Corso di recupero di Fisica 2018/2019

Dario Madeo

Lezione del 15/03/2019

madeo@dii.unisi.it
http://www.dii.unisi.it/~madeo/crf/crf1819.html

Breve richiamo sui vettori

Un **vettore** in $\mathbb{R}^N$ è una sequenza **ordinata** di N numeri reali. Sono di interesse per il CRF i vettori appartenenti ad $\mathbb{R}^2$ e ad $\mathbb{R}^3$. Un vettore viene rappresentato algebricamente come segue:

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \text{ e } \vec{v} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

In fisica, una **grandezza vettoriale** è una grandezza fisica caratterizzata da un vettore (quindi una sequenza ordinata di numeri reali), in contrapposizione ad una **grandezza scalare**, che è caratterizzata solamente da un numero.

I pedici x, y e z chiariscono il perché il vettore per gli scopi fisici debba una sequenza ordinata: infatti, gli **spazi vettoriali** $\mathbb{R}^2$ ed $\mathbb{R}^3$ sono una rappresentazione dello **spazio reale** in cui i fenomeni fisici esaminati si sviluppano.

Dato un vettore, è possibile definire il suo **modulo** (o **intensità**), la sua **direzione** ed il suo **verso**. Questi tre concetti hanno delle importanti interpretazioni dal punto di vista **geometrico**, legati al fatto che le grandezze vettoriali agiscono, come detto in precedenza, nello spazio.

Un vettore nello spazio viene rappresentato come una **freccia**. In particolare, il modulo si interpreta geometricamente come la lunghezza di tale freccia, ed è definito come segue:

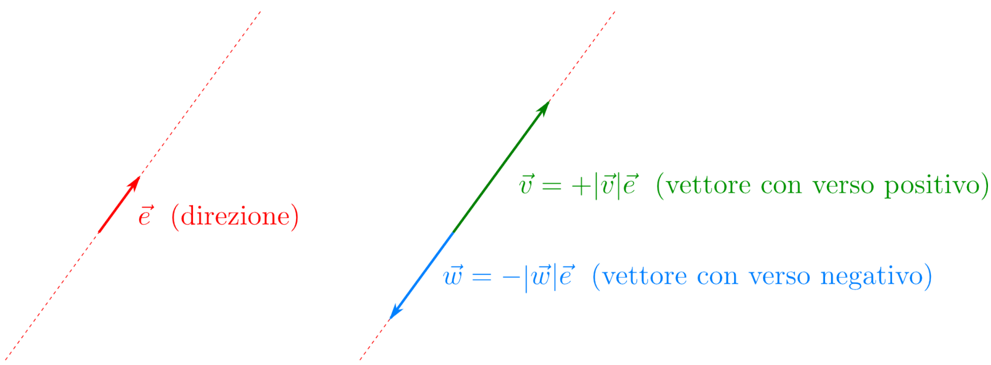
$$|\vec{v}| = \begin{cases} \sqrt{v_x^2 + v_y^2} & \text{se siamo nello spazio } \mathbb{R}^2 \\ \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} & \text{se siamo nello spazio } \mathbb{R}^3 \end{cases}.$$

Per direzione, si intende la retta su cui giace il vettore. Spesso, la direzione viene rappresentata per mezzo di **versori**, ovvero di vettori il cui modulo è pari a 1. Il verso indica la direzione (attenzione alla nomenclatura!) verso cui punta la freccia che rappresenta il vettore. Inoltre, la descrizione di una grandezza vettoriale può essere completata, quando necessario, specificando il suo **punto di applicazione**

A valle di questo ragionamento, possiamo dire che un vettore può essere alternativamente rappresentato come segue:

$$\vec{v} = \underbrace{\pm}_{\text{verso}} \underbrace{|\vec{v}|}_{\text{modulo}} \underbrace{\vec{e}}_{\text{direzione}},$$

dove $\vec{e}$ è un versore (ovvero $|\vec{e}| = 1$) che indica la direzione del vettore, mentre il "$\pm$" all'inizio della formula ci dice il verso del vettore.



Dato un vettore $\vec{v}$, è possibile ricavare il versore che rappresenta il la sua direzione come segue:

$$\vec{e} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}.$$

In questa maniera, possiamo scrivere $\vec{v}$ come segue:

$$\vec{v} = +|\vec{v}|\vec{e}.$$

Da notare che, con questa procedura, il verso di $\vec{v}$ rispetto alla direzione rappresentata di $\vec{e}$ è automaticamente quello positivo. Si noti inoltre che, il vettore

$$\vec{f} = -\vec{e}$$

è a sua volta un versore. Rispetto alla direzione rappresentata da $\vec{f}$, il vettore $\vec{v}$ ha invece verso negativo. Infatti:

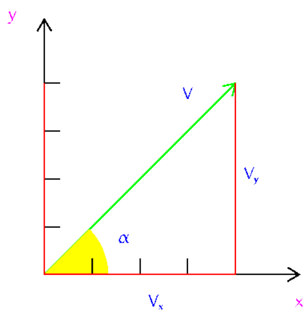
$$\vec{v} = +|\vec{v}|\vec{e} = -|\vec{v}|(-\vec{e}) = -|\vec{v}|\vec{f}.$$

La morale è che il concetto di verso è strettamente connesso al modo in cui definiamo la direzione.

Se ci concentriamo sullo spazio $\mathbb{R}^2$, esistono delle relazioni molto importanti che legano il concetto di vettore al mondo della trigonometria. In particolare, è possibile riscrivere un vettore $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ come segue:

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} = \vec{v} \begin{bmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{bmatrix},$$

dove α rappresenta l'angolo che si forma tra l'asse positivo delle ascisse ed il vettore in senso antiorario.



Si nota immediatamente che il vettore

$$\vec{e} = \begin{bmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{bmatrix},$$

è un versore. Infatti:

$$|\vec{e}| = \sqrt{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha} = 1.$$

Dunque, l'angolo α determina direzione (ed implicitamente il verso) del vettore $\vec{v}$.

Si osserva che, se è nota la rappresentazione algebrica del vettore (quindi sono noti v_x e v_y), allora:

$$\begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{v_x}{|\vec{v}|} \\ \sin\alpha = \dfrac{v_y}{|\vec{v}|} \end{cases}.$$

Consideriamo ora due vettori $\vec{v}$ e $\vec{w}$ che condividono la stessa direzione $\vec{e}$ e lo stesso verso. In altre parole, l'angolo α è uguale per entrambi. Si ha che:

$$\begin{cases} \vec{v} = |\vec{v}|\vec{e} \\ \vec{w} = |\vec{w}|\vec{e} \end{cases}$$

Inoltre:

$$\begin{cases} \cos\alpha = \frac{v_x}{|\vec{v}|} \\ \sin\alpha = \frac{v_y}{|\vec{v}|} \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \cos\alpha = \frac{w_x}{|\vec{w}|} \\ \sin\alpha = \frac{w_y}{|\vec{w}|} \end{cases} \quad .$$

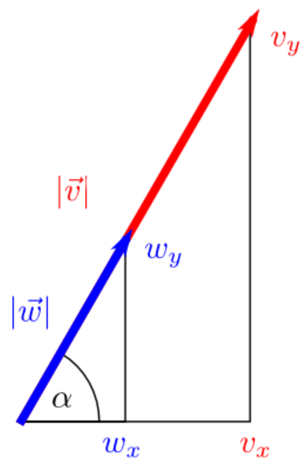
Dunque:

$$\begin{cases} \frac{v_x}{|\vec{v}|} = \frac{w_x}{|\vec{w}|} \\ \frac{v_y}{|\vec{v}|} = \frac{w_y}{|\vec{w}|} \end{cases} \quad .$$

e quindi:

$$v_x : w_x = v_y : w_y = |\vec{v}| : |\vec{w}|.$$

In altri termini, le componenti x dei due vettori stanno in proporzione fra loro come le loro componenti y e come i loro rispettivi moduli. Questa relazione risulta particolarmente importante per trattare alcuni problemi geometrici in cui non è noto l'angolo α che caratterizza direzione e verso di alcuni vettori. Questo fatto è anche noto come terzo criterio di congruenza tra triangoli[1] (in questo caso rettangoli).



[1] Euclide, "Gli Elementi", 300 a.C. circa

Nozioni di fisica utilizzate in questa lezione

□ **Energia cinetica**
Ogni corpo in moto possiede energia cinetica. Per un generico corpo rigido di massa M che compie un moto di traslazione/rotazione su di un piano (asse di rotazione perpendicolare al piano), si ha che:

$$K = \frac{1}{2}M|\vec{v}_0|^2 + \frac{1}{2}I_O\omega^2,$$

dove $\vec{v}_0$ è la velocità del centro di massa, I_0 è il momento di inerzia del corpo calcolato rispetto ad un asse parallelo a quello di rotazione e passante per il centro di massa, e ω è la velocità angolare del corpo rispetto all'asse di rotazione.
Si noti che, se d è la distanza tra l'asse di rotazione ed il centro di massa, allora $|\vec{v}_0| = |\omega|d$, e quindi:

$$K = \frac{1}{2}Md^2\omega^2 + \frac{1}{2}I_O\omega^2 = \frac{1}{2}(Md^2 + I_O)\omega^2 = \frac{1}{2}I\omega^2,$$

dove $I = I_O + Md^2$ è il momento di inerzia del corpo calcolato rispetto all'asse di rotazione. Si ricorda che $I = I_O + Md^2$ è anche noto come Teorema di Huygens-Steiner.

□ **Energia potenziale gravitazionale**
Poiché la forza peso è conservativa, è possibile associarvi l'energia potenziale gravitazionale:

$$U_g = Mgh,$$

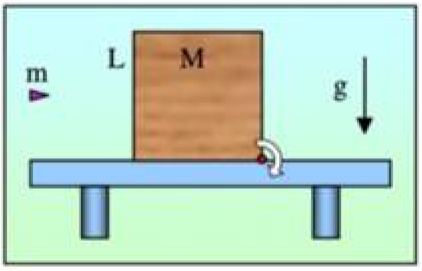
dove h indica la quota del centro di massa del sistema.

□ **Energia potenziale di una molla**
Poiché la forza esercitata da una molla è conservativa, è possibile associarvi la seguente energia potenziale:

$$U_k = \frac{1}{2}k(L - L_0)^2,$$

dove L è la lunghezza della molla ed L_0 è l lunghezza di riposo.

Estratto dall'esame di Fisica 1 del 9 Settembre 2016

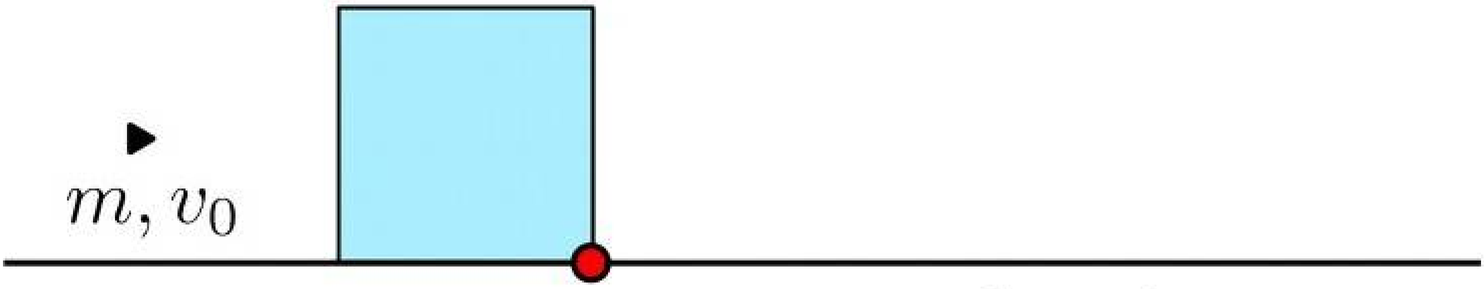


Esercizio 1

Un cubo omogeneo di massa M e lato L poggia con una faccia su un piano orizzontale ed è fermo. Esso può ruotare intorno a uno degli spigoli appoggiati sul piano, che è fisso. Un proiettile di massa m (con m<<M) giunge con velocità $\underline{\mathbf{v}}_0$ perpendicolare alla faccia opposta a quella soprastante il fulcro e si conficca nel suo centro.

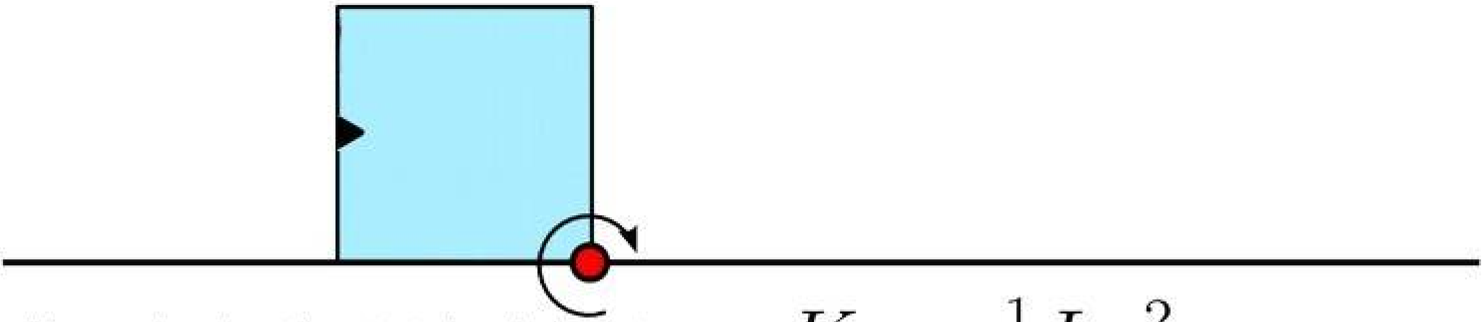
a) Discutere quali quantità si conservano durante l'urto e dopo l'urto.
b) Esprimere in termini di m, v_0, M, L e g l'energia persa nell'urto nel caso in cui il cubo si sollevi fino ad un angolo massimo pari a 15° (angolo tra faccia inferiore e piano).
c) Calcolare il momento d'inerzia I del cubo rispetto al fulcro.
d) Determinare per quali valori di v_0 si osserva un ribaltamento del cubo [stavolta si richiede di rispondere in termini di m, M, I, L, g].

Prima dell'urto



Energia cinetica totale del sistema: $K = \frac{1}{2}mv_0^2$

Subito dopo l'urto



Energia cinetica totale del sistema: $K_1 = \frac{1}{2}Iw_1^2$

Nota teorica
Durante l'urto (fenomeno istantaneo), si ha trasferimento di energia cinetica tra i due corpi (proiettile e cubo). Se l'urto è anaelastico (come in questo caso), l'energia cinetica iniziale di tutto il sistema è superiore a quella finale, ovvero si osserva una perdita di energia. Invece, in un urto perfettamente elastico non si ha alcuna perdita di energia.

Se è avvenuto un trasferimento di energia cinetica, i due corpi si sono uniti, ed il cubo può solo ruotare intorno al fulcro, allora vuol dire che il cubo ha "guadagnato" istantanemente una velocità angolare ω_1 non nulla! L'energia cinetica K_1 infatti dipende da tale velocità angolare.

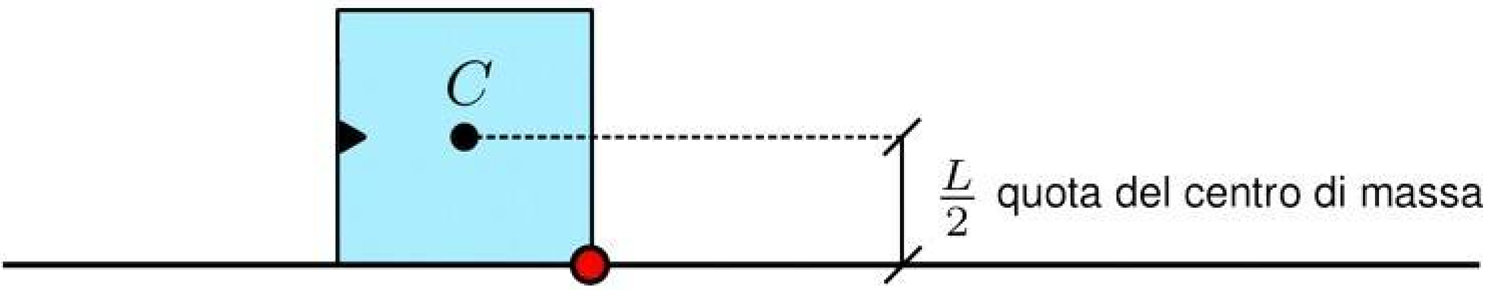
Negli urti, elastici e non, è in generale vero che altre grandezze, come ad esempio la quantità di moto ed il momento angolare, potrebbero rimanere invariate. **Di questo fatto si parlerà in altre lezioni del corso**. Da notare che, grazie a queste leggi di conservazione, è possibile calcolare ω_1. Noti ω_1 ed I, è possibile calcolare K_1, e quindi anche la perdita di energia $K - K_1$.

Agire in questa maniera non è sbagliato, ma purtroppo incompleto. Infatti, il testo dell'esercizio (punto b) richiede di calcolare la perdita di energia $K - K_1$ nel caso in cui il cubo sia in grado di sollevarsi fino ad un angolo massimo di 15°, in funzione di tutte le grandezze in gioco (m, M, L, v_0) ed anche della gravità g.

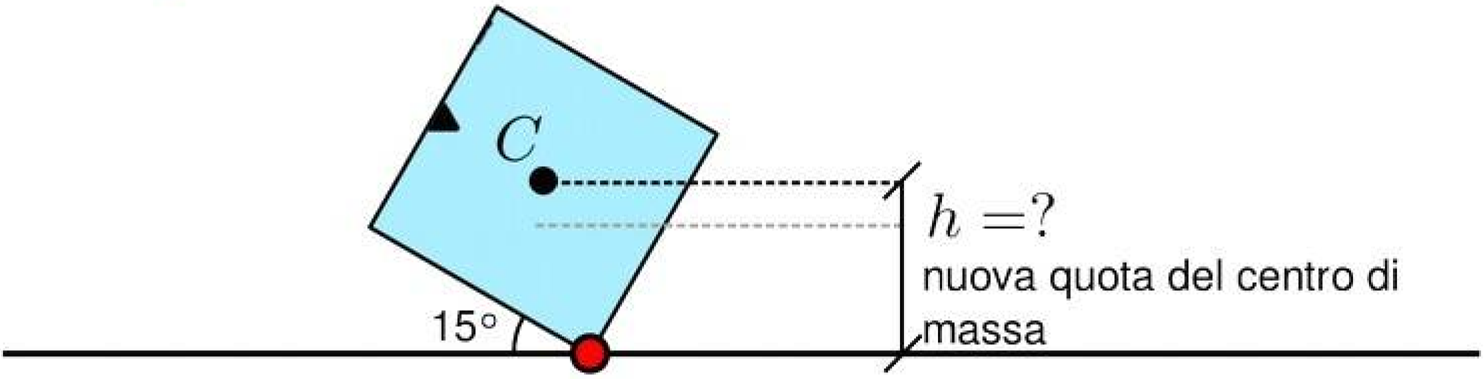
Da notare che, se l'energia cinetica totale del sistema è diminuita, vuole dire che durante l'urto hanno agito forze non conservative. Pertanto, in questa fase, non ha senso considerare l'energia potenziale del sistema. Diventa invece cruciale considerare anche la gravità dopo l'urto. Infatti, dopo l'urto non è presente alcuna forza non conservativa, e la conservazione dell'energia meccanica totale (cinetica + potenziale gravitazionale) diventa fondamentale.

Per il momento, è importante avere bene in mente che la perdita di energia è pari a $K - K_1$, e che $K > K_1$.

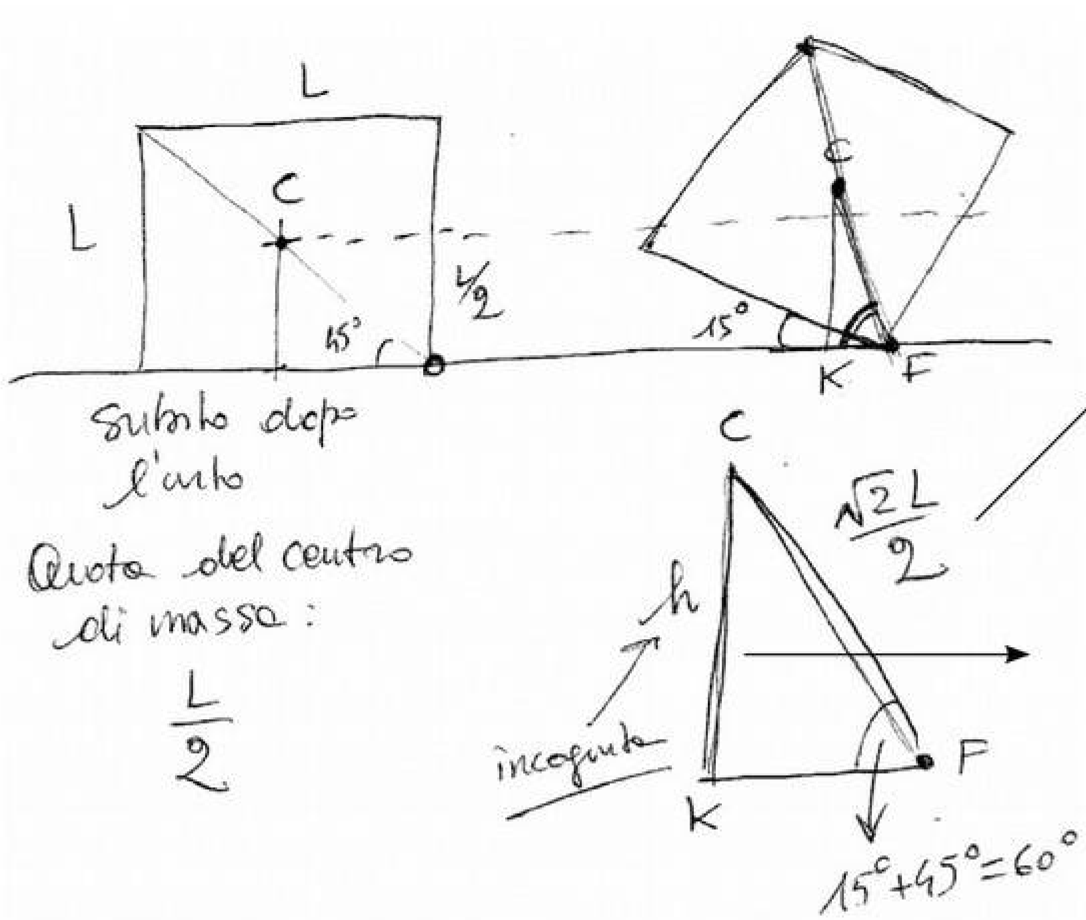
Subito dopo l'urto



Dopo l'urto, il cubo ruota, e si ferma quando forma con il piano un angolo di 15°.

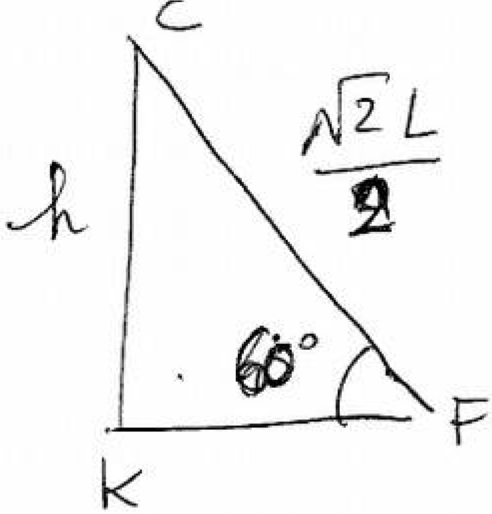


Come calcolo h?



Il lato CF è pari alla metà della diagonale del quadrato di lato L.

Il segmento CK è perpendicolare al piano.



$$h = \frac{\sqrt{2}L}{2} \sin 60°$$

$$= \frac{\sqrt{2}L}{2} \frac{\sqrt{3}}{2} = L\frac{\sqrt{6}}{4}.$$

Quota iniziale di C è $h = \frac{L}{2}$
" finale di C è $h = \frac{L\sqrt{6}}{4}$

Energia potenziale subito dopo l'urto

$$U_1 = Mg\frac{L}{2}$$

Energia potenziale quando il cubo arriva a formare un angolo di 15°

$$U_2 = Mg\frac{L\sqrt{6}}{4}$$

Conservazione energia meccanica.

$$U_1 + K_1 = U_2 + K_2$$

$$Mg\frac{L}{2} + K_1 = Mg\frac{L\sqrt{6}}{4} + 0$$

Da cui: $$K_1 = MgL\left(\frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{1}{2}\right)$$

Energia persa: $$K - K_1 = \frac{1}{2}mv_0^2 - MgL\left(\frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{1}{2}\right)$$

Note conclusive

Il testo chiede di calcolare la perdita di energia avvenuta nell'urto nel caso in cui il cubo fosse stato in grado di sollevarsi fino ad un angolo di 15° rispetto al pavimento.
Abbiamo detto che dopo l'urto il sistema inizia a ruotare, e dunque il cubo ha una velocità angolare iniziale non nulla.
Abbiamo quindi trattato l'energia cinetica subito dopo l'urto (K_1), come se fosse un incognita.
Abbiamo inoltre "dimenticato" che c'è stato un urto ed abbiamo lavorato sulle fasi successive ad esso, in cui hanno agito solo forze conservative (la gravità).
Grazie alla conservazione dell'energia meccanica totale del sistema dopo l'urto, siamo stati in grado di calcolare l'incognita K_1, e quindi la perdita di energia cinetica dovuta all'urto iniziale.

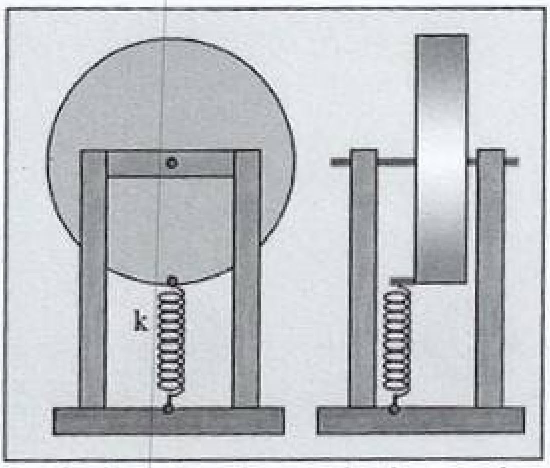
Il precedente esercizio ha messo in evidenza l'importante della schematizzazione geometrica per risolvere problemi legati all'energia potenziale.

Si ricorda che l'energia potenziale è una proprietà di punti dello spazio. Questo legame con lo spazio chiarisce il perchè l'approccio geometrico sia fondamentale.

Rimanendo nell'ambito dell'energia potenziale, capita spesso che esercizi in cui sono presenti molle si risolvano utilizzando gli strumenti della geometria.

Ecco un esempio.

Esercizio estratto dall'esame di Fisica 1 del 23 Giugno 2017



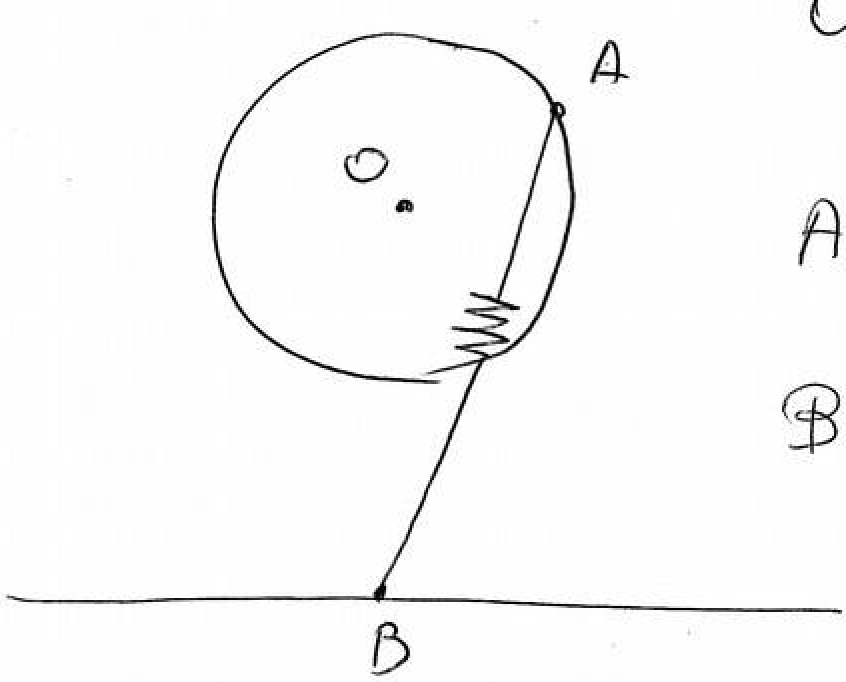
Esercizio 2

Un disco omogeneo di massa M e raggio R può ruotare intorno al suo asse, che è orizzontale. Sul bordo del disco è applicata una molla di costante elastica k e lunghezza a riposo R, avente l'altro estremo imperniato ad un punto posto 2R sotto il centro del disco. Scrivere l'energia potenziale della molla in funzione dell'angolo di cui viene ruotato il disco. Supponendo che il disco venga ruotato di un quarto di giro e lasciato fermo, calcolare la velocità angolare massima che esso raggiunge. Calcolare inoltre l'accelerazione angolare iniziale del disco.

[La molla NON si avvolge sul disco: rimane sempre di forma rettilinea, si deve intendere che essa giaccia su un piano verticale parallelo, ma non coincidente con quello del disco]

L'energia potenziale è in generale definita come una funzione di una variabile spaziale indipendente. Tale variabile spaziale può essere sia relativa ad una lunghezza o ad una posizione, oppure può essere relativa ad un angolo.

La configurazione generica del sistema è la seguente:



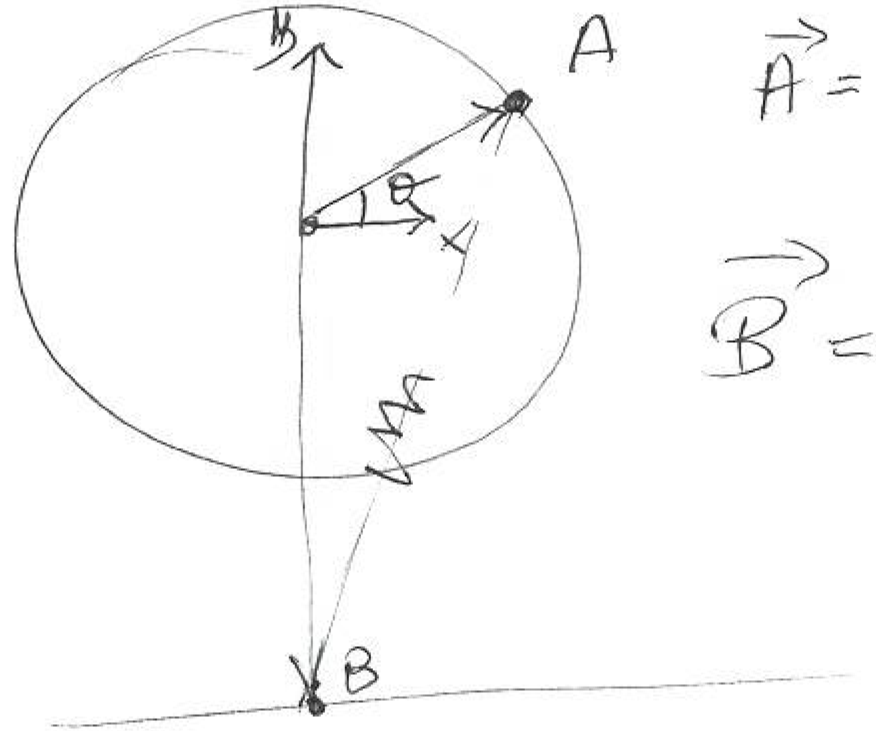
O: asse di rotazione/ centro di massa del disco

A: attacco della molla sul disco

B: attacco della molla a terra

L'energia potenziale del sistema è data dalla somma dell'energia potenziale gravitazionale del disco e di quella della molla.
Per quanto riguarda la parte gravitazionale, si nota che il punto O non si muove. Dunque non ho energia potenziale gravitazionale

Per calcolare l'energia potenziale della molla, è necessario calcolare la lunghezza del ~~[illegible]~~ segmento AB.
A tal fine, è utile introdurre un sistema di assi cartesiani. Il punto naturale in cui piazzare tali assi è il punto O.



$$\vec{A} = R\begin{bmatrix}\cos\theta \\ \sin\theta\end{bmatrix}$$

$$\vec{B} = \begin{bmatrix}0 \\ -2R\end{bmatrix}$$

Con tale scelta, il punto $\vec{A}$ è possibile descriverlo in funzione di un angolo.
La lunghezza del segmento AB è pari al modulo della differenza tra i vettori $\vec{A}$ e $\vec{B}$.

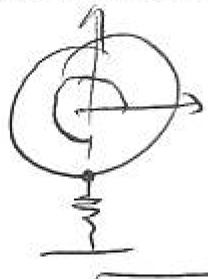
$$\overline{AB} = \sqrt{R^2\cos^2\theta + (R\sin\theta + 2R)^2}$$

$$\|\vec{A} - \vec{B}\| = \sqrt{R^2\cos^2\theta + R^2\sin^2\theta + 4R^2 + 4R^2\sin\theta}$$

$$= \sqrt{5R^2 + 4R^2\sin\theta}$$

Da notare che, la posizione descritta nella figura del testo, corrisponde a $\theta = 3\pi/2$.
Chiaramente, in questo caso la lunghezza di AB è pari ad R.

$$\theta = \frac{3}{2}\pi$$



$$\overline{AB} = \sqrt{5R^2 + 4R^2\sin\frac{3}{2}\pi} = \sqrt{5R^2 - 4R^2} = \sqrt{R^2} = R$$

A questo punto, abbiamo a disposizione tutti gli elementi per poter calcolare l'energia potenziale.

lung. riposo: R

lung. attuale: $L(\theta) = R\sqrt{5+4\sin\theta}$

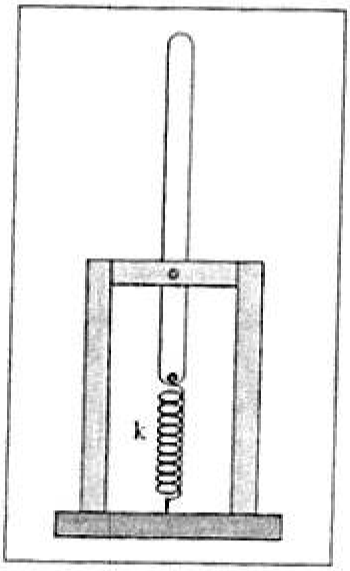
$$U_{molla}: \frac{1}{2}k\big(\underbrace{L(\theta)-R}_{\text{allung/comp}}\big)^2$$

$$= \frac{1}{2}k\left(L^2+R^2-2LR\right)$$

$$\boxed{= \frac{1}{2}k\left(R^2(5+4\sin\theta)+R^2-2R^2\sqrt{5+4\sin\theta}\right)}$$

Il sistema fisico analizzato nel prossimo esercizio è formato da una sbarretta che può ruotare intorno ad un certo punto e da una molla.

Estratto dall'esame di Fisica 1 del 17 Febbraio 2014



Esercizio 2

Una sbarretta sottile di massa M e lunghezza 6L è impemiata ad 1/3 della sua lunghezza ad un asse liscio orizzontale. Essa viene mantenuta verticale con il baricentro sopra al fulcro mediante una molla di lunghezza trascurabile e costante elastica k, come rappresentato in figura. Quanto deve essere allungata la molla affinché la posizione descritta sia stabile? Se si toglie la molla e si applica all'estremo inferiore una massa puntiforme M, la posizione resta di equilibrio stabile? Se sì, qual è la frequenza di piccole oscillazioni intorno ad essa? Se no, qual è la velocità angolare della sbarretta quando essa, partendo da ferma, transita in posizione orizzontale?

[Suggerimento: iniziare indicando con x la lunghezza della molla quando la sbarretta è verticale, e calcolando la lunghezza y(θ) conseguente a una rotazione di un angolo θ].

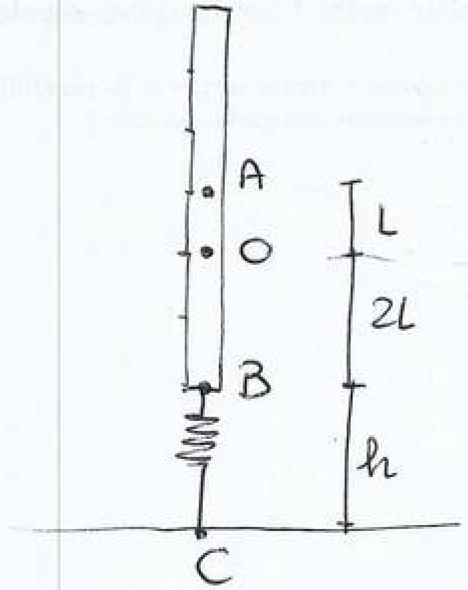
In questo caso, il centro di massa della sbarretta è in grado di muoversi. Dunque l'energia potenziale del sistema è la somma di due contributi:

$$U = \underbrace{U_g}_{\text{en. pot. gravitazionale}} + \underbrace{U_k}_{\text{en. pot. della molla.}}$$

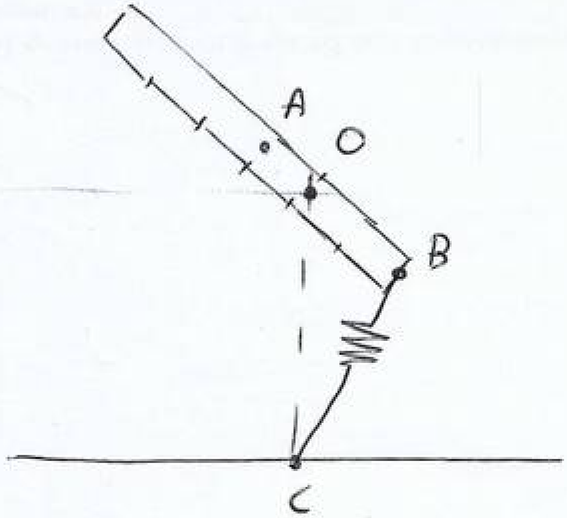
Dobbiamo calcolare:

- la quota del COM;
- l'allungamento della molla.

Sistema in posizione verticale



Sistema in posizione generica



A: COM (mobile)

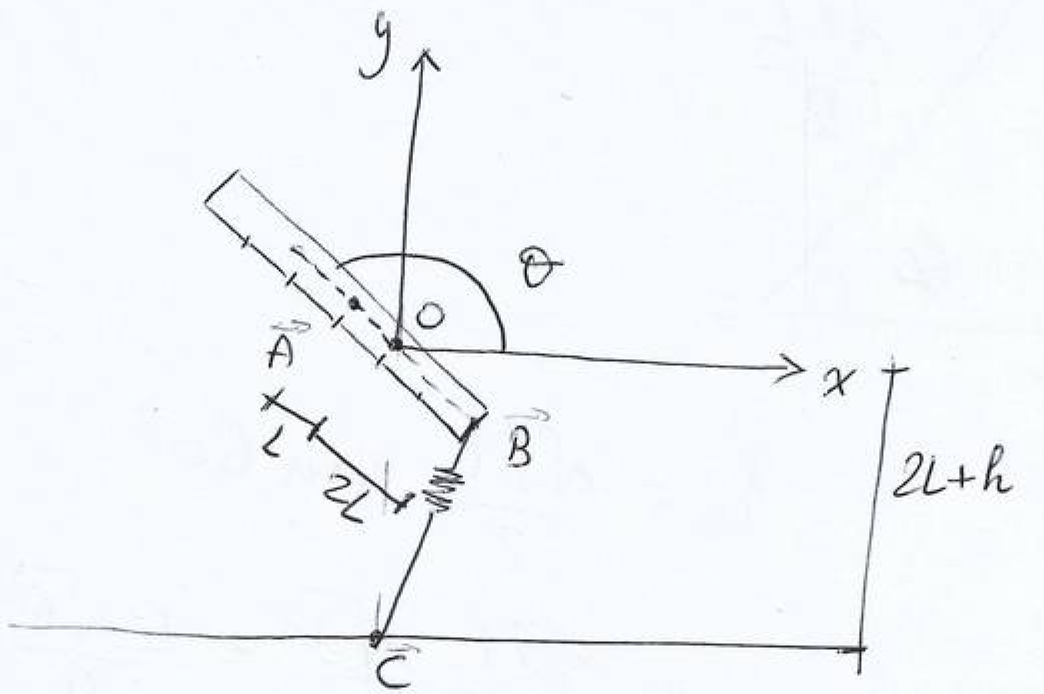
O: fulcro (fisso)

B: attacco della molla (mobile)

C: attacco della molla (fisso).

h: lunghezza incognita.

Fissiamo una coppia di assi in O.

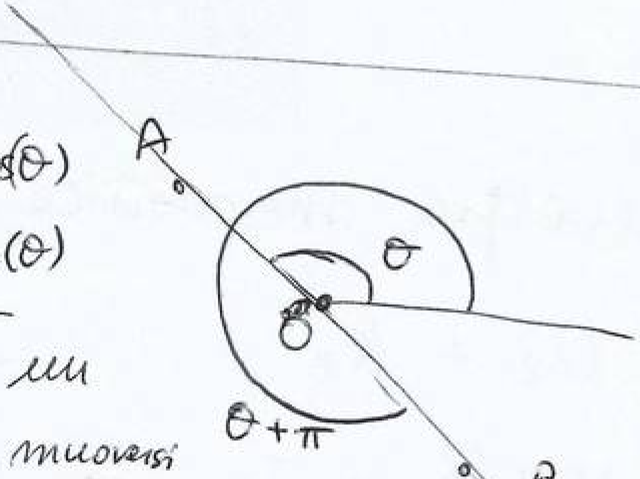


$$\vec{A} = L\begin{bmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{bmatrix} \qquad \vec{B} = 2L\begin{bmatrix}\cos(\theta+\pi)\\ \sin(\theta+\pi)\end{bmatrix} *$$

$$= 2L\begin{bmatrix}-\cos\theta\\ -\sin\theta\end{bmatrix}$$

$$\vec{C} = \begin{bmatrix}0\\ -2L-h\end{bmatrix}.$$

$*$ $\cos(\theta+\pi) = -\cos(\theta)$
$\sin(\theta+\pi) = -\sin(\theta)$



Aggiungere π ad un angolo, significa muoversi nel quadrante opposto. Di conseguenza, va cambiato segno sia alla componente x che alla componente y.

Quota del CDM $\equiv$ Componente y di $\vec{A}$

$$L\sin\theta.$$

$\rightarrow$ Energia potenziale gravitazionale:

$$\boxed{U_g = Mg \cdot L\sin\theta}$$

Lunghezza molla $\equiv$ lunghezza segmento BC.

$$\overline{BC} = |\vec{B} - \vec{C}| = \left| \begin{bmatrix} -2L\cos\theta - 0 \\ -2L\sin\theta - (-2L-h) \end{bmatrix} \right| =$$

$$= \sqrt{(-2L\cos\theta)^2 + (-2L\sin\theta + (2L+h))^2} =$$

$$= \sqrt{4L^2\cos^2\theta + 4L^2\sin^2\theta + (2L+h)^2 - 4L\sin\theta(2L+h)}$$

$$= \sqrt{4L^2 + (2L+h)^2 - 4L\sin\theta(2L+h)}.$$

NB Il testo, ci dice che a riposo la molla ha lunghezza nulla.

$\rightarrow$ Energia potenziale della molla

$$U_K = \frac{1}{2}K(\overline{BC} - 0)^2 =$$

$$= \frac{1}{2} k \left(4L^2 + (2L+h)^2 - 4L \sin\theta (2L+h) \right)$$

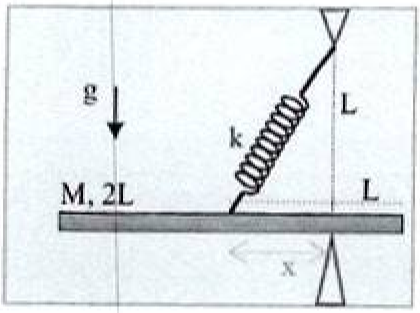
NB Posso buttare via i termini additivi che non dipendono dalla variabile posizionale θ.

$$\hookrightarrow \boxed{U_k = -2kL \sin\theta (2L+h)}.$$

$$\boxed{\begin{aligned} U &= U_g + U_k = \\ &= MgL \sin\theta - 2kL \sin\theta (2L+h) = \\ &= \left[MgL - 2kL(2L+h) \right] \sin\theta . \end{aligned}}$$

Gli strumenti geometrici sono fondamentali anche per stabilire <u>direzione</u> (e verso) di alcune grandezze vettoriali (es. forze, velocità...)

Esercizio estratto dall'esame di Fisica 1 del 26 Gennaio 2018



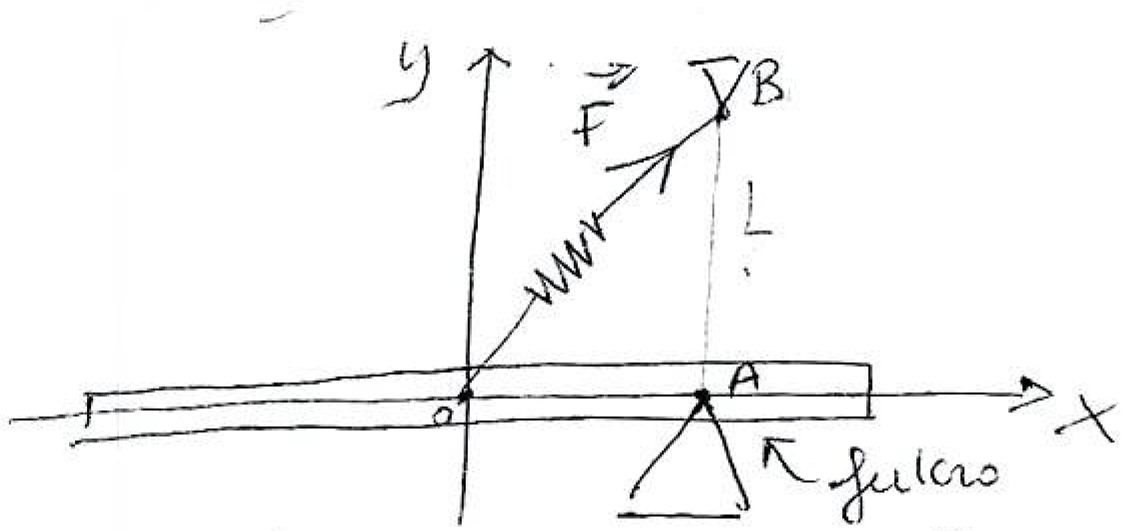
Esercizio 1

Una sbarretta sottile omogenea di massa M e lunghezza 2L poggia su un cavalletto. Una molla di lunghezza a riposo L e costante elastica k, ha un estremo attaccato a distanza L sopra al cavalletto e con l'altro estremo è connessa al centro della sbarretta. Quali e quante sono le posizioni x del centro della sbarretta per le quali la sbarretta stessa sta orizzontale in condizioni di equilibrio? Cosa si può dire del coefficiente d'attrito statico fra sbarretta e cavalletto?

Nel problema in esame, si chiede di determinare le forze presenti nel sistema al fine di valutare i punti di equilibrio.

Per determinare la forza della molla, sono necessari alcuni ragionamenti geometrici.

Possiamo schematizzare il sys. come segue:



$$\vec{A} = \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \vec{B} = \begin{bmatrix} x \\ L \end{bmatrix}$$

$$\vec{F} = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \end{bmatrix}$$

O - attacco della molla sulla sbarretta / centro di massa della sbarretta
A - fulcro
B - attacco della molla al soffitto
x = distanza tra A e O
L = distanza tra A e B

F_x ed F_y sono incognite.

Si nota che $\vec{F}$ giace sulla retta che congiunge O e B.

Essendo O l'origine degli assi, possiamo dire $\vec{F}$ e $\vec{B}$ sono due vettori paralleli.

Ovvero $\vec{F}$ ha la stessa direzione di $\vec{B}$!

La direzione di $\vec{B}$ è descritta dal versore

$$\vec{e} = \frac{\vec{B}}{|\vec{B}|} = \frac{1}{\sqrt{x^2+L^2}} \begin{bmatrix} x \\ L \end{bmatrix}$$

Da cui:

$$\vec{F} = \pm|\vec{F}| \cdot \vec{e} = \pm|\vec{F}| \begin{bmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+L^2}} \\ \frac{L}{\sqrt{x^2+L^2}} \end{bmatrix}.$$

Cioè:

$$F_x = \pm|\vec{F}| \frac{x}{\sqrt{x^2+L^2}}$$

$$F_y = \pm|\vec{F}| \frac{L}{\sqrt{x^2+L^2}}$$

* "$\pm$" indica il verso.

Rimane da determinare:

- il modulo di $\vec{F}$
- il suo verso.

Modulo $\Rightarrow$ Legge di Hooke

$$|\vec{F}| = K\,|\underbrace{\text{lunghezza molla}} - \underbrace{\text{lunghezza a riposo}}| =$$

$$= K\,|\ |\vec{B}|\ -\ L\ | =$$

$$= K\,|\sqrt{x^2+L^2} - L\,|.$$

Notiamo che:

$$\sqrt{x^2+L^2} = \sqrt{L^2\left(1+\frac{x^2}{L^2}\right)} = L\underbrace{\sqrt{1+\frac{x^2}{L^2}}}_{>1} > L$$

Dunque:

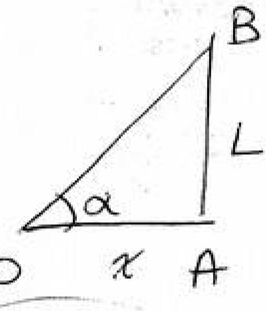
- $|\vec{F}| = K\left(\sqrt{x^2+L^2} - L\right)$ (cioè levo il valore assoluto).

- Poiché la molla è allungata $\left(\sqrt{x^2+L^2} > L\right)$, essa esercita una forza di richiamo. Dunque il verso è positivo.

$$\hookrightarrow \vec{F} = +K\left(\sqrt{x^2+L^2} - L\right)\begin{bmatrix} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+L^2}} \\ \dfrac{L}{\sqrt{x^2+L^2}} \end{bmatrix}$$

Alcune considerazioni

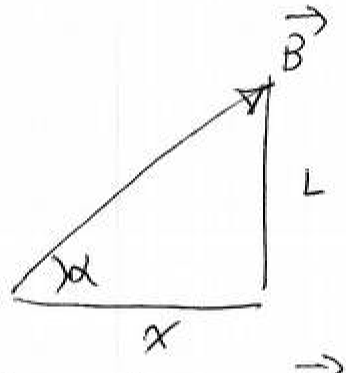
- In riferimento al triangolo rettangolo AOB, abbiamo implicitamente determinato il valore del seno e del coseno di α, pur non conoscendo tale angolo. Infatti:

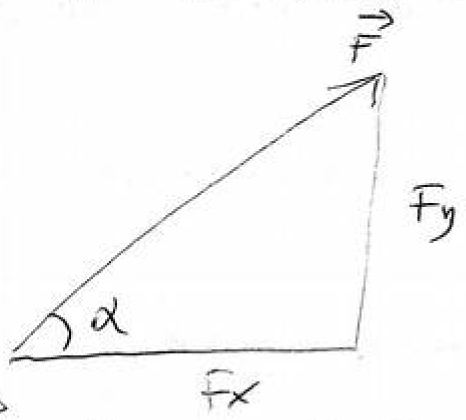


$$x = \cos\alpha \sqrt{x^2+L^2}$$
$$L = \sin\alpha \sqrt{x^2+L^2} \implies \cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2+L^2}} \qquad \sin\alpha = \frac{L}{\sqrt{x^2+L^2}}$$

Sono le componenti del versore $\vec{e}$!

- Poiché $\vec{F}$ e $\vec{B}$ sono paralleli, allora potevamo ragionare in maniera alternativa.





I vettori $\vec{B}$ ed $\vec{F}$ "creano" 2 triangoli rettangoli simili. Per cui:

$$x : F_x = L : F_y = |\vec{B}| : |\vec{F}|$$

Cioè, i lati di triangoli simili sono in proporzione fra loro.

Da tali proporzioni, segue che:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{F_x} = \dfrac{L}{F_y} \\ \dfrac{x}{F_x} = \dfrac{|\vec{B}|}{|\vec{F}|} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_y = \dfrac{L}{x} F_x \\ F_x = \dfrac{x\,|\vec{F}|}{|\vec{B}|} \end{cases}$$

Dato che:

1) $|\vec{F}| = K\left(\sqrt{x^2+L^2} - L\right)$

2) $|\vec{B}| = \sqrt{x^2+L^2}$

allora:

$$F_x = \frac{x}{\sqrt{x^2+L^2}}\left[K\left(\sqrt{x^2+L^2} - L\right]\right.$$

$$F_y = \frac{L}{\sqrt{x^2+x^2}}\left[K\sqrt{x^2+L^2} - L\right]$$