

<u>Esempio</u>



$\vec{r} = \begin{bmatrix} -L \\ 0 \end{bmatrix}, L>$

In questo caso, è presente una forza su B detta reazione a causa dell'interazione tra sbarra e cilindro.

Sia

$$\vec{F}_R = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \end{bmatrix} \qquad F_x, F_y \in \mathbb{R}$$

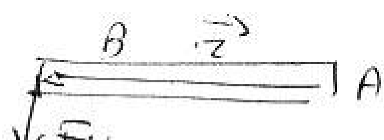
È chiaro che F_y è la componente ortogonale di F ad $\vec{r}$.

Usando il metodo 2...

- Ipotesi 1: $F_y > 0$

La regola della mano dx ci dice che $\tau_z < 0$.

- Ipotesi 2: $F_y < 0$



In questo caso, $\tau_z > 0$.

Si osserva che il segno di τ_z è <u>opposto</u> a quello di F_y. Quindi:

$$\tau_z = -|\vec{r}| \cdot F_y$$

$$= -L F_y.$$

NOTA TEORICA

$$x = \text{sign}(x) \cdot |x| \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

dove:

- $\text{sign}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$ funzione segno

- $|x| = \begin{cases} x & \text{se } x > 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

Esempio 1

$$\tau_z = \text{sign}(F_A)\,|\vec{r}| \cdot |F_A|$$

il segno della mano destra corrisponde al segno di F_A

$$= |\vec{r}| \cdot F_A$$

Esempio 2

$$\tau_z = -\text{sign}(F_y)\,|\vec{r}|\,|F_y|$$

il segno della mano destra è opposto a quello di F_y

$$= -|\vec{r}|\,F_y.$$

Esercizio estratto dall'esame di Fisica 1 del 16 Luglio 2013

Esercizio 2

La figura mostra un piano orizzontale su cui poggia un corpo di massa 3M. Tale corpo viene tirato da un filo ideale (inestensibile e massa trascurabile) che, tramite una carrucola di raggio R e di massa trascurabile, sostiene un'identica carrucola a cui sono appesi, sempre con filo ideale, due altri corpi, rispettivamente di massa M e 2M. Sapendo che il corpo di massa 3M resta fermo, e che il tratto di corda che lo tira forma un angolo θ con l'orizzontale, determinare il minimo valore possibile del coefficiente d'attrito statico fra quel corpo e il piano. **(Opzionale per il N.O.)** Determinare inoltre il tempo necessario alla carrucola per fare un giro completo partendo da ferma.

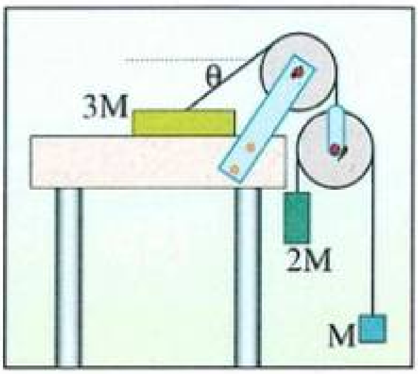
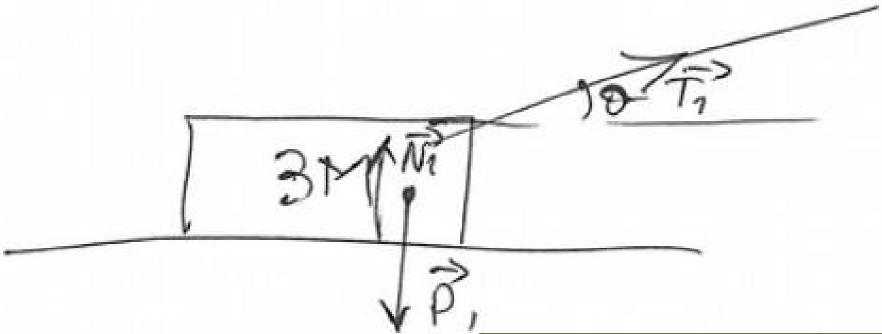


Diagramma delle forze agenti sul blocco di massa 3M



$$\vec{T_1} = T_1 \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix}$$

$$T_1 > 0$$

$$\vec{P_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ -3Mg \end{bmatrix}$$

$$\vec{N_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ N_1 \end{bmatrix} \qquad N_1 > 0$$

$$\vec{A} = \begin{bmatrix} A_1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad A_1 \in \mathbb{R}$$

Da notare che:

1) $\vec{T}_1$ è la tensione della fune. Punta verso la carrucola alta, altrimenti non sarebbe tesa. Quindi non conosciamo il suo modulo, ma conosciamo la sua direzione ed il suo verso.

2) Per quanto riguarda l'attritto, conosciamo la sua direzione (lungo l'asse x), ma non conosciamo né il suo modulo e né il suo verso.

3) La forza peso è una forza data. Ne conosciamo modulo, direzione e verso.

4) La forza normale $\vec{N}_1$ esiste fin quando il corpo resta a terra. Infatti essa è la forza di reazione lungo l'assy y che nasce dall'interazione tra il corpo ed il pavimento.

Equazioni del moto

$$x)\quad 3M a_x = T_1 \cos\theta + A_1 = 0$$

$$y)\quad 3M a_y = T_1 \sin\theta - 3Mg + N_1 = 0$$

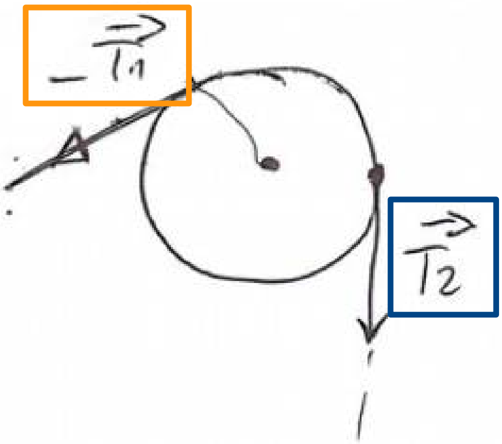
$a_x = a_y = 0$ poichè il blocco resta fermo (dato del problema).

Da notare che possiamo calcolare N_1:

$$N_1 = 3Mg - T_1 \sin\theta \geq 0$$

-

Diagramma delle forze agenti sulla carrucola “alta”



$$\vec{T_2} = T_2 \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad T_2 > 0$$

$$\vec{R_1} = \begin{bmatrix} R_{1x} \\ R_{1y} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

Da notare che:

1) $-\vec{T}_1$ è la tensione della fune (reazione).

2) $\vec{T}_2$ è la tensione sulla seconda fune. Punta verso la carrucola bassa, altrimenti non sarebbe tesa. Quindi non conosciamo il suo modulo, ma conosciamo la sua direzione ed il suo verso.

3) $\vec{R}_1$ è la forza di reazione sul fulcro, dovuta all'interazione con il tavolo. Non conosciamo nulla di questa forza.

4) Il peso non c'è (massa trascurabile).

La carrucola non trasla

Equazioni del moto

$$x)\quad -T_1 \cos\theta + R_{1x} = 0 \qquad (a_x = 0)$$

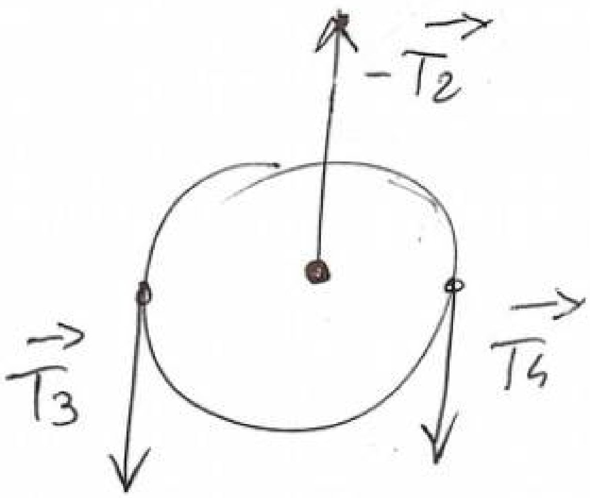
$$y)\quad -T_1 \sin\theta - T_2 + R_{1y} = 0 \qquad (a_y = 0)$$

$$rot)\quad \cancel{I\alpha} = T_1 R - T_2 R = 0 \qquad (I = 0)$$

$$T_1 = T_2$$

La carrucola ruota, ma ha massa e momento di inerzia trascurabili.

Diagramma delle forze agenti sulla carrucola “bassa”



$$-\vec{T}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ T_2 \end{bmatrix}$$

$$\vec{T}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -T_3 \end{bmatrix} \quad T_3 > 0$$

$$\vec{T}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ -T_4 \end{bmatrix} \quad T_4 > 0$$

Da notare che:

1) $-\vec{T}_2$ è la tensione della fune superiore (reazione).

2) $\vec{T}_3$ è la tensione della fune a sinistra. Punta verso il basso. Non conosciamo il suo modulo, ma conosciamo la sua direzione ed il suo verso.

3) $\vec{T}_4$ è la tensione della fune a destra. Punta verso il basso. Non conosciamo il suo modulo, ma conosciamo la sua direzione ed il suo verso.

4) Il peso non c'è (massa trascurabile).

Equazioni del moto

x) Niente!

La carrucola non trasla

y) $-(-T_2) - T_3 - T_4 = 0$

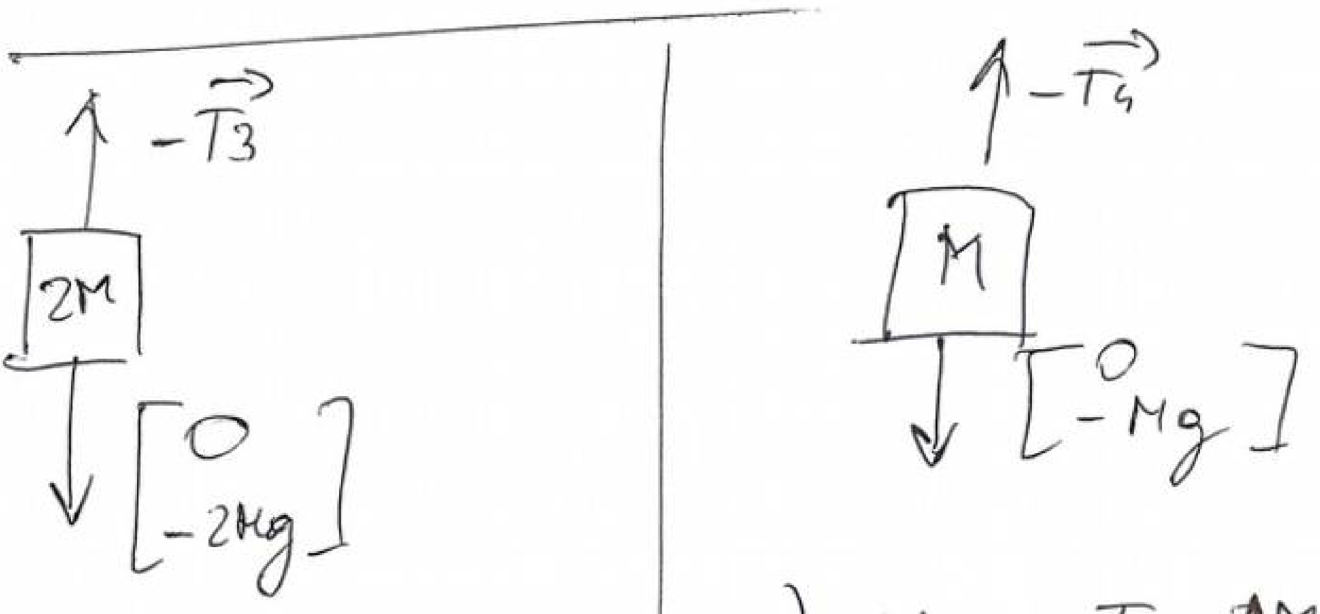
rot) $T_3 R - T_4 R = 0$

$$\boxed{T_3 = T_4}$$

$(I = 0)$

La carrucola ruota,
ma ha massa e momento
di inerzia trascurabili.

Diagramma delle forze agenti sulle massa appese e equazioni del moto



$y)\ 2Ma_{2M} = T_3 - 2Mg$

$y)\ Ma_M = T_4 - Mg$

Visto che $T_3 = T_4$, allora:

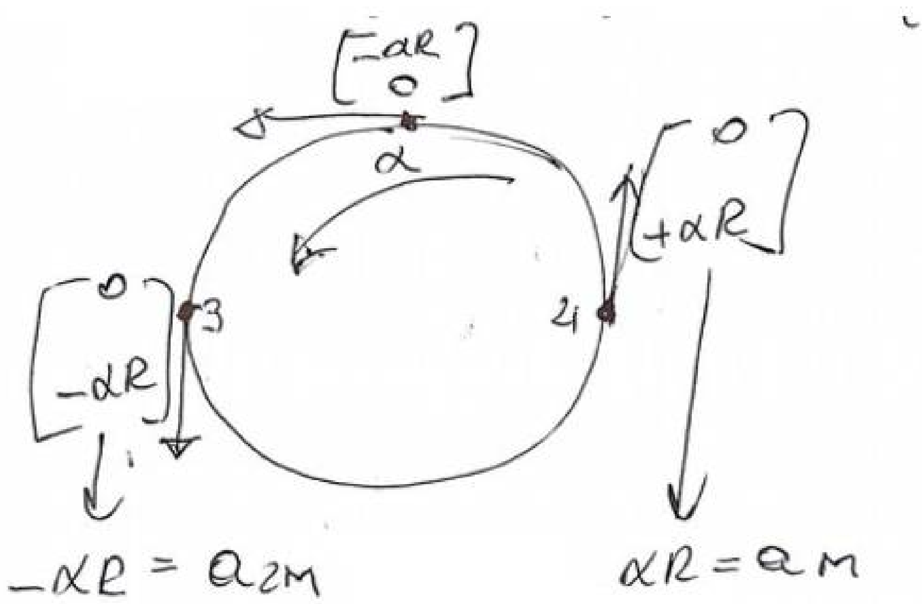
$$2Ma_{2M} = T_3 - 2Mg \Rightarrow T_3 = 2M(a_{2M} + g)$$

$$Ma_M = T_3 - Mg \Rightarrow T_3 = M(a_M + g)$$

$$\boxed{2M(a_{2M} + g) = M(a_M + g)}$$

Proprietà delle carrucole

L'accelerazione angolare è uguale in modulo in ogni punto.
Essa è legata all'accelerazione tangenziale.



Nota

$\alpha > 0$ indica rotazione in senso antiorario. Occhio ai segni!

Nel nostro caso, l'accelerazione tangenziale nei punti 3 e 4 corrisponde con le accelerazioni lungo l'asse y dei due corpi appesi.

Partendo da questa osservazione, si ottiene che:

$$\boxed{a_M = -a_{2M}}$$

$$\boxed{a_{2M} = -\frac{g}{3} \qquad a_M = +\frac{g}{3}}$$

A partire da questi dati, continuiamo a sfruttare le equazioni del moto che abbiamo ricavato per calcolare le quantità richieste per risolvere l'esercizio.

$$\Rightarrow T_3 = 2M a_{2M} + 2Mg = \dots \frac{4}{3} Mg$$

$$T_4 = \frac{4}{3} Mg$$

$$T_2 = T_3 + T_4$$

$$= \frac{8}{3} Mg$$

$$T_1 = T_2 \qquad \boxed{T_1 = \frac{8}{3} Mg}$$

$$T_1 \cos\theta + A_1 = 0$$
$$T_1 \sin\theta - 3Mg + N_1 = 0$$

$$A_1 = -\frac{8}{3} Mg \cos\theta$$

$$N_1 = 3Mg - \frac{8}{3} Mg \sin\theta$$

$$N_1 = \frac{Mg}{3} \left(\underbrace{9 - 8 \sin\theta}_{>0} \right) > 0$$

Se questa diseguaglianza non è chiara, si suggerisce di provare a disegnare la funzione 9-8sin(θ).

$$|A_1| \leq \mu_s |N_1|$$

$$\frac{8}{\cancel{3}} \cancel{Mg} \cos\theta \leq \mu_s \frac{\cancel{Mg}}{\cancel{3}} (9 - 8 \sin\theta)$$

$$\boxed{\mu_s \geq \frac{8\cos\theta}{9 - 8\sin\theta}}$$

Attrito statico minimo

Det. il tempo necessario alla carrucola di sotto per fare un giro partendo da fermo.

HINT $\quad a_M = \frac{g}{3}$

La carrucola bassa compie un giro quando la massa M ha percorso uno spazio pari alla sua circonferenza.

~~Moto~~ legge oraria di M:

$$y_M(t) = +\frac{1}{2} a_M t^2 = \frac{gt^2}{6}$$ Moto unif. acc.

Circonferenza

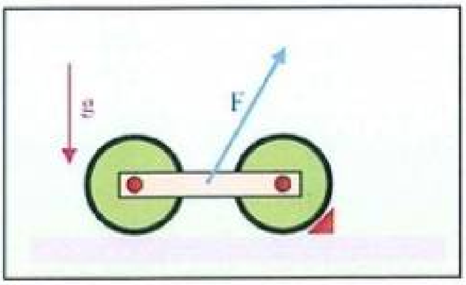
$2\pi R$

$\Rightarrow t_G$: tempo necessario a fare un giro

$$\Rightarrow y_M(t_G) = 2\pi R \Rightarrow \frac{g t_G^2}{6} = 2\pi R$$

$$\Rightarrow \boxed{t_G = \sqrt{\frac{12\pi R}{g}}}$$

Esercizio estratto dall'esame di Fisica 1 del 1 Aprile 2019



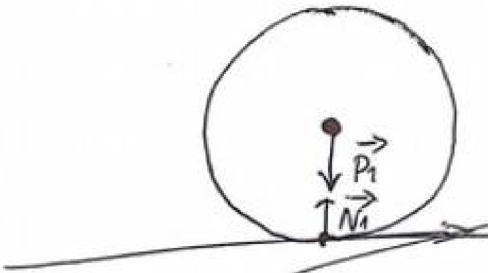
Esercizio 1

La figura mostra due cilindri omogenei di raggio R e massa M che poggiano su un piano scabro orizzontale (coefficienti d'attrito μ_S=0.5 e μ_D=0.2). Gli assi dei due cilindri sono connessi da una sbarretta di massa trascurabile. L'interasse misura 3R. Al centro della sbarretta viene applicata una forza di intensità F orientata a 60° rispetto all'orizzontale (vedi figura). Il cilindro destro viene tenuto bloccato sul terreno, così che esso è immobile ma la sbarretta può ruotare intorno al suo asse; stabilire qual è il massimo valore di F tale il cilindro sinistro non si solleva. Sia assuma che questa (indicandola con F_0) sia la forza applicata e che improvvisamente venga sbloccato il cilindro destro, calcolare la velocità angolare dei cilindri quando essi, partendo da fermi, hanno compiuto un giro completo.

Cilindro 1 (sx)

$\vec{P_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ -Mg \end{bmatrix}$ $\quad \vec{N_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ N_1 \end{bmatrix}$ $N_1 > 0$

$\vec{A_1} = \begin{bmatrix} A_1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\quad A_1 \in \mathbb{R}$



$\vec{R_1} = \begin{bmatrix} R_{1x} \\ R_{1y} \end{bmatrix}$ $\quad R_{1x} \in \mathbb{R}$ $\quad R_{1y} \in \mathbb{R}$

forza di reazione sul fulcro fra cilindro e asse.

x) $Ma_x = A_1 + R_{1x} = 0$ $\quad (a_x = 0)$

y) $Ma_y = -Mg + N_1 + R_{1y} = 0$ $\quad (a_y = 0)$

rot) $I\alpha = A_1 R = 0$ $\quad (\alpha = 0)$

$$\boxed{\begin{aligned} &A_1 = 0 \\ &R_{1x} = 0 \\ &N_1 = Mg - R_{1y} \end{aligned}}$$

Il cilindro 1 è fermo

$N_1 \geq 0$ per rimanere a terra.
Come richiesto dalle ipotesi

Cilindro 2 (DX)

$$\vec{P_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ -Mg \end{bmatrix} \qquad \vec{N_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ N_2 \end{bmatrix} \quad N_2 > 0$$

$$\vec{A_2} = \begin{bmatrix} A_2 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \vec{R_2} = \begin{bmatrix} R_{2x} \\ R_{2y} \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} R_{2x} \in \mathbb{R} \\ R_{2y} \in \mathbb{R} \end{matrix}$$

$A_2 \in \mathbb{R}$

$$\boxed{\vec{F_B} = \begin{bmatrix} F_{Bx} \\ F_{By} \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} F_{Bx} \in \mathbb{R} \\ F_{By} \in \mathbb{R} \end{matrix}}$$

Forza di reazione tra cilindro e blocco

$$x)\quad Ma_x = A_2 + R_{2x} + F_{Bx} = 0 \qquad (a_x = 0)$$

$$y)\quad Ma_y = -Mg + N_2 + R_{2y} + F_{By} = 0 \qquad (a_y = 0)$$

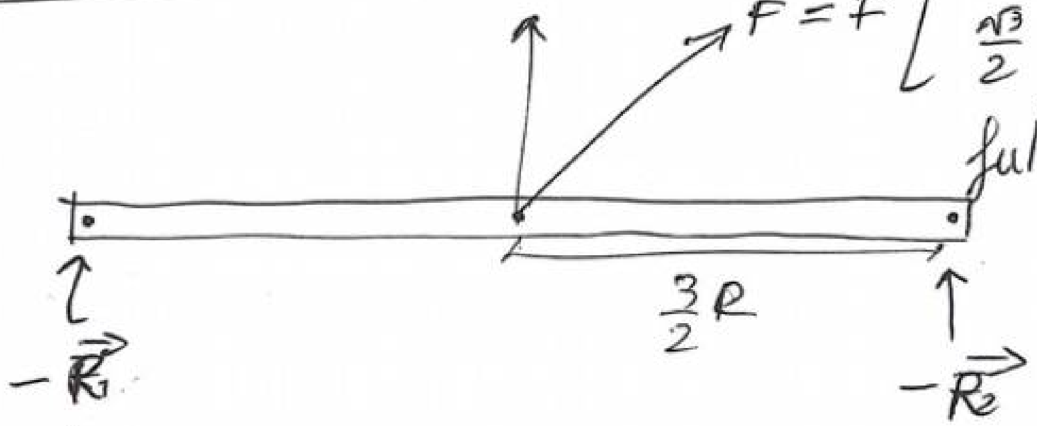
$$rot)\quad I\alpha = A_2 R = 0 \qquad (\dot{\alpha} = 0)$$

$$\boxed{\begin{aligned} A_2 &= 0 \\ R_{2x} &= -F_{Bx} \\ N_2 &= Mg - R_{2y} - F_{By} \end{aligned}}$$

Il cilindro 2 è fermo

Interasse

$\vec{F} = F\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}$ $F>0$



$$x)\quad \cancel{ma_x} = F\cdot\frac{1}{2} - \cancelto{0}{R_{1x}} - R_{2x} = 0 \qquad (m=0)$$

$$y)\quad \cancel{ma_y} = F\frac{\sqrt{3}}{2} - R_{1y} - R_{2y} = 0 \qquad (m=0)$$

$$rot)\quad \cancel{I\alpha} = -F\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{3}{2}R - (-R_{1y}\,3R) = 0 \qquad (I=0)$$

$$\boxed{R_{1y} = F\frac{\sqrt{3}}{4}}$$

$$\boxed{R_{2y} = F\frac{\sqrt{3}}{4}}$$

$$\boxed{R_{2x} = \frac{F}{2}}$$

L'interasse è fermo. Inoltre, la sua massa ed il suo momento di inerzia sono trascurabili.

$R_{1x} = 0$
visto prima

$R_{1x} = 0$
$A_1 = 0$

$$\boxed{N_1 = Mg - R_{1y} = Mg - \frac{F\sqrt{3}}{4}}$$

$N_1 \geq 0$ Condizione per avere il primo cilindro a terra

$$Mg - F\frac{\sqrt{3}}{4} \geq 0$$

$$\boxed{F \leq \frac{4Mg}{\sqrt{3}} = F_0}$$

Valore massimo della forza esterna affinchè il corpo resti fermo.

Leviamo il blocco

NOTA

$a_{1x} = a_{2x} = a_x$

Il sis. si muove in modo solidale.

CIL 1

x) $Ma_x = R_{1x} + A_1$ (1)

y) $Ma_y = -Mg + N_1 + R_{1y} = 0$ $(a_y = 0)$ (2)

rot) $I\alpha_1 = RA_1$ (3)

CIL 2

x) $Ma_x = R_{2x} + A_2$ (4)

y) $Ma_y = -Mg + N_2 + R_{2y} = 0$ $(a_y = 0)$ (5)

rot) $I\alpha_2 = RA_2$ (6)

INTERASSE

x) $\cancel{m}a_x = \frac{F_0}{2} - R_{1x} - R_{2x} = 0$ (7) $(m = 0)$

y) $\cancel{ma_y} = F_0\frac{\sqrt{3}}{2} - R_{1y} - R_{2y} = 0$ (8) $\begin{pmatrix} m = 0 \\ a_y = 0 \end{pmatrix}$

rot) $\cancel{I_s\alpha_s} = -F_0\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{3}{2}R - (-R_{1y}3R) = 0$ (9) $\begin{pmatrix} I_s = 0 \\ \alpha_s = 0 \end{pmatrix}$

$9 \Rightarrow \quad R_{1y} = \frac{F_0\sqrt{3}}{4} = Mg \qquad \left(F_0 = \frac{4Mg}{\sqrt{3}}\right)$

$8 \Rightarrow \quad R_{2y} = F_0 \frac{\sqrt{3}}{4} = Mg$

$2 \Rightarrow \quad N_1 = Mg - R_{1y} = 0$

$5 \Rightarrow \quad N_2 = Mg - R_{2y} = 0$

$\Rightarrow A_1 = 0$

$\Rightarrow A_2 = 0$

Non ruota

$\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 0$

$1 \quad Ma_x = R_{1x}$

$4 \quad Ma_x = R_{2x}$

$R_{1x} = R_{2x}$

$7 \quad \frac{F_0}{2} - R_{1x} - R_{2x} = 0$

$\frac{F_0}{2} - 2R_{1x} = 0$

$R_{1x} = \frac{F_0}{4} = \frac{Mg}{\sqrt{3}}$

$1 \quad \boxed{a_x = \frac{R_{1x}}{M} = \frac{g}{\sqrt{3}}}$

I cilindri non ruotano, quindi non possiamo calcolare la lora velocità dopo un giro completo.