Corso di recupero di Fisica 2017/2018

Dario Madeo

Lezione del 10/09/2018

Slides disponibili all'indirizzo
http://www.dii.unisi.it/~madeo/crf/crf1718.html

Esercizio estratto dall'esame di Fisica 1 del ~~13 Luglio~~ 5 Settembre 2018

Esercizio 1

Due punti materiali A e B, rispettivamente di massa M e 2M sono su una guida liscia orizzontale su cui è definita un'ascissa x. Fino a t=0 A è fermo in x=0 e B è fermo in x=L>0. Nell'intervallo di tempo [0, T], viene applicata a ciascun corpo una forza F dipendente dal tempo secondo la legge $F=F_0\sin(\pi t/T)$, con F_0 costante assegnata positiva. Sapendo che i corpi collidono elasticamente ad un istante $t_1>T$, stabilire.

a) il lavoro svolto da ciascuna forza;

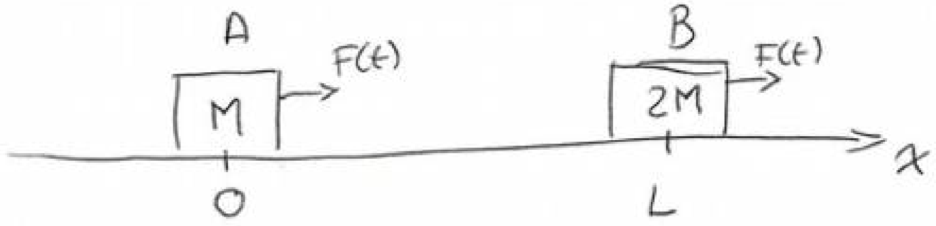
b) la posizione dei due corpi all'istante T;

c) la posizione dei due corpi all'istante t_1;

d) la velocità di A per $t>t_1$ e l'impulso ricevuto da B a t_1.

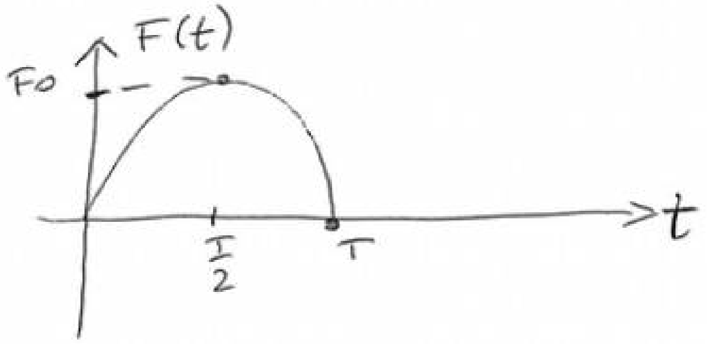
[Per risparmiare tempo, si consiglia di iniziare a risolvere il problema considerando il corpo A, e poi di modificare opportunamente i risultati per B, evitando di ripetere calcoli analoghi.]

$$F(t) = F_0 \sin\left(\frac{\pi t}{T}\right)$$



$F_0 > 0$

$t \in [0;T]$



F(t) sempre positiva per $t \in [0,T]$

Equazione del moto per una massa m:

$$m\dot{v} = F_0 \sin\left(\frac{\pi t}{T}\right)$$

$$m\frac{dv}{dt} = F_0 \sin\left(\frac{\pi t}{T}\right)$$

$$dv = \frac{F_0}{m}\sin\left(\frac{\pi t}{T}\right)dt$$

$$\int_{v(0)}^{v(t)} dv = \int_0^t \frac{F_0}{m}\sin\left(\frac{\pi s}{T}\right)ds$$

$$v(t) - v(0) = \frac{F_0}{m} \frac{T}{\pi} \int_0^t \frac{\pi}{T} \sin\left(\frac{\pi s}{T}\right) ds$$

$$\left(\int f' \cdot \sin f = -\cos f \right)$$

$$= \frac{F_0 T}{m \pi} \left(-\cos\left(\frac{\pi s}{T}\right)\right)_{s=0}^{s=t} =$$

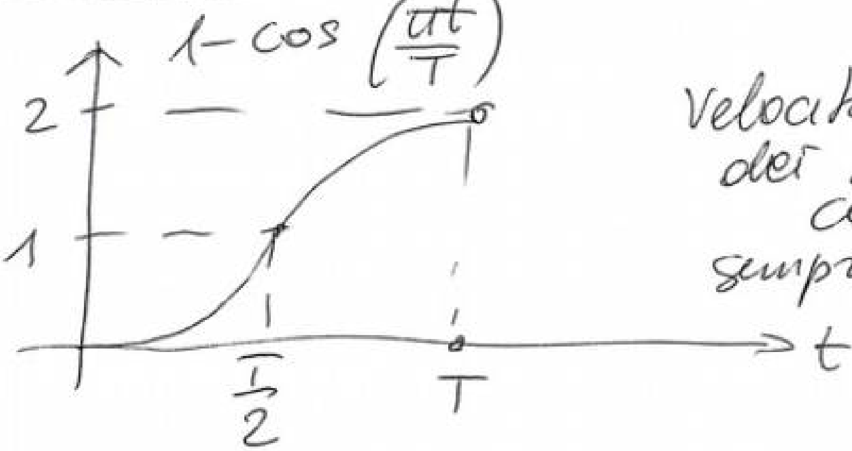
$$= \frac{F_0 T}{m\pi} \left(-\cos \frac{\pi t}{T} + 1 \right)$$

$$\Rightarrow v(t) = \frac{F_0 T}{m\pi} \left(1 - \cos \frac{\pi t}{T} \right) + v(0)$$

$$V_A(t) = \frac{F_0 T}{M\pi} \left(1 - \cos \frac{\pi t}{T} \right) \qquad (V_A(0) = 0)$$

$$V_B(t) = \frac{F_0 T}{2M\pi} \underbrace{\left(1 - \cos \frac{\pi t}{T} \right)} \qquad (V_B(0) = 0)$$

Nota



Velocità dei due corpi è sempre positiva!

Posizione

$$v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dx = \frac{F_0 T}{m\pi}\left(1 - \cos\frac{\pi t}{T}\right)dt$$

$$\int_{x(0)}^{x(t)} dx = \int_0^t \frac{F_0 T}{m\pi}\left(1 - \cos\frac{\pi s}{T}\right)ds$$

$$x(t) - x(0) = \int_0^t \frac{F_0 T}{m\pi}\,ds - \int_0^t \frac{F_0 T}{m\pi}\cos\frac{\pi s}{T}\,ds$$

$$x(t) - x(0) = \frac{F_0 T}{m\pi}t - \frac{F_0 T}{m\pi}\cdot\frac{T}{\pi}\int_0^t \frac{\pi}{T}\cos\frac{\pi s}{T}\,ds$$

$$\left(\int f' \cos f = \sin f\right)$$

$$= \frac{F_0 T t}{m\pi} - \frac{F_0 T^2}{m\pi^2}\left[\sin\frac{\pi s}{T}\right]_{s=0}^{s=t} =$$

$$= \frac{F_0 T t}{m\pi} - \frac{F_0 T^2}{m\pi^2}\sin\frac{\pi t}{T}$$

$$\Rightarrow x(t) = \frac{F_0 T t}{m\pi} - \frac{F_0 T^2}{m\pi^2}\sin\frac{\pi t}{T} + x(0)$$

$$x_A(t) = \frac{F_0 T t}{M\pi} - \frac{F_0 T^2}{M\pi^2}\sin\frac{\pi t}{T} \qquad (x_A(0) = 0)$$

$$x_B(t) = \frac{F_0 T t}{2M\pi} - \frac{F_0 T^2}{2M\pi^2}\sin\frac{\pi t}{T} + L \qquad (x_B(0) = L)$$

$$x_A(T) = \frac{F_0 T^2}{M\pi} \qquad v_A(T) = \frac{2F_0 T}{M\pi}$$

$$x_B(T) = \frac{F_0 T^2}{2M\pi} + L \qquad v_B(T) = \frac{F_0 T}{M\pi}$$

~~Dato~~ Subito dopo $t=T$, ho moto rettilineo uniforme. Infatti, nessuna forza agisce sul sistema.

L'urto avviene @$t_1 > T$

$$L = \int_{x_i}^{x_f} F(x)\,dx$$

1) Cambio di variabile $t \leftrightarrow x$ ... NO!

2) Th. energia cinetica:

$$L = K(T) - K(0)$$

$K(0) = 0$ (corpi fermi)

$$\left.\begin{array}{l} K_A(T) = \frac{1}{2} M v_A^2(T) = \ldots \\ K_B(T) = \frac{1}{2} 2M v_B^2(T) = \ldots \end{array}\right] \text{risposta (a)}$$

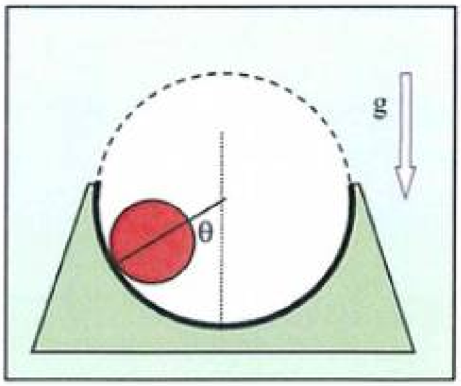
Risposta c e d come esercizio

Per risolvere c e d, basta lavorare sull'urto tra i due corpi che si muovono di moto rettilineo uniforme con velocità $v_A(T)$ e $v_B(T)$.
La risposta b è data dai valori $x_A(T)$ e $x_B(T)$.

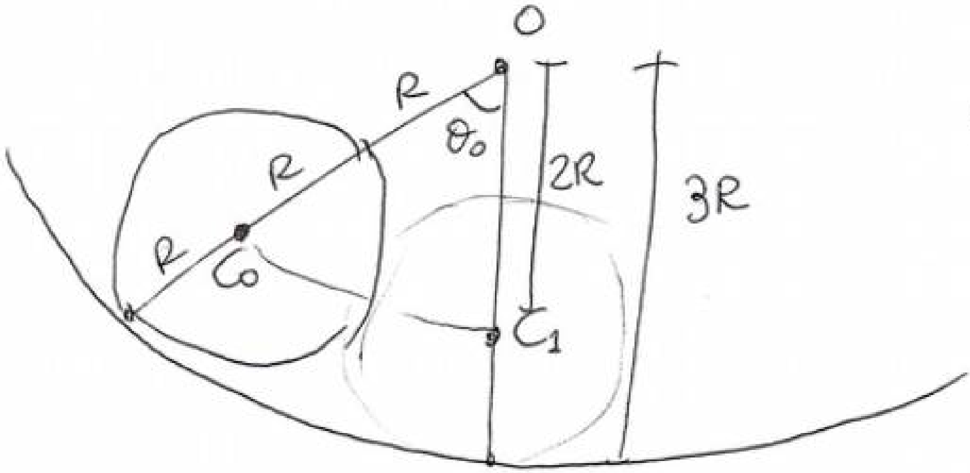
Esercizio estratto dall'esame di Fisica 1 del ~~18 Luglio~~ 2018

5 settembre

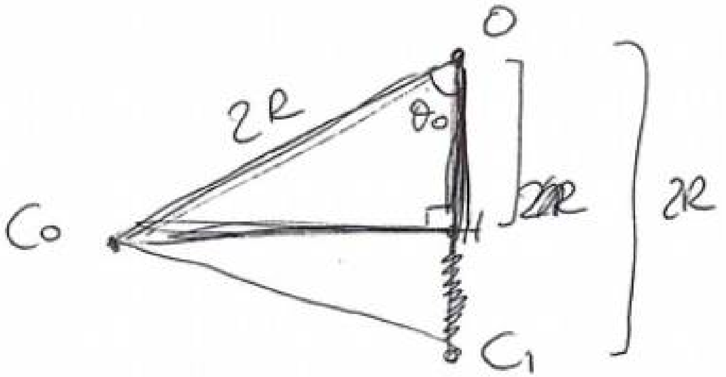
Esercizio 2



La figura mostra un cilindro omogeneo di raggio R e massa M su una guida fissa, avente forma di superficie cilindrica di raggio 3R. Il cilindro si muove di puro rotolamento. Valutare l'impulso impresso sul cilindro in direzione orizzontale dalla guida nell'intervallo di tempo Δt in cui il cilindro scende, partendo da fermo da un assegnato θ_0 fino al punto più basso/ Sapendo che per oscillazioni più ampie di un certo θ_1 verrebbe meno la condizione di puro rotolamento, determinare il coefficiente d'attrito/ Supponendo che sia $\theta_0 = \theta_1/2$, determinare la durata Δt o spiegare la ragione per cui non è possibile calcolarla.



C_0 / C_1: centro di massa del cilindro



$$\begin{cases} \overline{OH} + \overline{HC_1} = 2R \\ \overline{OH} = 2R\cos\theta_0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \overline{HC_1} = 2R - 2R\cos\theta_0 = 2R(1-\cos\theta_0)$$

↓

perdita di quota

Perdita di quota del centro di massa quando parte dalla posizione iniziale ed arriva nel punto più basso della guida.

In "0"

$$E_0 = U_0 + K_0$$

$$= Mg\,2R(1-\cos\theta_0) + 0$$

In "1" (posizione verticale)

$$E_1 = U_1 + K_1$$

$$= 0 + \frac{1}{2}Mv_1^2 + \frac{1}{2}I\omega_1^2$$

I: rispetto al COM del cilindro.

Conservazione en. meccanica:

$$E_0 = E_1$$

$$Mg\,2R(1-\cos\theta_0) = \frac{1}{2}M\underbrace{v_1^2}+\frac{1}{2}I\underbrace{\omega_1^2}$$

due incognite

Poiché ho puro rotolamento, si ha che:

$$v_1 + R\omega_1 = 0$$

$$v_1 = -\omega_1 R$$

NOTA. Si ricorda che $v_1 + R\omega_1$ = velocità del pavimento. In questo caso, il pavimento è fermo.
Si assume inoltre che la rotazione sia positiva in senso antiorario.

$$Mg\,2R(1-\cos\theta_0) = \frac{1}{2}M(-\omega_1 R)^2 + \frac{1}{2}I\omega_1^2$$

$$= \frac{1}{2}MR^2\omega_1^2 + \frac{1}{2}I\omega_1^2$$

$$= \frac{1}{2}\underbrace{(MR^2+I)}\omega_1^2$$

Momento di inerzia rispetto al punto di contatto.

$$Mg\,4R(1-\cos\theta_0) = (MR^2+I)\omega_1^2$$

$$Mg\,4R(1-\cos\theta_0) = \left(MR^2+\frac{1}{2}MR^2\right)\omega_1^2$$

$$\cancel{M}g\,8\cancel{R}(1-\cos\theta_0) = 3\cancel{M}R^{\cancel{2}}\omega_1^2$$

$$\omega_1^{\cancel{2}} = \pm\sqrt{\frac{8g(1-\cos\theta_0)}{3R}}$$

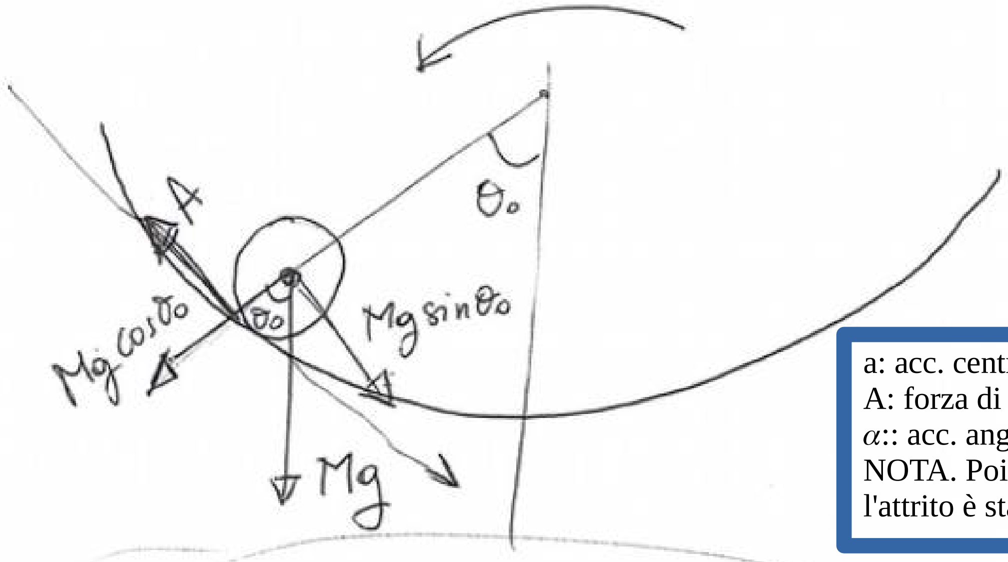
$$V_1 = -\omega_1 R \qquad V_1 \equiv \text{vel. CDM}$$

$$V_1>0 \Rightarrow \omega_1<0$$

$$\omega_1 = -\sqrt{\frac{8g(1-\cos\theta_0)}{3R}}$$

$$V_1 = R\sqrt{\frac{8g(1-\cos\theta_0)}{3R}}$$

NOTA. Ho due soluzioni (equazione di secondo grado), ma scelgo quella “sensata”, cioè quella che mi dice che il CDM si sta muovendo verso destra ($v_1>0$).



a: acc. centro di massa del cilindro.
A: forza di attrito statico.
α:: acc. angolare del cilindro.
NOTA. Poichè abbiamo puro rotolamento, l'attrito è statico.

$$\begin{cases} Ma = Mg\sin\theta_0 - A \\ I\alpha = -RA \\ \alpha R + a = 0 \end{cases}$$

$\Leftarrow \quad \omega R + v = 0$

Velocità del pavimento

Incognite:

$a,\ A,\ \alpha$

NOTA. Questa sistema mi permette di calcolare a, A ed α per un generico θ_0. Ma non è quello che mi serve!

---

1) Sostituisco θ_0 con θ_1

2) $A = A_{MAX} = \mu_s Mg\cos\theta_1$

$$\begin{cases} Ma = Mg\sin\theta_1 - \mu_s Mg\cos\theta_1 \\ I\alpha = -RA \\ \alpha R + a = 0 \end{cases}$$

Incognite:

$a,\ \mu_s,\ \alpha$

NOTA. Questa sistema mi permette di calcolare a, μ_s ed α per un certo θ_1 nell'ipotesi che per tale angolo A = A_{max}.

$$\ldots \quad \mu_s = \frac{1}{3} \tan\theta_1$$

$$\theta_1 = \arctan 3\mu_s$$

Qual'è la legge del moto del sistema?

$$\begin{cases} Ma = Mg\sin\theta - A \\ I\alpha = -RA \\ \alpha R + a = 0 \end{cases}$$

Cerco

$\alpha = f(\theta)$

$\ddot\theta = f(\theta)$

$$a = -\alpha R$$

$$-M\alpha R = Mg\sin\theta - A$$

$$A = -\frac{I\alpha}{R}$$

$$-M\alpha R = Mg\sin\theta + \frac{I\alpha}{R}$$

$$-M\alpha R - \frac{I\alpha}{R} = Mg\sin\theta$$

$$-M\alpha R - \frac{1}{2}\frac{MR^{\cancel{2}}\alpha}{\cancel{R}} = Mg\sin\theta$$

$$-\frac{3}{2}\cancel{M}\alpha R = \cancel{M}g\sin\theta$$

$$\alpha = -\frac{2}{3}\frac{g}{R}\sin\theta \rightarrow \omega^2 = \frac{2g}{3R}$$

$$\boxed{\ddot\theta = -\frac{2}{3}\frac{g}{R}\sin\theta}$$

Il sistema si muove compie un moto armonico!
Non so calcolare le leggi orarie, e quindi
non so calcolare i tempi.

Impulso fornito lungo x

$$\Delta p_x = p_x(\Delta t) - p_x(0)$$

Δt: tempo richiesto a scendere.

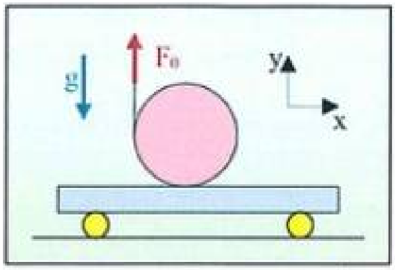
$$= M v_1 - M \cdot 0$$

$$= MR \sqrt{\frac{8g(1-\cos\vartheta_0)}{3R}}$$

Impulso $\int F(t)\,dt = p_x(\Delta t) - p_x(0)$

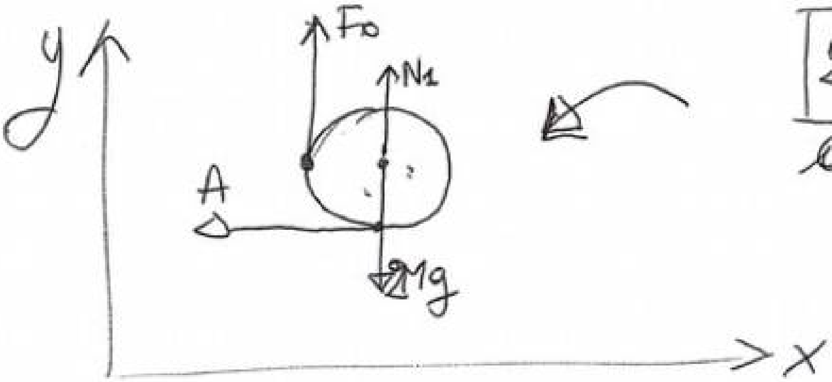
Esercizio estratto dall'esame di Fisica 1 del 18 Luglio 2018

Esercizio 1



Su un piano orizzontale liscio scorre senza attriti un carrello di massa M. Sopra il carrello è poggiato un cilindro omogeneo di raggio R e massa 2M. Sul cilindro è avvolto senza possibilità di strisciamento un filo ideale (inestensibile e di massa trascurabile).
A t=0 il sistema è fermo; per t>0 viene applicata al filo una assegnata forza costante F_0 diretta verso l'alto (vd. figura). Il cilindro non striscia sul carrello.

(a) Stabilire se esistono quantità che si conservano, fra quelle utili a rispondere ai quesiti seguenti.)
b) Calcolare l'accelerazione del carrello e l'accelerazione angolare del cilindro.
c) Determinare il minimo valore che deve avere il coefficiente d'attrito statico per garantire il rotolamento puro.
[NOTA: si consiglia di rispondere con *molta cura* al primo quesito, prima di affrontare i successivi]



$$\boxed{2Ma_{1x} = -A}$$

$$a_{1y} = 0 \Rightarrow F_0 + N_1 - 2Mg = 0$$

$$\boxed{I\alpha = -RF_0 - RA}$$

a_{1x}: acc. cilindro lungo x

a_{1y}: acc. cilindro lungo y

a_{2x}: acc. carrello lungo x

a_{2y}: acc. carrello lungo y

α: acc. angolare cilindro

Statica lungo y

$F_0+N_1-2Mg = 0$

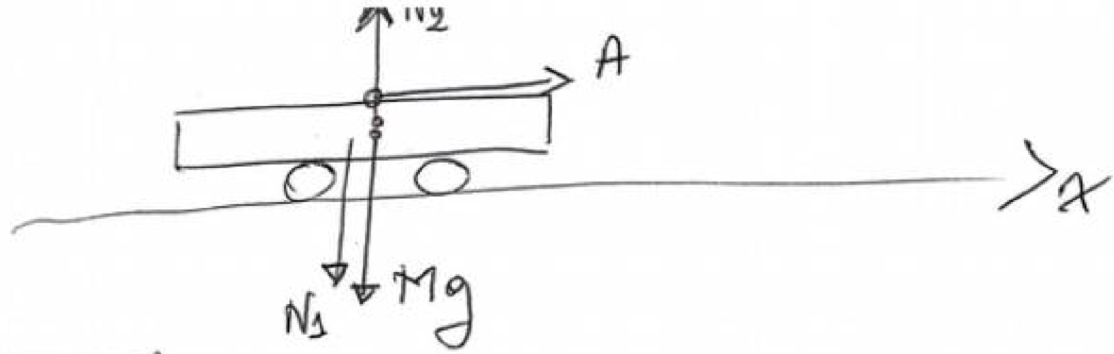
$F_0+N_1 = 2Mg$

Poichè $N_1 > 0$, allora:

$F_0 < 2Mg$

Nota: I momento di inerzia rispetto al CDM!

Carrello



$$\boxed{Ma_{2x} = A}$$

$a_{2y} = 0 \Rightarrow N_2 - N_1 - Mg = 0$ Statica lungo y

Condizione di puro rotolamento

$$\boxed{a_{1x} + \alpha R = a_{2x}}$$ ⟵ stavolta il pavimento si muove

$$\begin{cases} 2Ma_{1x} = -A \\ I\alpha = -RF_0 - RA \\ Ma_{2x} = A \\ a_{1x} + \alpha R = a_{2x} \end{cases}$$

Incognite

$a_{1x}, a_{2x}, \alpha, A$

$$\begin{cases} A = Ma_{2x} \\ 2Ma_{1x} = -Ma_{2x} \\ I\alpha = -RF_0 - RMa_{2x} \\ a_{2x} = a_{1x} + \alpha R \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = Ma_{2x} \\ a_{1x} = -\frac{1}{2}a_{2x} \\ MR^{\cancel{2}}\alpha = -\cancel{R}F_0 - \cancel{R}Ma_{2x} \\ a_{2x} = a_{1x} + \alpha R \end{cases}$$

$$I = \frac{1}{2} \cdot 2M \cdot R^2 = MR^2$$

$$\begin{cases} A = Ma_{2x} \\ a_{1x} = -\frac{1}{2}a_{2x} \\ MR\alpha = -F_0 - Ma_{2x} \\ \alpha R = a_{2x} - a_{1x} \end{cases} \qquad \begin{cases} A = Ma_{2x} \\ a_{1x} = -\frac{1}{2}a_{2x} \\ \alpha R = -\frac{F_0}{M} - a_{2x} \\ \alpha R = a_{2x} - a_{1x} \end{cases}$$

$$-\frac{F_0}{M} - a_{2x} = a_{2x} - a_{1x}$$

$$2a_{2x} = a_{1x} - \frac{F_0}{M}$$

$$2a_{2x} = -\frac{1}{2}a_{2x} - \frac{F_0}{M}$$

$$\frac{5}{2}a_{2x} = -\frac{F_0}{M}$$

$$\boxed{a_{2x} = -\frac{2F_0}{5M}}$$

$$\boxed{a_{1x} = \frac{1}{5}\frac{F_0}{M}}$$

$$\boxed{\alpha = -\frac{1}{R}\frac{3}{5}\frac{F_0}{M}}$$

$$\boxed{A = -\frac{2}{5}F_0}$$

risposte punto b

Devo risolvere il sistema precedente, ma stavolta si assume che

$$A = A_{MAX} = \mu_s N_1$$

$$F_0 + N_1 - 2Mg = 0 \Rightarrow N_1 = 2Mg - F_0$$

$$A = \mu_s (2Mg - F_0)$$

Le incognite sono:
a_{1x}, a_{2x}, α, μ_s

$$|A| = \frac{2}{5} F_0 = \mu_s |2Mg - F_0|$$

$$\mu_s = \frac{2}{5} \frac{F_0}{2Mg - F_0}$$

Nota: $2Mg > F_0$... vedi equazioni di statica.

Lungo x

$-A + A = 0$ $\Rightarrow$ lungo x si conserva la q.tà di moto.

$$\underbrace{2Ma_{1x}} + \underbrace{Ma_{2x}} = -A + A = 0$$

$$2Ma_{1x} + Ma_{2x} = 0$$

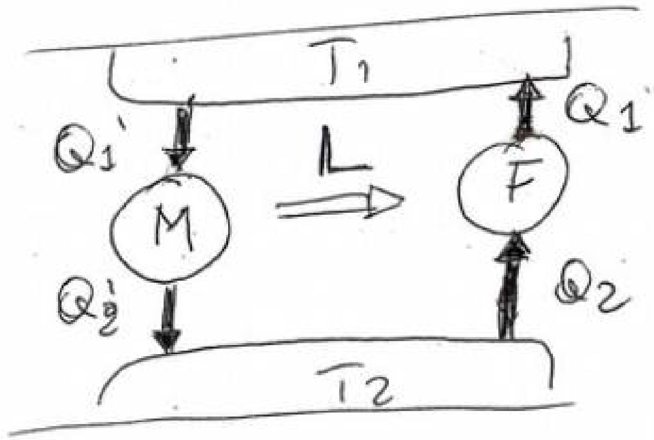
$$2a_{1x} + a_{2x} = 0$$

Lungo y Si conserva pure ma è inutile.

Esercizio estratto dall'esame di Fisica 1 del 5 Settembre 2018

Esercizio 4

Si hanno due termostati 1 e 2 a temperatura T_1 e T_2, con $T_1>T_2$. Un motore termico basato su un ciclo irreversibile aziona un ciclo di Carnot inverso. Entrambe le macchine scambiano calore solo con i due termostati. Si conosce la potenza termica P ceduta dalla macchina di Carnot, e si sa che il motore ha un rendimento pari a un terzo di quello che avrebbe avuto se fosse stato basato su un ciclo reversibile. Calcolare la potenza termica ceduta dal motore, e la rapidità con cui cambiano le entropie del termostato 1, del termostato 2 e dell'universo.



$T_1 > T_2$

F: ciclo di carnot inverso (frigo)

M: motore

$Q_1', Q_2', Q_1, Q_2, L > 0$

(F) Ciclo

$\underline{L_{TOT}} = Q_{TOT}$

$-L = Q_2 - Q_1 \Rightarrow \boxed{L = Q_1 - Q_2}$

subito

Dalla teoria: $\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{T_1}{T_2} \Rightarrow \boxed{Q_2 = \frac{T_2}{T_1} Q_1}$

(M) Ciclo

$$L_{TOT} = Q_{TOT}$$

$$\boxed{+L = Q_1' - Q_2'} = Q_2 - Q_1$$

$$Q_1' - Q_2' = Q_2 - Q_1$$

$$\boxed{Q_1' - Q_2' = \frac{T_2}{T_1} Q_1 - Q_1}$$

Il motore ha rendimento $\eta_M = \frac{1}{3} \eta_{cc}$

η_{cc} è il rendimento di un ciclo di Carnot che opera sulle stesse temperature T_1 e T_2

Teoria Le macchine termiche irreversibili che usano solo 2 sorgenti di calore T_1 e T_2 hanno rendimento

$$\eta_M < \eta_{cc}$$

$$\eta_M = \frac{1}{3} \underbrace{\left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right)}_{\eta_{cc}}$$

$$\eta_M = \frac{L}{Q_1'} \begin{array}{l} \leftarrow \text{lavoro compiuto} \\ \leftarrow \text{calore assorbito} \end{array}$$

$$\eta_M = \boxed{\frac{Q_1' - Q_2'}{Q_1'} = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right)}$$

$$Q_1' = \frac{3T_1}{2T_1 + T_2} Q_2'$$

$$Q_1' - Q_2' = \frac{T_2}{T_1} Q_1 - Q_1$$

$$\frac{3T_1}{2T_1+T_2} Q_2' - Q_2' = \frac{T_2}{T_1} Q_1 - Q_1$$

$$\dots \quad \boxed{Q_2' = \frac{2T_1+T_2}{T_1} Q_1}$$

$$\frac{d}{dt} Q_2' = \frac{d}{dt}\left(\frac{2T_1+T_2}{T_1} \cdot Q_1\right)$$

$$= \underbrace{\frac{2T_1+T_2}{T_1}}_{\text{Costante}} \frac{d}{dt} Q_1$$

$\frac{d}{dt} Q_2'$ = pot. termica erogata dal motore

$\frac{d}{dt} Q_1$ = pot. termica erogata dal frigo.

$$\frac{d}{dt} Q = P$$

$$\boxed{P_2' = \frac{2T_1 + T_2}{T_1} P_1}$$

$$P_2' = \frac{2T_1 + T_2}{T_1} P \quad , \quad P_1 = P$$

potenza
termica ceduta dal motore.

$$\Delta S_{T_1} = \int \frac{dQ}{T_1} = \frac{1}{T_1} (Q_1 - Q_1')$$

$$\Delta S_{T_2} = \int \frac{dQ}{T_2} = \frac{1}{T_2} (Q_2' - Q_2)$$

$$\Delta S_M = 0$$

$$\Delta S_F = 0$$

N.B. M ed F sono 2 cicli.
Quindi la loro variazione
di entropia è nulla!

Riepilogo

Q_1 : calore fornito da F al termostato T_1

Q_2 : calore assorbito da F proveniente da T_2

Q_1' : calore assorbito da M proveniente da T_1

Q_2' : calore fornito da M a T_2

$$Q_2 = \frac{T_2}{T_1} Q_1$$

$$Q_2' = \frac{2T_1 + T_2}{T_1} Q_1$$

$$Q_1' = \frac{3T_1}{2T_1 + T_2} Q_2' = 3 Q_1$$

Passando alle potenze:

$$P_1 = \frac{d}{dt} Q_1 = P \text{ (dato del problema)}$$

$$P_2 = \frac{d}{dt} Q_2 = \frac{T_2}{T_1} P$$

$$P_1' = \frac{d}{dt} Q_1' = 3P$$

$$P_2' = \frac{d}{dt} Q_2' = \frac{2T_1 + T_2}{T_1} P$$

$$\frac{d\Delta S_{T_1}}{dt} = \frac{1}{T_1}(P_1 - P_1') = -\frac{2P}{T_1} < 0$$

$$\frac{d\Delta S_{T_2}}{dt} = \frac{1}{T_2}(P_2' - P_2) = \frac{2P}{T_2} > 0$$

$$\frac{d\Delta S_M}{dt} = 0$$

$$\frac{d\Delta S_F}{dt} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\Delta S_U = \sum_i \ldots = \frac{2P}{T_1 T_2}(T_1 - T_2) > 0$$

La variazione di entropia dell'universo cresce nel tempo...
Notare che tale aumento dipende solo da M, che compie un ciclo non reversibile!

$$\Delta S_U = \Delta S_{T1} + \Delta S_{T2} + \Delta S_M + \Delta S_F$$

$$= \left(\frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_1'}{T_1}\right) + \left(\frac{Q_2'}{T_2} - \frac{Q_2}{T_2}\right) + 0 + 0$$

$$\left(\frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q_2}{T_2}\right)$$

Calori scambiati con M.

$$= -\frac{Q_1'}{T_1} + \frac{Q_2'}{T_2}.$$

Cosa sarebbe successo se anche M fosse stato reversibile?

$$\eta_M = 1 - \frac{T_2}{T_1} = \frac{Q_1' - Q_2'}{Q_1'}$$

$$\Rightarrow \frac{Q_2'}{Q_1'} = \frac{T_2}{T_1}$$

$$\Rightarrow \Delta S_U = -\frac{Q_1'}{T_1} + \frac{Q_2'}{T_2} = 0.$$