

Corso di recupero di Fisica 2018/2019

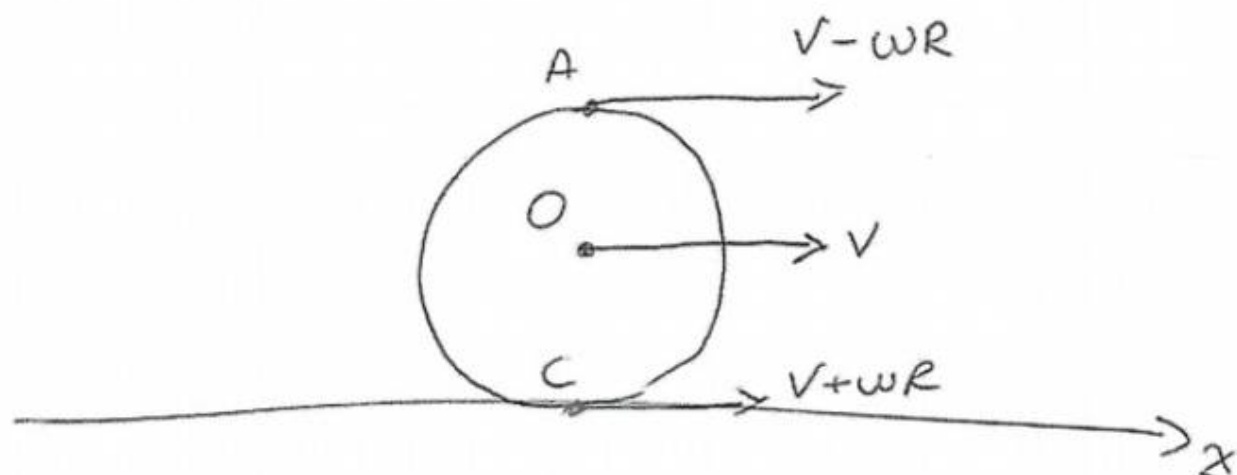
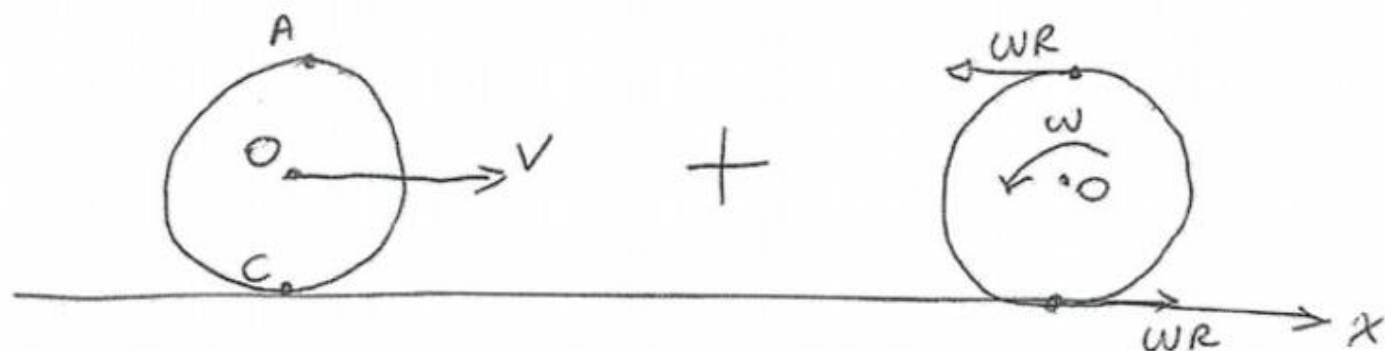
Dario Madeo



Lezione del 29/03/2019

Moto di puro rotolamento

È composizione di un moto traslatorio e di un moto rotatorio.



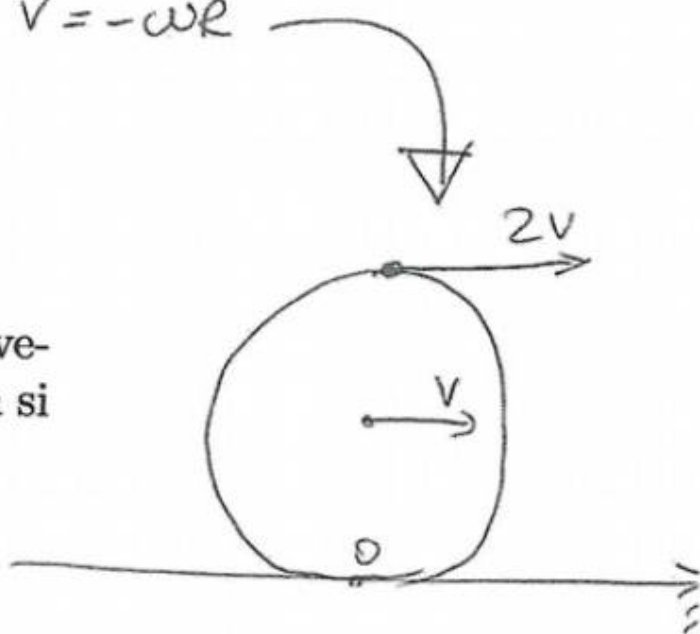
Se non c'è slittamento sul piano, allora $\underline{V_C = 0}$. (0 è la velocità del piano)

$$V_C = V + \omega R = 0 \Rightarrow V = -\omega R$$

$$\Downarrow$$
$$\boxed{a + \alpha R = 0}$$

In generale, dette v_P ed a_P la velocità e l'accelerazione del piano, non si ha strisciamento se:

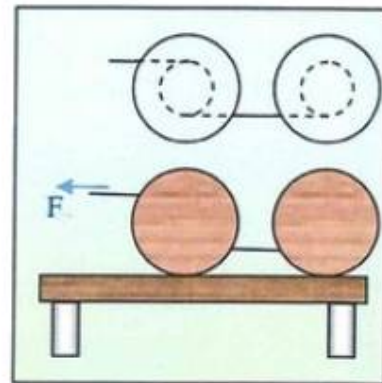
$$v + \omega R = v_P \Rightarrow a + \alpha R = a_P.$$



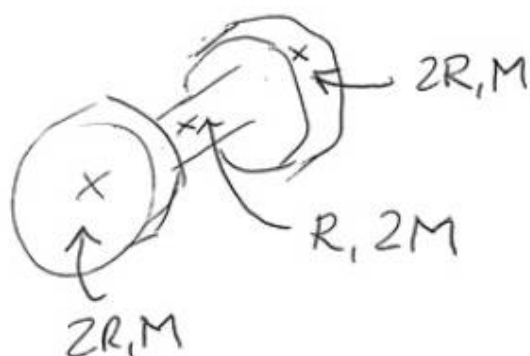
Esercizio estratto dall'esame di Fisica 1 del 17 Settembre 2015

Esercizio 2

Si hanno due rocchetti uguali inizialmente fermi. Ogni rocchetto è costituito da tre cilindri solidali e coassiali. Il cilindro intermedio ha raggio R e massa $2M$ mentre quelli laterali hanno raggio $2R$ e massa M . Questi oggetti sono sopra un piano orizzontale scabro sul quale rotolano senza strisciare. Una corda avvolta sul cilindro intermedio del rocchetto di sinistra (vd. figura) viene tirata con un'assegnata forza F . Un'altra corda avvolta come in figura, fa sì che anche l'altro rocchetto si metta in movimento. Calcolare l'accelerazione angolare di ciascun rocchetto, il lavoro svolto da F ad un generico istante t ed il rapporto fra le tensioni delle due corde.



Vista in 3D dell'oggetto



Massa totale:

$$M_{TOT} = 4M$$

Momento d'inerzia rispetto all'asse dei cilindri:

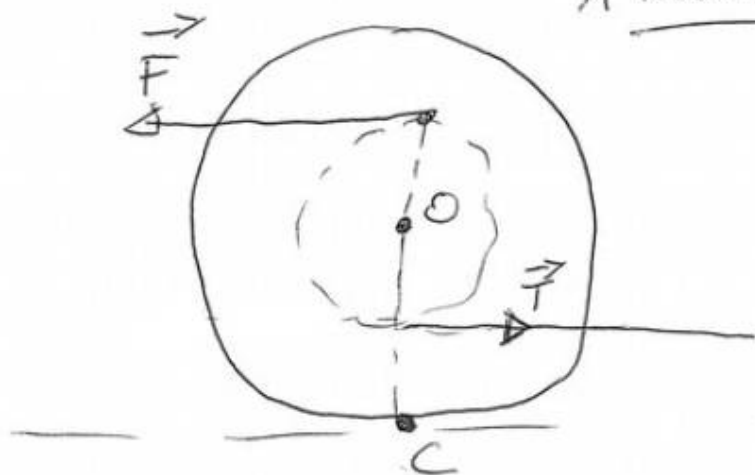
$$I_{com} = \frac{1}{2} M (2R)^2$$

$$+ \frac{1}{2} M (2R)^2$$

$$+ \frac{1}{2} 2M R^2 = 5MR^2$$

Diagrammi delle forze

1° rocchetto



$$\vec{F} = \begin{bmatrix} -F \\ 0 \end{bmatrix} \quad F > 0$$

$$\vec{T} = \begin{bmatrix} T \\ 0 \end{bmatrix} \quad T > 0$$

$$\vec{A}_1 = \begin{bmatrix} A_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad A_1 \in \mathbb{R}$$

Da notare che:

- 1) $\vec{F}$ è una forza data. Ne conosciamo quindi modulo, direzione e verso.
- 2) La tensione della fune punta sempre verso l'altro corpo, altrimenti non sarebbe tesa. Quindi non conosciamo il suo modulo, ma conosciamo la sua direzione ed il suo verso.
- 3) Per quanto riguarda l'attrito, conosciamo la sua direzione (lungo l'asse x), ma non conosciamo né il suo modulo e né il suo verso.

Lavoro solo lungo x

$$\begin{cases} 4Ma_1 = -F + A_1 + T \\ I\alpha_1 = TR + A_1 2R + \cancel{FR} \end{cases}$$

(polo $\equiv O$)

a_1 : acc. com.
rocchetto 1

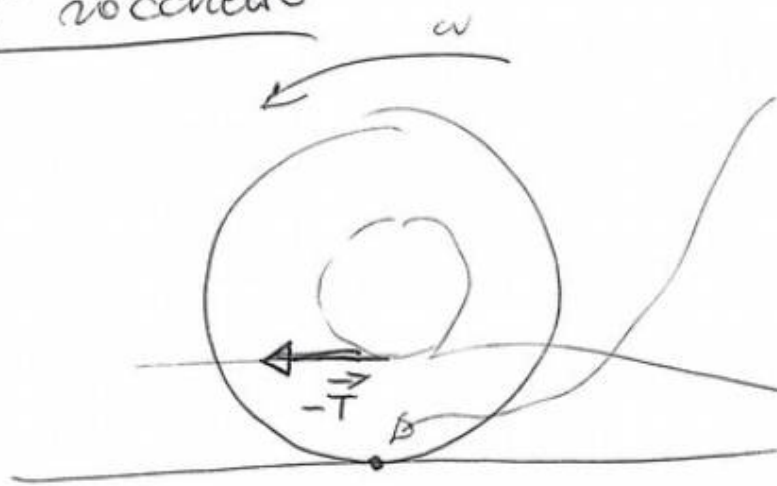
α_1 : acc. ang.
del rocchetto
1

$$a_1 + 2R\alpha_1 = 0$$

Condizione di puro rotolamento

"= 0" perchè il pavimento è fermo!!!

2° rocchetto



$$\vec{A}_2 = \begin{bmatrix} A_2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad A_2 \in \mathbb{R}$$

$$\begin{bmatrix} -T \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$4Ma_2 = -T + A_2$$

$$I\alpha_2 = (-TR) + 2RA_2$$

$$a_2 + 2R\alpha_2 = 0$$

Da notare che:

- 1) La tensione la ricaviamo usando la terza legge di Newton.
- 2) Per quanto riguarda l'attrito, valgono le stesse considerazioni fatte in precedenza.

6 equazioni

7 Incognite: $a_1, a_2, \alpha_1, \alpha_2, A_1, A_2, T$

Equazione aggiuntiva: $a_1 = a_2$

E' ovvio che i due rocchetti, legati dalla fune, si devono muovere alla stessa maniera.

$$a_1 + 2R\alpha_1 = 0$$

$$a_2 + 2R\alpha_2 = 0$$

$$a_1 = a_2 = a$$
$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$$

Possiamo rinominare le accelerazioni dei due rocchetti visto che sono uguali.

$$a = -\frac{F}{7M} < 0$$

$$T = \frac{3}{2} F > 0$$

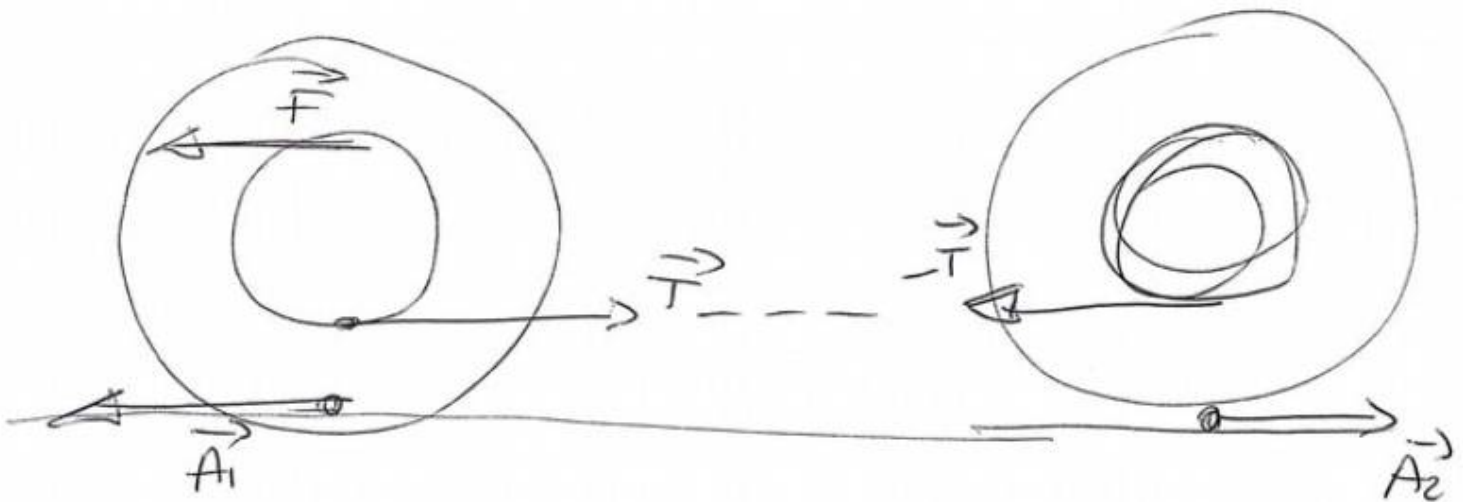
$$\alpha = \frac{F}{14MR} > 0$$

$$A_1 = -\frac{15}{14} F < 0$$

$$A_2 = \frac{13}{14} F > 0$$

Soluzione finale. Da notare che:

- 1) I calcoli confermano che $T > 0$, come ipotizzato inizialmente.
- 2) L'attrito sul primo rocchetto tira verso sinistra, quello sul secondo tira verso destra.
- 3) L'accelerazione a è negativa, quindi, come ci si poteva aspettare, il sistema si muove verso sinistra.
- 4) I rocchetti ruotano in senso antiorario ($\alpha > 0$)



$$\frac{F}{T} = \frac{2}{3}$$

Rapporto tra le tensioni sulle due funi

Per il calcolo del lavoro svolto ci sono due strade che si possono seguire:

- 1) Si sfrutta il teorema delle forze vive (legame tra energia cinetica e lavoro).
- 2) Si calcola esplicitamente il lavoro usando la definizione.

Di seguito, vengono mostrati entrambi gli approcci.

Lista delle forze agenti

Approccio energetico

1) $\vec{F}$ esterna

2) $\vec{A}_1$ e $\vec{A}_2$ (interne, non creano lavoro)

3) $\vec{T}$ e $-\vec{T}$ (interne, insieme non creano lavoro)

4) $\vec{a}$

↳ L'unica forza che crea lavoro è $\vec{F}$

Th delle forze vive (o dell'energia cinetica)

$$W = K_f - K_i$$

$$K(t) = 2 \left(\frac{1}{2} 4M v_{\text{COM}}^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 \right)$$

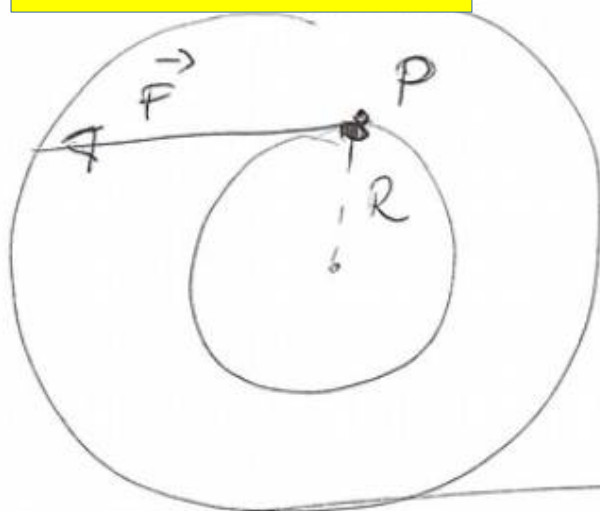
$$= 4M v_{\text{COM}}^2 + I \omega^2$$

$$v_{\text{COM}} = at$$

$$\omega = \alpha t$$

$$K(t) = 4Ma^2t^2 + I\alpha^2t^2$$
$$= \dots = 21MR^2\alpha^2t^2 = W$$

Lavoro svolto



$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

↑
Spostamento
punto di
applicazione

$$V_P = V_{CM} - \omega R$$

$$\frac{dx_P}{dt} = \frac{dx_{CM}}{dt} - \frac{d\theta}{dt} R$$

spostamento infinitesimo di P

$$\int \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int -F dx_{CM} - \int -FR d\theta$$

$$W = \int_0^L -F dx_{CM} + RF \int_0^\beta d\theta$$

L: percorso compiuto del CM

β : angolo percorso del CM

$$W = -FL + RF\beta$$

$$L = \frac{1}{2} a t^2$$

$$\beta = \frac{1}{2} \alpha t^2$$

$$W = -\frac{F a t^2}{2} + \frac{R F \alpha t^2}{2} = \dots$$

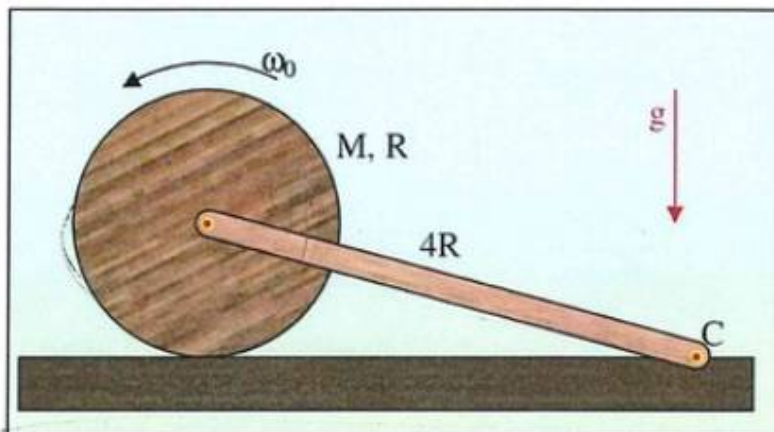
$$= \dots 21 M R^2 \alpha^2 t^2.$$

Quando si calcola il lavoro usando la definizione, lo spostamento si riferisce allo spostamento del punto di applicazione della forza.

Esercizio estratto dall'esame di Fisica 1 del 19 Giugno 2012

Esercizio 2

Un cilindro omogeneo di massa M e raggio R ruota (sia ω_0 la sua velocità angolare iniziale) strisciando su un piano orizzontale scabro (sia μ_D il coefficiente d'attrito dinamico), essendo trattenuto mediante due sbarrette di lunghezza $4R$ e massa trascurabile, incernierate sul piano e vincolate all'asse del cilindro (vd. figura, dove una delle sbarretta nasconde l'altra). Determinare la forza esercitata dalla sbarretta sulla sua cerniera C (fornirne direzione e modulo, ovvero le componenti). Determinare inoltre l'accelerazione angolare α del cilindro ed il numero di giri che esso compie prima di fermarsi.



Consideriamo la sbarretta. Su di essa agiscono due forze di reazione. Una sul punto B (centro del disco), che rappresenta le reazioni dovute all'interazione con il disco, ed una sul punto C , che rappresenta la reazione dovuta all'interazione con il pavimento. Di tali forze, non conosciamo nè modulo, nè direzione, nè verso.

Diagram of the rod with points B and C , and mass $m=0$.

$$\vec{R}_B = \begin{bmatrix} R_{Bx} \\ R_{By} \end{bmatrix}$$

$$R_{Bx} \in \mathbb{R}$$

$$R_{By} \in \mathbb{R}$$

$$\vec{R}_C = \begin{bmatrix} R_{Cx} \\ R_{Cy} \end{bmatrix}$$

$$R_{Cx} \in \mathbb{R}$$

$$R_{Cy} \in \mathbb{R}$$

$$m a_x = R_{Bx} + R_{Cx} = 0$$

$$m a_y = R_{By} + R_{Cy} = 0$$

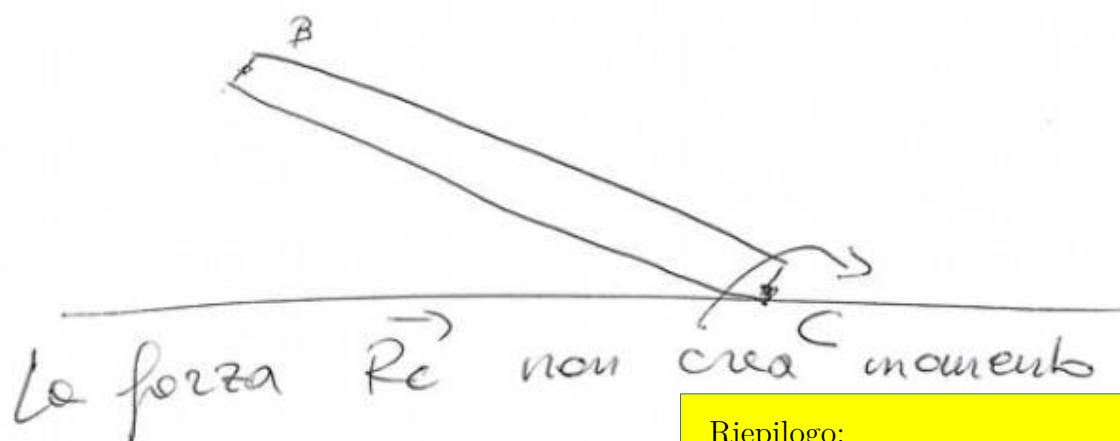
$$\vec{R}_C = -\vec{R}_B$$

Impongo anche che la somma dei momenti sia 0.

$$I \alpha = \tau_1 + \tau_2 + \dots = 0$$

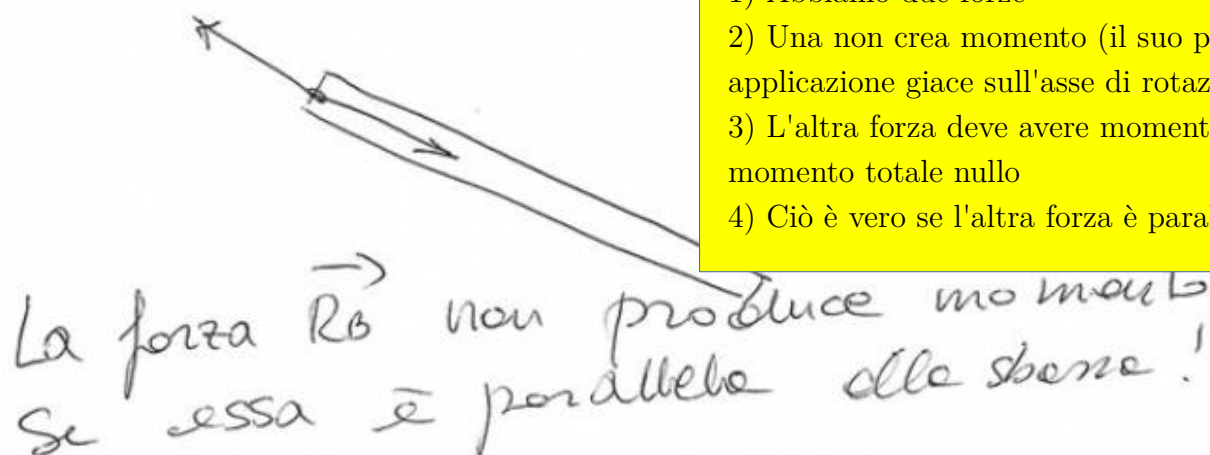
La sbarretta non ruota e non trasla
($a_x = a_y = 0, \alpha = 0$).

Quali forze creano momenti sulla sbarretta?



Riepilogo:

- 1) Abbiamo due forze
- 2) Una non crea momento (il suo punto di applicazione giace sull'asse di rotazione)
- 3) L'altra forza deve avere momento nulla per aver momento totale nullo
- 4) Ciò è vero se l'altra forza è parallela alla sbarretta.



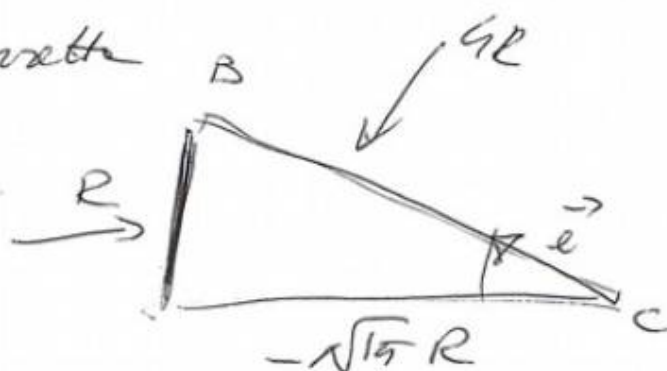
$$\vec{R}_B = R_B \vec{e}$$

$\vec{e}$: direzione della sbarretta

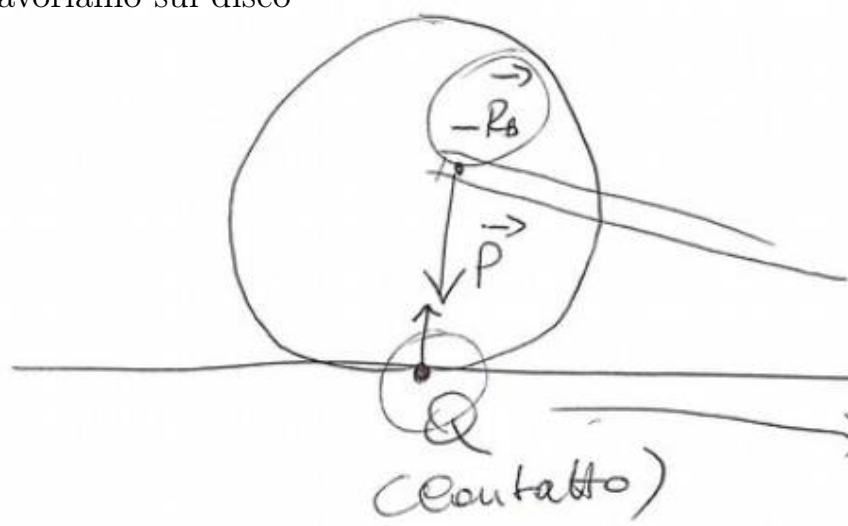
$R_B \in \mathbb{R}$

$$\vec{e} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{15}}{4} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

$$\vec{R}_B = \textcircled{R_B} \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{15}}{4} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$



Impongo che la direzione della forza che agisce su B corrisponda alla retta su cui giace la sbarretta.



$$\vec{N} = \begin{bmatrix} 0 \\ N \end{bmatrix}$$

$$\vec{P} = \begin{bmatrix} 0 \\ -Mg \end{bmatrix}$$

$$\vec{A} = \begin{bmatrix} A \\ 0 \end{bmatrix} \quad A, N \in \mathbb{R}$$

$$\left. \begin{aligned} Ma_x^c &= \frac{\sqrt{15}}{4} R_B + A = 0 \\ Ma_y^c &= -\frac{1}{4} R_B + N - Mg = 0 \end{aligned} \right\} \text{statica}$$

$$V_Q = \underbrace{V_{COM}}_{\substack{\uparrow \\ \text{Il sis. \u00e9 fermo.}}} + \omega R \quad \left. \vphantom{V_Q} \right\} \text{punto di contatto}$$

Se ci fosse puro rotolamento

$$\Rightarrow V_Q = V_{PAVIM} = 0$$

$$\omega R = 0 \quad \text{assurdo}$$

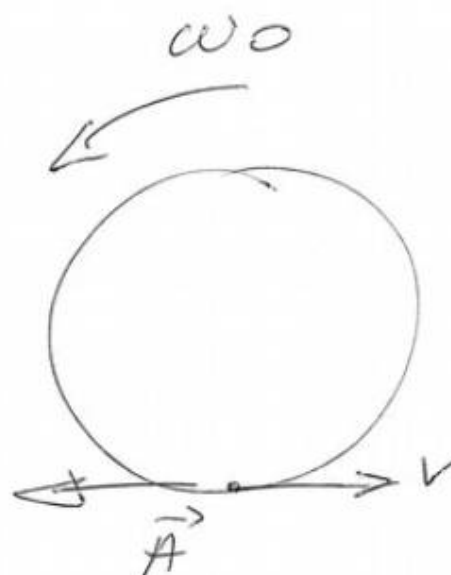
$\Rightarrow$ Non ho puro rotolamento

$$V_Q \neq V_{PAVIM}$$

$\Rightarrow$ Q non \u00e9 fermo rispetto al pavimento

$\Rightarrow$ A \u00e9 ATTR. DINAMICO

$$|A| = \mu_0 |N|$$



Opposto alla
velocità

$$\left\{ \begin{array}{l} R_B \frac{\sqrt{5}}{4} + A = 0 \\ -\frac{R_B}{4} + N - Mg = 0 \end{array} \right.$$

$$A = -\mu_0 (N)$$

3 incognite
 R_B, N, A

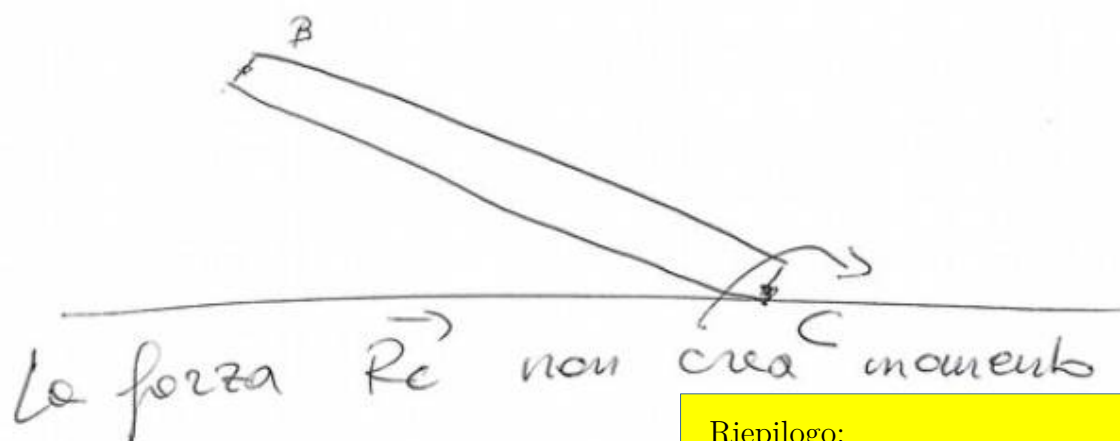
$$N > 0$$

La forza normale è diretta verso la direzione positiva dell'asse y. Se così non fosse, vorrebbe dire che il disco si solleva da terra.

$$\left\{ \begin{array}{l} R_B \frac{\sqrt{5}}{4} + A = 0 \\ -\frac{R_B}{4} + N - Mg = 0 \end{array} \right.$$

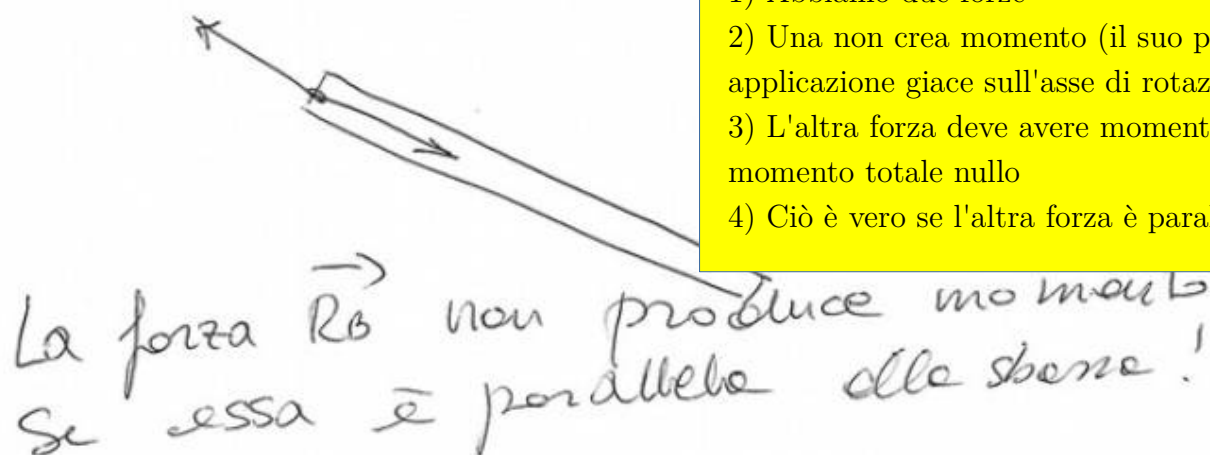
$$A = -\mu_0 N$$

Quali forze creano momenti sulla sbarretta?



Riepilogo:

- 1) Abbiamo due forze
- 2) Una non crea momento (il suo punto di applicazione giace sull'asse di rotazione)
- 3) L'altra forza deve avere momento nulla per aver momento totale nullo
- 4) Ciò è vero se l'altra forza è parallela alla sbarretta.



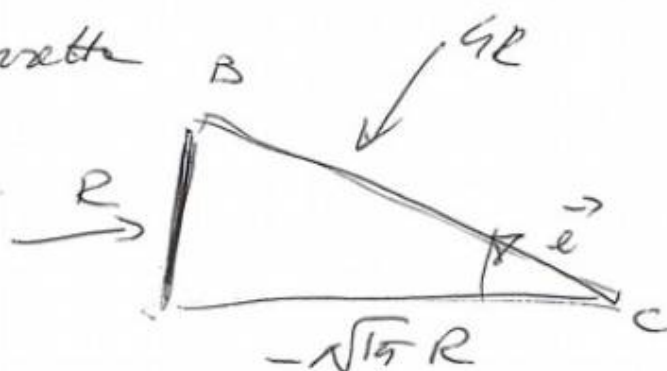
$$\vec{R}_B = R_B \vec{e}$$

$\vec{e}$: direzione della sbarretta

$R_B \in \mathbb{R}$

$$\vec{e} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{15}}{4} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

$$\vec{R}_B = \textcircled{R_B} \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{15}}{4} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$



Impongo che la direzione della forza che agisce su B corrisponda alla retta su cui giace la sbarretta.

$$A = \frac{Mg \sqrt{15} \mu_0}{\mu_0 - \sqrt{15}} < 0$$

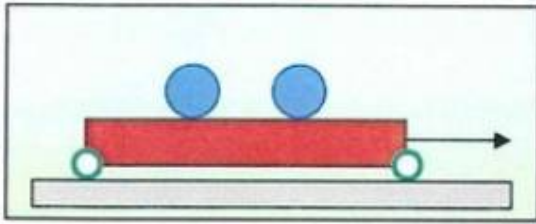
$$N = \frac{Mg \sqrt{15}}{\sqrt{15} - \mu_0} > 0$$

$$R_B = \frac{4Mg \mu_0}{\sqrt{15} - \mu_0} > 0$$

$$\vec{R}_C = -\vec{R}_B = - \left(R_B \vec{e} \right)$$

$\downarrow$
 $\left[\begin{array}{c} -\frac{\sqrt{15}}{9} \\ \frac{1}{9} \end{array} \right]$

Esercizio estratto dall'esame di Fisica 1 del 13 Febbraio 2017

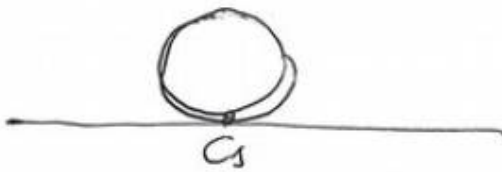


Esercizio 2

Su un binario orizzontale liscio può muoversi un carrello di massa trascurabile e lunghezza $3L$. Sopra il carrello poggiano due cilindri di massa M e raggio R aventi l'asse orizzontale e perpendicolare alla direzione del binario. Tali cilindri possono compiere moto di puro rotolamento sopra il

carrello. A $t=0$ un cilindro si trova a distanza L da un estremo del carrello, l'altro è in posizione simmetrica (vd figura) ed i tre corpi sono immobili. Una forza costante F è applicata al carrello verso destra. A quale istante cade il primo dei cilindri? Quanto lavoro è stato svolto da F fino a tale istante? Verificare che il lavoro calcolato in termini di forza e spostamento eguaglia l'energia cinetica dei cilindri.

Equazioni cilindro 1



$$\vec{A}_1 = \begin{bmatrix} A_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad A_1 \in \mathbb{R}$$

$$Ma_1 = A_1$$

$$I\alpha_1 = A_1 R$$

Equazioni cilindro 2

$$Ma_2 = A_2$$

$$I\alpha_2 = A_2 R$$



$$0 = m a_c = F - A_1 - A_2$$

Equazione carrello

Massa del carrello trascurabile

$$Ma_1 = A_1 \cdot$$

$$I\alpha_1 = A_1 R \cdot$$

$$Ma_2 = A_2 \cdot$$

$$I\alpha_2 = A_2 R \cdot$$

$$F = A_1 + A_2$$

Incognite

$$a_1, A_1, \alpha_1$$

$$a_2, A_2, \alpha_2$$

$$\boxed{a_c}$$

Cond. puro rotolamento

$$a_1 + \alpha_1 R = a_c$$

$$a_2 + \alpha_2 R = a_c$$

7 equations!

$$a_1 = a_2 = \frac{F}{2M}$$

$$a_c = \frac{3}{2} \frac{F}{M}$$

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{F}{MR}$$

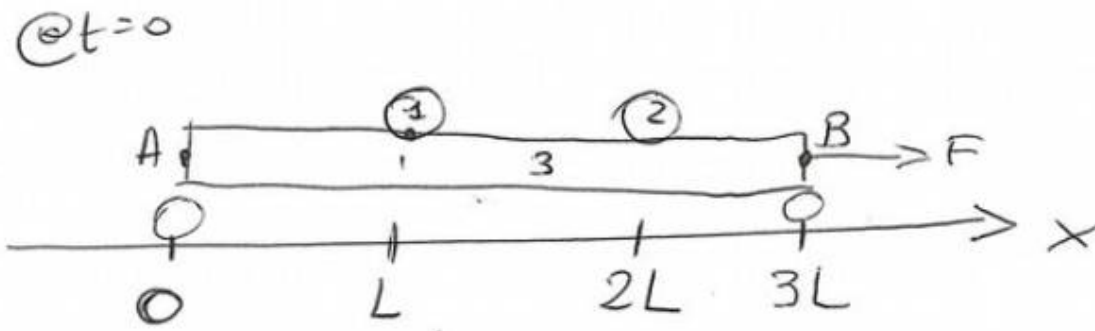
$$A_1 = A_2 = \frac{F}{2}$$

In questo caso la condizione di puro rotolamento impone che l'accelerazione del punto di contatto sia pari All'accelerazione del "pavimento", ovvero del carrello, che non è fermo!

Da notare che la soluzione ci dice che:

- 1) Il carrello ed i cilindri si muovono di moto uniformemente accelerato
- 2) I cilindri ruotano con accelerazione angolare uniforme

Quale cilindro cade per primo? Per rispondere a questa domanda, dobbiamo calcolare le leggi orarie del moto dei tre corpi. Il calcolo di tali leggi orarie è molto semplice, visto che le accelerazioni (lineari e angolari) sono costanti. Possiamo dunque usare le formule tipiche delle leggi orarie del moto uniformemente accelerato.



$$x_1(t) = L + \frac{1}{2} a_1 t^2$$

Legge oraria del cilindro 1

$$\left(x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \right)$$

$$x_2(t) = 2L + \frac{1}{2} a_2 t^2$$

Legge oraria del cilindro 2

$$x_A(t) = \frac{1}{2} a c t^2$$

Legge oraria dell'estremo sinistro
del carrello

$$x_B(t) = 3L + \frac{1}{2} a c t^2$$

Legge oraria dell'estremo destro
del carrello

$$? \exists t_F : x_2(t_F) = x_B(t_F)$$

t_F è l'istante in cui il cilindro 2
raggiunge l'estremo destro

$$? \exists t_F : x_1(t_F) = x_A(t_F)$$

t_F è l'istante in cui il cilindro 1
raggiunge l'estremo sinistro

$$x_2(t_F) = x_B(t_F)$$

$$2L + \frac{1}{2} a_2 t_F^2 = 3L + \frac{1}{2} a_c t^2$$

$$\frac{1}{2} t_F^2 (a_2 - a_c) = L$$

$$\left(\frac{1}{2}\right) t_F^2 \left(\frac{F}{2M} - \frac{3F}{2M}\right) = L \quad \text{impossible}$$

$$x_1(t_F) = x_A(t_F)$$

$$L + \frac{1}{2} a_1 t_F^2 = \frac{1}{2} a_c t_F^2$$

$$\frac{1}{2} t_F^2 (a_c - a_1) = L$$

$$\frac{1}{2} t_F^2 \left(\frac{3F}{2M} - \frac{F}{2M}\right) = L \quad \dots$$

$$t_F = \sqrt{\frac{2ML}{F}}$$

Dunque cade per primo il cilindro 1.

Lavoro svolto fino a t_F

1) Via energetica: lavoro $\equiv$ somma en. cinet. dei 3 corpi.

$$W = K_C + K_1 + K_2$$

└──────────┬──────────┬──────────
 cilindro 2
 cilindro 1
 corneo

• $K_C = 0$. Infatti, la massa del corneo è trascurabile.

$$\begin{aligned} K_1 &= \frac{1}{2} M v_1^2(t_F) + \frac{1}{2} I_{CM1} \omega_1^2(t_F) = \\ &= \frac{1}{2} M (a_1 t_F)^2 + \frac{1}{2} \frac{MR^2}{2} (\alpha_1 t_F)^2 = \\ &= \frac{1}{2} M \frac{F^2}{4M^2} \frac{2ML}{F} + \frac{MR^2}{4} \frac{F^2}{M^2 R^2} \frac{2ML}{F} = \\ &= \frac{FL}{4} + \frac{FL}{2} = \frac{3}{4} FL. \end{aligned}$$

$$K_2 = K_2 \quad (a_1 = a_2 \quad \text{e} \quad \alpha_1 = \alpha_2)$$

$$\Rightarrow W = 0 + \frac{3}{4} FL + \frac{3}{4} FL = \frac{3}{2} FL.$$

2) Usando la definizione.

Le forze $\vec{F}$ $\vec{e}$ applicate nel punto B. $\vec{F}$ $\vec{e}$ costante e parallela allo spostamento. Per cui

$$W = F \left(\underbrace{x_B(t_F) - x_B(0)}_{\text{Spostamento punto B}} \right) =$$

$$= F \left(3L + \frac{1}{2} a_1 t_F^2 - 3L \right) =$$

$$= \frac{F}{2} \frac{3}{2} \frac{F}{M} \frac{2ML}{F} = \frac{3}{2} FL.$$

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

$$= \int_{x_B(0)}^{x_B(t_F)} F dx_B = F \int_{x_B(0)}^{x_B(t_F)} dx_B =$$

$$= F (x_B(t_F) - x_B(0)) .$$

Useando
l'integrale ...