Corso di recupero di Fisica 2018/2019

Dario Madeo

Lezione del 22/03/2019

madeo@dii.unisi.it
http://www.dii.unisi.it/~madeo/crf/crf1819.html

Forza normale

La forza normale $\vec{N}$ è una forza che si genera a causa dell'interazione tra due corpi. Essa si manifesta in **direzione ortogonale** al piano su cui avviene l'interazione. Tale forza rientra nel gruppo delle forze interne, ovvero di quelle forze che sottostanno alla terza legge di Newton. In altri termini, la forza che agisce su un corpo è opposta a quella generata sul secondo corpo.

Forza d'attrito statico

La forza di attrito statico $\vec{A}$ è una forza che si genera a causa dello strisciamento di un corpo su di un altro. Anche questa forza rientra nel gruppo delle forze interne. Nello specifico, la forza che agisce su un corpo è opposta a quella generata sul secondo corpo. Durante l'azione di tali forze, **i corpi sono fermi l'uno rispetto all'altro**; tuttavia entrambi possono essere in moto rispetto ad altri. Il modulo della forza di attrito ha un valore limite:

$$|\vec{A}| \leq F_{\text{A.S. limite}} = \mu_S |\vec{N}|,$$

dove $\mu_S > 0$ è un coefficiente adimensionale che caratterizza la ruvidezza delle superfici (o di una delle due), ed $\vec{N}$ è la forza di reazione normale. Se tale limite viene superato, allora i corpi si muovono relativamente l'uno rispetto all'altro.

Tensione in una fune

Data una fune che collega due corpi e che passa attraverso una carrucola, è possibile che si creino delle forze di reazione (che sottostanno alla terza legge di Newton) sui corpi collegati. Considerando un corpo singolarmente, si ha che la forza di reazione $\vec{T}$ che si genera su di esso soddisfa le seguenti proprietà:

- ha direzione parallela alla fune;
- tale forza è "uscente" dal corpo (se non lo fosse, vorrebbe dire che la fune è floscia e non è presente alcuna tensione).

Inoltre, il modulo della forza che si genera sul primo corpo è uguale alla forza che agisce sul secondo, nonostante a causa della carrucola possano avere direzione diverse.

Forza centripeta

La forza centripeta si manifesta nel caso di moti circolari. Essa corrisponde alla **risultante delle forze** che agiscono in direzione radiale, ossia nella direzione che congiunge il centro di massa del corpo ed il centro della traiettoria (fulcro), e con verso entrante (diretto verso il fulcro).

Si sottolinea che la forza centripeta **non è una forza di reazione o una forza esterna**: essa è semplicemente la risultante di una o più forze.

Sia $\vec{e}_c$ la direzione centripeta. Allora la forza centripeta è nella forma:

$$\vec{F}_C = F_C \vec{e}_c,$$

con $F_C > 0$.

Il modulo della forza centripeta è dato dalla seguente formula:

$$|\vec{F}_C| = M \frac{|\vec{v}_t|^2}{R},$$

dove M è la massa del corpo, $\vec{v}_t$ è la velocità del centro di massa in direzione tangenziale ed R è la distanza tra il centro di massa ed il fulcro.

Da notare che, se $\vec{e}_t$ è il versore associato a $\vec{v}_t$ (ovvero $\vec{v}_t = |\vec{v}_t|\vec{e}_t$), allora:

$$\vec{e}_c \cdot \vec{e}_t = 0 \text{ (prodotto scalare),}$$

ovvero la direzione centripeta è ortogonale a quella tangenziale.

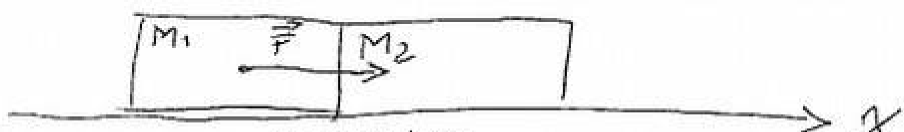
Infine, si noti che un corpo fermo, essendo $\vec{v}_t = \vec{0}$, non subisce alcuna forza centripeta, ovvero $\vec{F}_c = \vec{0}$.

III legge di Newton

$$\vec{F}_{1\to 2} = -\vec{F}_{2\to 1}$$

agisce su 2   agisce su 1

Esempio



pavimento liscio

$$\vec{F} = \begin{bmatrix} F \\ 0 \end{bmatrix}$$

$F > 0$

Forza di reazione che agisce su 2 a causa dell'interzaione con 1 (*)

$$\vec{F}_{1\to 2} = \begin{bmatrix} F_{12} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Forza di reazione che agisce su 1 a causa dell'interzaione con 2 (*)

$$\vec{F}_{2\to 1} = \begin{bmatrix} F_{21} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$F_{12} \in \mathbb{R}$

$F_{21} \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} M_1 a_1 = F + F_{21} \\ M_2 a_2 = F_{12} \end{cases}$$

III LDN

$F_{12} = -F_{21}$

Da notare che i due blocchi si muovono insieme. Da cui: $a_1 = a_2$. Per cui:

$$a_1 = \frac{F}{M_1 + M_2} = a_2$$

$$F_{12} = F \frac{M_2}{M_1 + M_2} > 0$$

$$F_{21} = -F \frac{M_2}{M_1 + M_2} < 0$$

(*) Queste sono forze normali che agiscono ortogonalmente alla superficie di contatto tra i due corpi, ovvero lungo x.

Alcuni casi notevoli

- **Caso "statico"**

$a=0$

Da cui: $Ma = \boxed{\sum F = 0}$

- **Massa trascurabile**

$M=0$

Da cui: $Ma = \boxed{\sum F = 0}$

<u>ma a può essere non nulla!</u>

- **Massa enorme**

$M \to \infty$

Da cui: $Ma = \sum F \Rightarrow a = \frac{\sum F}{M} = 0$.

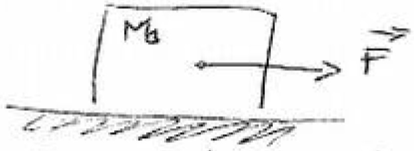
Cioè:

<u>$a=0$ ma $\sum F$ può essere non nulla!</u>

<u>NOTA</u> a: acc. del corpo
$\sum F$: somma delle forze agenti sul corpo.

<u>NOTA</u> a ed F si riferiscono alla direzione lungo la quale non avviene moto.

Esempio



pavimento ruvido

$$\vec{F} = \begin{bmatrix} F \\ 0 \end{bmatrix}, \quad F > 0$$

Si instaura con il pavimento una coppia di forze di reazione, chiamate attrito.

Lavoriamo lungo x

Se il corpo resta fermo, cioè $a_x = 0$, allora:

$$M a_x = F + A = 0$$

$$\hookrightarrow \boxed{A = -F}$$

$$\vec{A} = \begin{bmatrix} A \\ 0 \end{bmatrix}, \quad A \in \mathbb{R}$$

forza di attrito sul corpo M.

Sul pavimento agisce la forza $-\vec{A}$.
Detta M_p la massa del pavimento e a_p la sua accelerazione, si ha che:

$$M_p \, a_p = -A$$

$$a_p = \frac{-A}{M_p} \xrightarrow{M_p \to +\infty} 0$$

Il pavimento ha una massa enorme.

Cioè, il pavimento resta fermo (a_p), nonostante ci sia una forza netta $(-A)$ non nulla.

NOTA Si ha attrito statico finché

$$|\vec{A}| \leq \mu_s |\vec{N}|$$

La forza normale $\vec{N}$ agisce perpendicolarmente al piano dell'interazione tra la massa ed il pavimento.

$\vec{N}$ agisce sul corpo, $-\vec{N}$ agisce sul pavimento

Sia $\vec{N} = \begin{bmatrix} 0 \\ N \end{bmatrix}$, $N \in \mathbb{R}$.

L'equazione del moto del corpo lungo y è:

$$M a_y = N - Mg$$

Poiché il corpo non si muove ~~lungo~~ lungo y, allora $a_y = 0$ e quindi

$$\boxed{N = Mg}$$

Si ha quindi che:

$$|\vec{A}| = |A| = F \leq \mu_s |\vec{N}| = \mu_s Mg$$

Quindi:

$$F \leq \mu_s Mg$$ condizione per avere attrito statico.

Riepilogo

- Forza netta agente sul corpo:

$$\vec{F} + \vec{P} + \vec{A} + \vec{N} = \begin{bmatrix} F \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -Mg \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -F \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ Mg \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

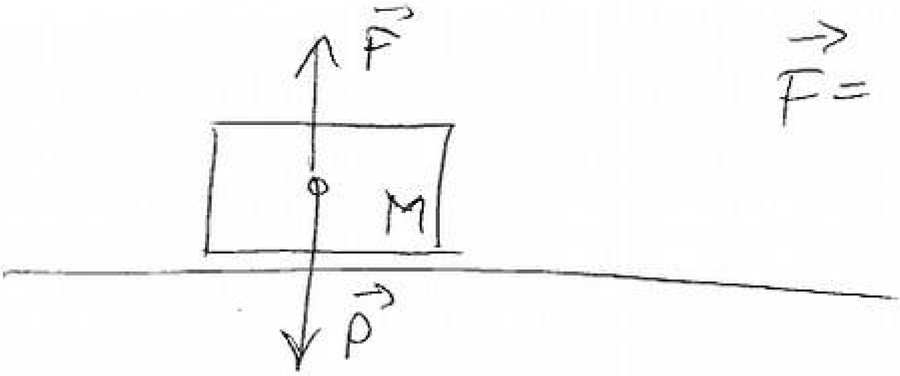
$\Rightarrow$ Il corpo è fermo.

- Forza nella sul pavimento:

$$-\vec{A} - \vec{N} = -\begin{bmatrix} -F \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ Mg \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \\ -Mg \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Tuttavia, avendo massa enorme, esso rimane fermo!

Esempio



$$\vec{F} = \begin{bmatrix} 0 \\ F \end{bmatrix} \quad F > 0$$

Lungo y $\quad Ma_y = F - Mg + N = 0$

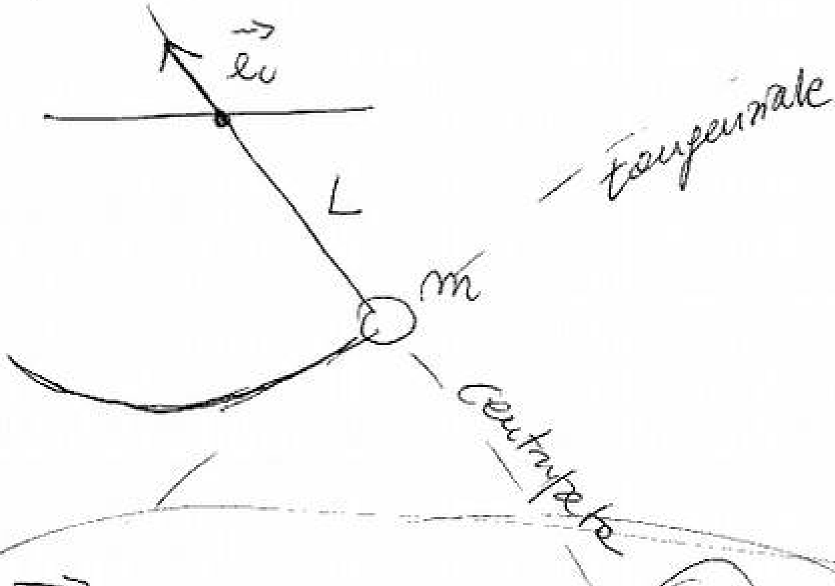
$$\hookrightarrow \boxed{N = Mg - F}$$

Se $Mg > F$, resto a terra.
È valido dire che $N = Mg - F > 0$.
Se $Mg < F$, mi alzo e N non esiste.

Nota – Se il corpo si solleva, non c'è più interazione tra corpo e pavimento. Quindi non c'è ragione per cui debba esistere una forza di reazione tra i due come la forza normale.

Forza centripeta

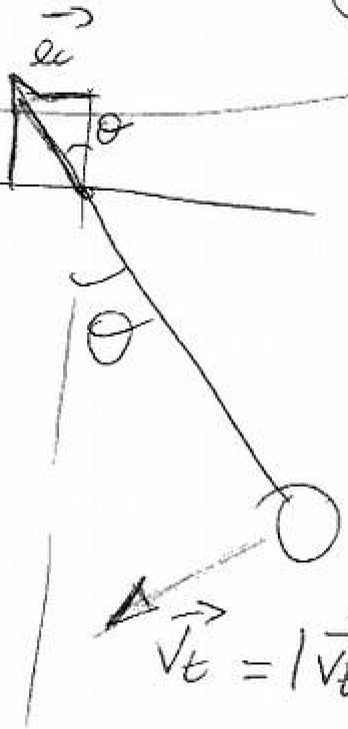
$$|\vec{F_c}| = m|\vec{a_c}| = m\frac{|\vec{v_t}|^2}{L}$$



La forza centripeta è legata alla velocità tangenziale.

$$\vec{F_c} = m|\vec{a_c}|\vec{e_c}$$

$\vec{e_c}$ = versore che indica direzione e verso centripeto

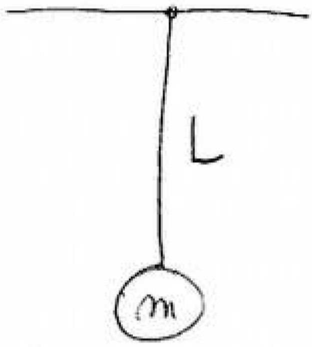


$$\vec{e_c} = \begin{bmatrix} -\sin\theta \\ +\cos\theta \end{bmatrix}$$

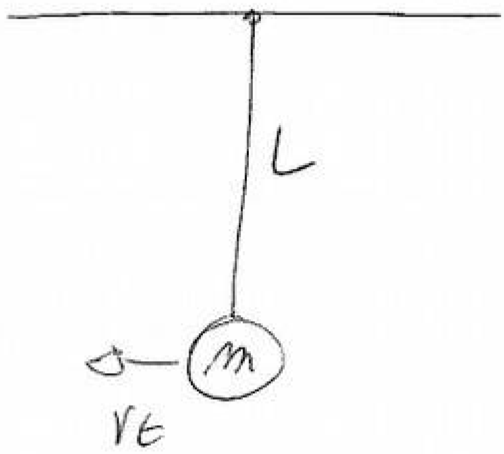
$$\vec{v_t} = |\vec{v_t}|\vec{e_t} \qquad \vec{e_t} = \begin{bmatrix} -\cos\theta \\ -\sin\theta \end{bmatrix}$$

$\vec{F_c} = A\,\vec{e_c}$

È centripeta sse $A > 0$

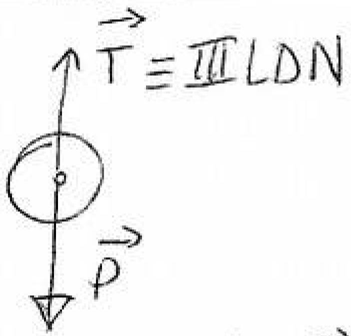


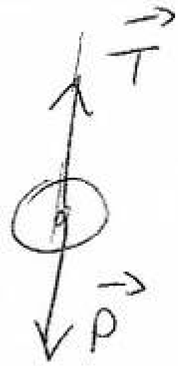
fermo



in moto

Non ho centripeta





$\vec{e_c} = \vec{y}$

È fermo $\Rightarrow m\vec{a} = \vec{P} + \vec{T} = \vec{0}$

$\vec{P} = \begin{bmatrix} 0 \\ -mg \end{bmatrix} \quad \vec{T} = \begin{bmatrix} 0 \\ T \end{bmatrix}$

$\boxed{T = mg}$

$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{T} \cancel{= \vec{0}} \neq 0$

Lungo y

$\boxed{F_c = -mg + T}$

$\boxed{T = mg + F_c}$

$$F_c = T - mg = m\frac{|\vec{v}_t|^2}{L} > 0$$

A

$$\Rightarrow \boxed{T > mg}$$ garantisce la presenza di forza centripeta

---

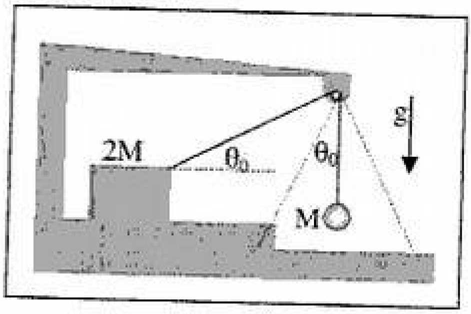
Con l'esempio precedente abbiamo messo a confronto un pendolo in quiete con un in movimento. Abbiamo confrontato in particolare la situazione statica con quella in cui il pendolo sta transitando dalla posizione verticale. Le due configurazioni sono identiche da un punto di vista geometrico, ma hanno delle profonde differenze da un punto di vista delle forze in gioco.

1) Nel caso statico si ha che la forza di reazione del filo è uguale ed opposta alla forza peso.

2) Nel caso dinamico questo non è possibile. Infatti, il netto di queste due forze deve essere non nullo e diretto in direzione centripeta per garantire il moto di rotazione.
La forza centripeta è pari al netto di tutte le forze agenti lungo quella direzione.

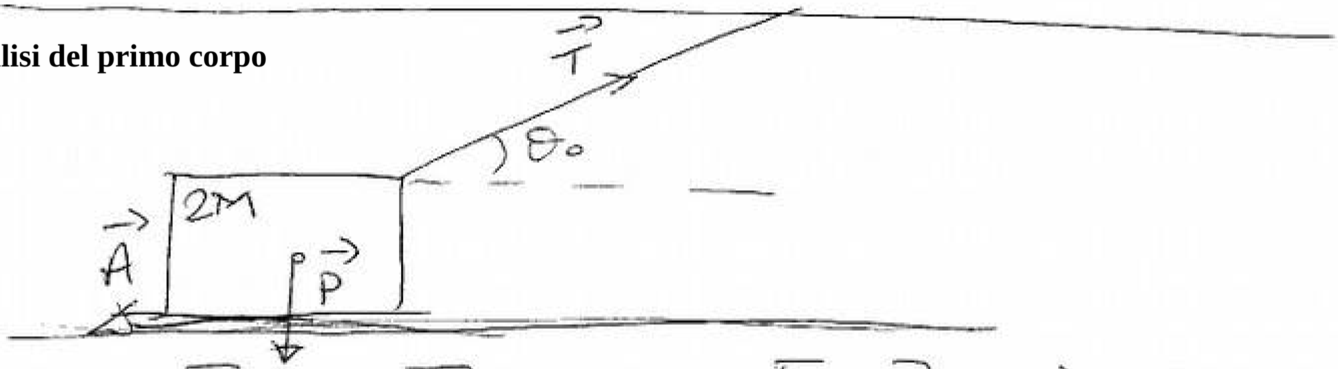
Esercizio estratto dall'esame di Fisica 1 del 17 Settembre 2015

Esercizio 1



La figura mostra un piano orizzontale scabro su cui poggia un corpo di massa 2M che è connesso, tramite un filo ideale rinviato da una minuscola carrucola priva di attriti, ad un corpo sospeso di massa M. Il tratto di filo obliquo forma un angolo θ_0 con l'orizzontale. Il corpo sospeso compie oscillazioni di semiampiezza θ_0. Per quali valori del coefficiente d'attrito radente statico μ_S il corpo appoggiato resta fermo? Si supponga che esso resti effettivamente fermo. Quanto è intensa la reazione sull'asse della carrucola, quando il pendolo è alla massima elongazione verso destra e verso sinistra?

Analisi del primo corpo



$$\vec{P} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2Mg \end{bmatrix} \qquad \vec{N} = \begin{bmatrix} 0 \\ N \end{bmatrix} \qquad \vec{T} = \begin{bmatrix} T\cos\theta_0 \\ T\sin\theta_0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{A} = \begin{bmatrix} A \\ 0 \end{bmatrix}$$

$N \in \mathbb{R}$

$A \in \mathbb{R}$

$T > 0$

$$\vec{R}_P = \vec{A} + \vec{N} = \begin{bmatrix} A \\ N \end{bmatrix}$$ reazione provocata dal pavimento.

Riepilogo:
P = forza peso
N = forza normale (interazione tra corpo e pavimento)
T = tensione della fune
A = forza di attrito statico

Il testo del problema ci dice che il corpo rimane sempre ferrmo.

$$2M a_x = T\cos\vartheta_0 + A = 0 \quad (\text{fermo})$$

$$2M a_y = -2Mg + N + T\sin\vartheta_0 = 0 \quad (\text{fermo})$$

$$\hookrightarrow \quad A = -T\cos\vartheta_0 < 0$$

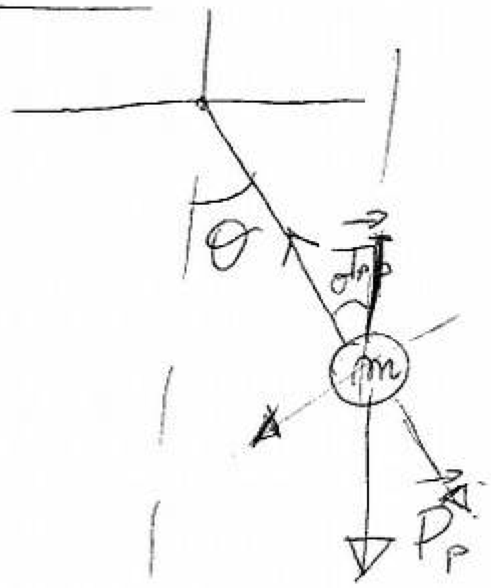
$$N = 2Mg - T\sin\vartheta_0 > 0$$

condizione di "non sollevamento"

Condizione per l'esistenza dell'attrito statico:

$$\boxed{|A| < \mu_s |N|}$$

Pendolo

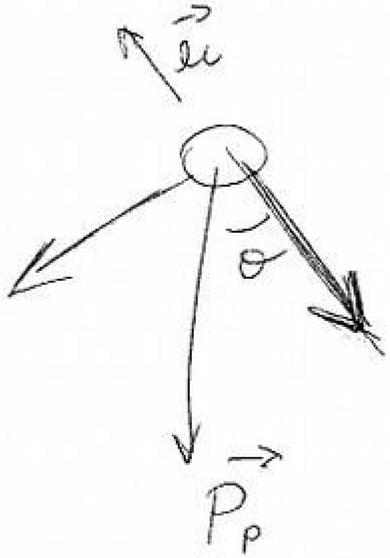


$\theta \in [-\theta_0 \, ; +\theta_0]$ generica oscillazione del pendolo.

$$\vec{P_p} = \begin{bmatrix} 0 \\ -Mg \end{bmatrix}$$

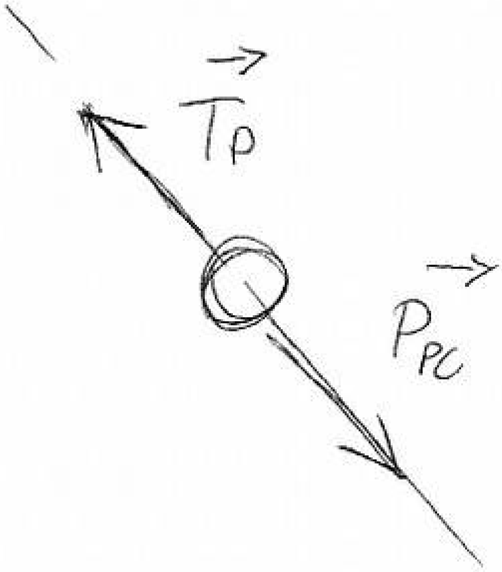
$$\vec{T_p} = \begin{bmatrix} -T_p \sin\theta \\ T_p \cos\theta \end{bmatrix} \qquad T_p > 0$$

$\boxed{\vec{T_p} = T_p \, \vec{e_c}}$ È in direzione centripeta.



$$\vec{P_{pc}} = -\underbrace{Mg\cos\theta}_{\text{Modulo}} \, \vec{e_c}$$

Riepilogo:
Pp = forza peso
Ppc = componente forza peso lungo la direzione radiale
Tp = tensione della fune



$$\vec{F_c} = \vec{T_p} + \vec{P_{pc}}$$

forza centrifuga
$\equiv$
somma di tutte le forze agenti in direzione centripeta.

$$\vec{F_c} = T_p \vec{e_c} + (-Mg\cos\theta)\vec{e_c}$$

$$= \underbrace{(T_p - Mg\cos\theta)}_{A}\vec{e_c} .$$

$$\boxed{\begin{array}{l} T_p > Mg\cos\theta \\ \forall\theta \end{array}}$$

per avere forza centripeta.

Quant'è T_P ?

$$|\vec{F_c}| = \frac{M|\vec{V_t}(\theta)|^2}{L}$$

$$|(T_P - Mg\cos\theta)\vec{e_c}| = \frac{M|\vec{V_t}(\theta)|^2}{L}$$

NOTA $\quad |\alpha\vec{e}| = |\alpha| \quad$ con $|\vec{e}| = 1$

$$|T_P - Mg\cos\theta| = \frac{M|\vec{V_t}(\theta)|^2}{L}$$

Siccome $T_P > Mg\cos\theta$ allora

$$T_P - Mg\cos\theta = \frac{M|\vec{V_t}(\theta)|^2}{L}$$

$$\boxed{T_P^{(\theta)} = \frac{M|\vec{V_t}(\theta)|^2}{L} + Mg\cos\theta}$$

Prima di continuare, facciamo qualche riflessione sul problema.

1) L'espressione della tensione sul pendolo dipende dal modulo al quadrato del modulo della velocità tangenziale.

2) Il quadrato del modulo di una velocità ci fa subito pensare all'energia cinetica del pendolo.

3) Nel sistema è presente la forza d'attrito statico che **tiene fermo** il corpo di massa 2M. Tale forza, in virtù del fatto che il corpo resta fermo, non compie lavoro!

4) La tensione della fune che agisce sul corpo di massa 2M, la forza peso e la reazione normale non compiono lavoro poichè il corpo resta fermo.

5) La tensione della fune che agisce sul pendolo non compie lavoro. Infatti, essa è sempre ortogonale allo spostamento del pendolo (la direzione centripeta è ortogonale alla direzione tangenziale).

6) L'unica forza che compie lavoro è quindi la gravità che agisce sul pendolo. Essa è conservativa.

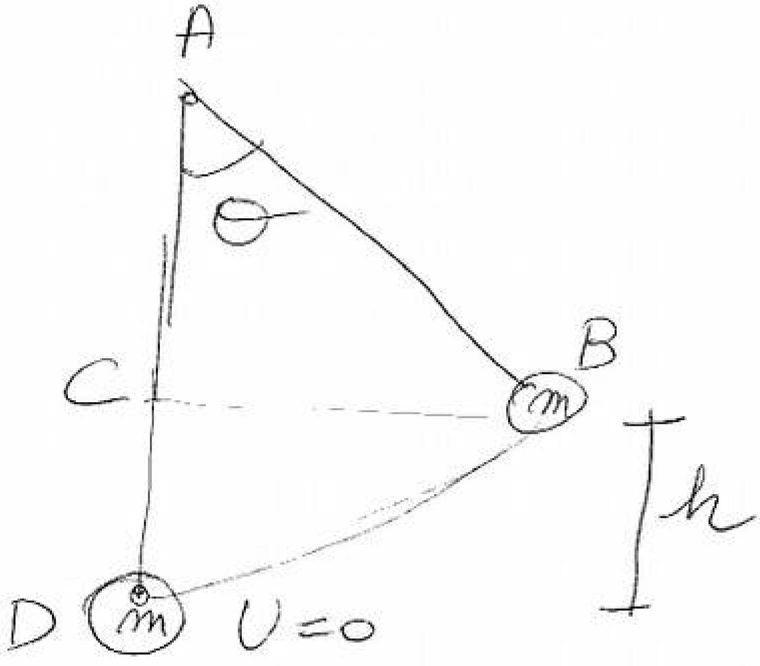
Conclusione: si conserva l'energia meccanica del sistema!!!

Il pendolo si muove sotto l'azione di forze conservative.

Energia meccanica

1) $K = \frac{1}{2} M |\vec{V_t}|^2$

2) $U = ?$



$\overline{AB} = L \qquad \overline{AD} = L$

$\overline{AC} = L\cos\theta$

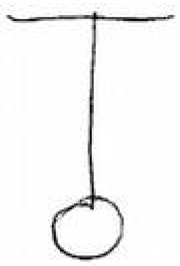
$\overline{DC} = \overline{AD} - \overline{AC} = L - L\cos\theta = L(1-\cos\theta) = h$

$$U = MgL(1-\cos\theta)$$

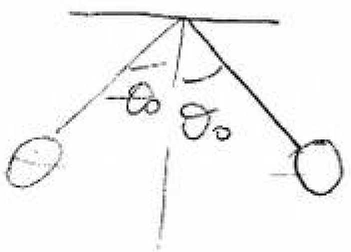
3) $E = \frac{1}{2} M |\vec{V_t}|^2 + MgL(1-\cos\theta)$.

$$E(\theta=0) = \frac{1}{2} M \, |\vec{v}_t(0)|^2$$

Posizione verticale



$$E(\theta=\theta_0) = MgL(1-\cos\theta_0) = E(\theta=-\theta_0)$$



Massima elongazione del pendolo

$$E(\theta=0) = E(\theta=\theta_0)$$

$$\frac{1}{2} M \, |\vec{v}_t(0)|^2 = MgL(1-\cos\theta_0)$$

$$\boxed{|\vec{v}_t(0)|^2 = 2gL(1-\cos\theta_0)}$$

$$E(\theta) = \frac{1}{2} M|\vec{V_t}|^2 + MgL(1-\cos\theta)$$

$$E(\theta_0) = MgL(1-\cos\theta_0)$$

$$E(\theta) = E(\theta_0)$$ conservazione.

$$\frac{1}{2} M|\vec{V_t}|^2 + MgL(1-\cos\theta) = MgL(1-\cos\theta_0)$$

$$\frac{1}{2} \cancel{M}|\vec{V_t}|^2 = \cancel{M}gL(\cos\theta - \cos\theta_0)$$

$$\boxed{|\vec{V_t}(\theta)|^2 = 2gL(\cos\theta - \cos\theta_0)}$$

$$\boxed{\begin{aligned} T_P &= 2Mg(\cos\theta - \cos\theta_0) + Mg\cos\theta \\ &= 3Mg\cos\theta - 2Mg\cos\theta_0. \end{aligned}}$$

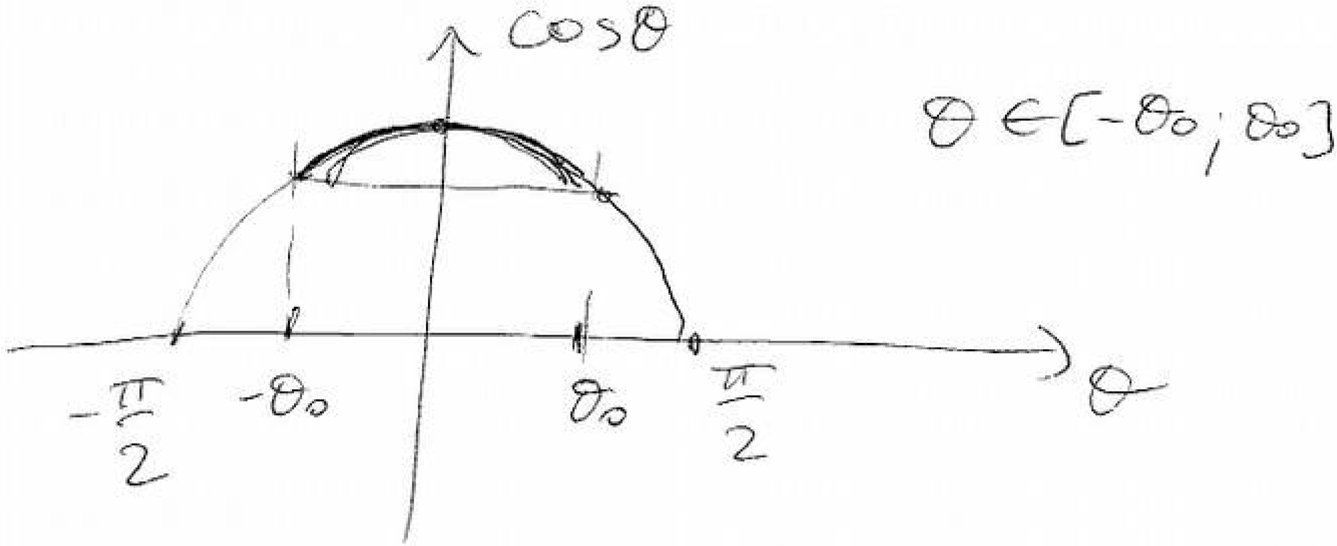
Cond. di forza centripeta : $T_P > Mg\cos\theta$

$$3Mg\cos\theta - 2Mg\cos\theta_0 > Mg\cos\theta$$

$$2Mg\cos\theta > 2Mg\cos\theta_0$$

$$\boxed{\cos\theta > \cos\theta_0}$$

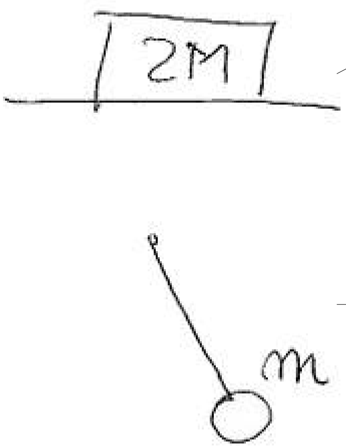
Questa espressione deve essere soddisfatta per avere forza centripeta!!!



$$\cos\theta > \cos\theta_0 \quad \forall \theta \in [-\theta_0 ; \theta_0].$$

Questo grafico mostra che è sempre vero che il netto delle forze che agisce sulla direzione che congiunge il pendolo al fulcro è in direzione centripeta.

Riepilogo



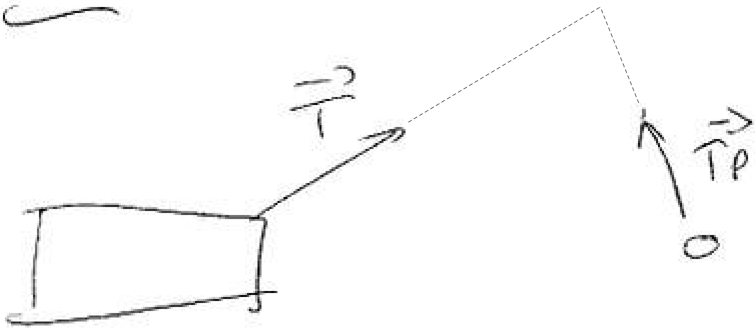
$$A = -T\cos\theta_0$$

$$N = 2Mg - T\sin\theta_0$$

$$|A| \leq \mu_s |N|$$

$$T_p = Mg\,(3\cos\theta - 2\cos\theta_0)$$

Fune



Proprietà della fune

$$\boxed{T = T_p}$$

Quanto deve valere μ_s?

$$|A| \leq \mu_s |N|$$

$$T\cos\theta_0 \leq \mu_s (2Mg - T\sin\theta_0)$$

$$T\cos\theta_0 + \mu_s T\sin\theta_0 \leq \mu_s 2Mg$$

$$T \leq \frac{\mu_s 2Mg}{\cos\theta_0 + \mu_s \sin\theta_0} \qquad \forall\theta$$

$$T_{MAX} \leq \frac{\mu_s 2Mg}{\cos\theta_0 + \mu_s \sin\theta_0}$$

Nota - Sia x* tale che f(x*) > f(x) per ogni x e supponiamo che f(x) < a per ogni x. Allora anche f(x*) < a.

$$T(\theta) = Mg\,(3\cos\theta - 2\cos\theta_0)$$

E' facile verificare che T assume il suo massimo per $\theta = 0$.

$$T_{MAX} = T(\theta = 0)$$

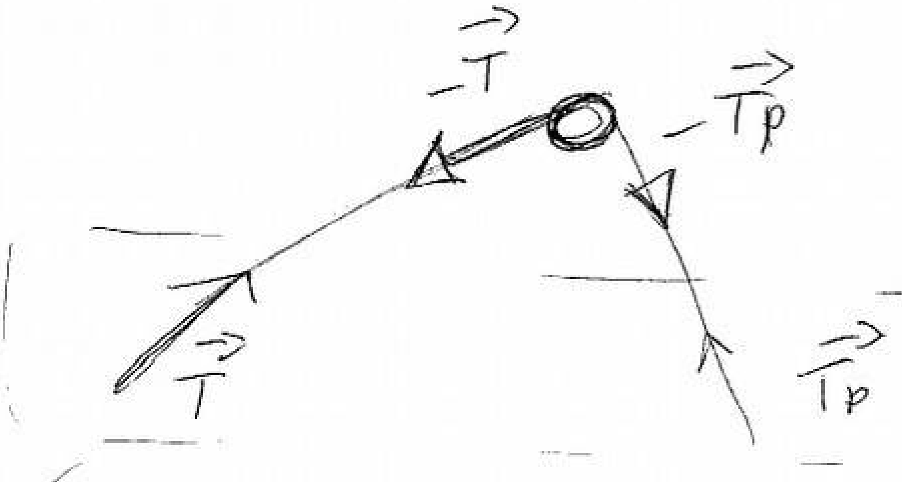
$$= Mg\,(3 - 2\cos\theta_0)$$

$$\cancel{Mg}\,(3 - 2\cos\theta_0) \le \frac{\mu_s 2 \cancel{Mg}}{\cos\theta_0 + \mu_s \sin\theta_0}$$

$$(3 - 2\cos\theta_0)(\cos\theta_0 + \mu_s \sin\theta_0) \le 2\mu_s$$

$$\hookrightarrow \dots \quad \mu_s \le \frac{2 - 3\cos\theta_0 + 2\cos^2\theta_0}{\sin\theta_0\,(3 - 2\cos\theta_0)}$$

Diagramma delle forze sulla carrucola



$$\vec{R} = \begin{bmatrix} R_x \\ R_y \end{bmatrix}$$

Forza di reazione tra carrucola e soffitto

Al solito, le componenti sono numeri reali (non so a priori il loro segno).

$$\left(\vec{T} \neq \vec{T_p} \qquad T = T_p \right)$$

$$\begin{cases} M_s a_{xs} = -T\cos\theta_0 + T\sin\theta + R_x = 0 \\ M_s a_{ys} = -T\sin\theta_0 - T\cos\theta + R_y = 0 \end{cases}$$

$$\vec{R} = \begin{bmatrix} T(\sin\theta - \cos\theta_0) \\ T(\cos\theta + \sin\theta_0) \end{bmatrix}$$

reazione sulla carrucola.

$$\vec{R}(\theta=\theta_0) = \begin{bmatrix} T(\theta_0)(\sin\theta_0 - \cos\theta_0) \\ T(\theta_0)(\cos\theta_0 + \sin\theta_0) \end{bmatrix} = \ldots *$$

$$\vec{R}(\theta=-\theta_0) = \begin{bmatrix} T(-\theta_0)(-\sin\theta_0 - \cos\theta_0) \\ T(-\theta_0)(\cos\theta_0 + \sin\theta_0) \end{bmatrix} = \ldots$$

$$|\vec{R}(\theta=\theta_0)| = \sqrt{2} \cdot T(\theta_0)$$

$$|\vec{R}(\theta=-\theta_0)| = T(\theta_0)\sqrt{2(1+2\sin 2\theta_0)}$$