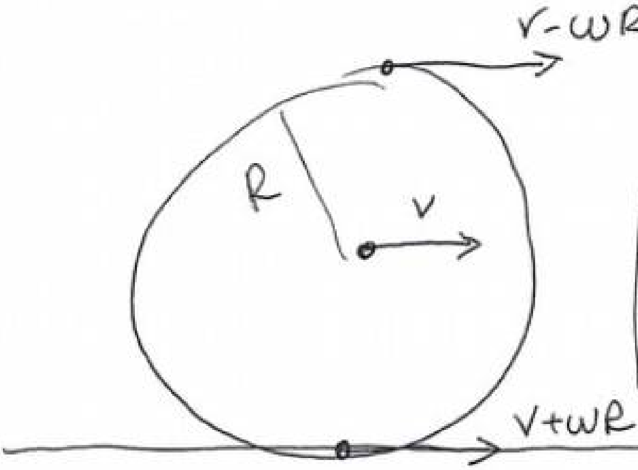
Corso di recupero di Fisica 2017/2018

Dario Madeo

Lezione del 04/07/2018

Slides disponibili all'indirizzo
http://www.dii.unisi.it/~madeo/crf/crf1718.html

Se il corpo rotola e trasla...

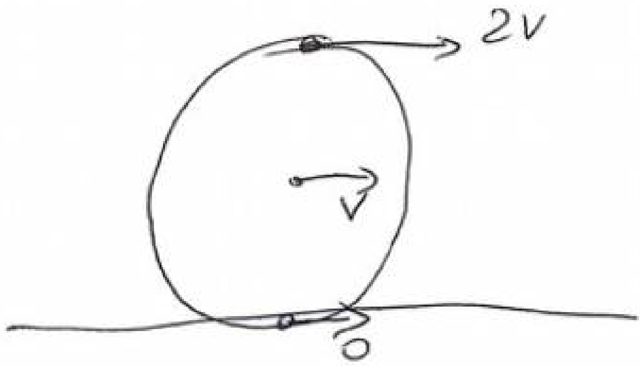


$$\boxed{V_P = V + \omega R}$$

velocità del punto di contatto

<u>Se non striscia</u> $V_P \equiv$ velocità del piano $\equiv 0$

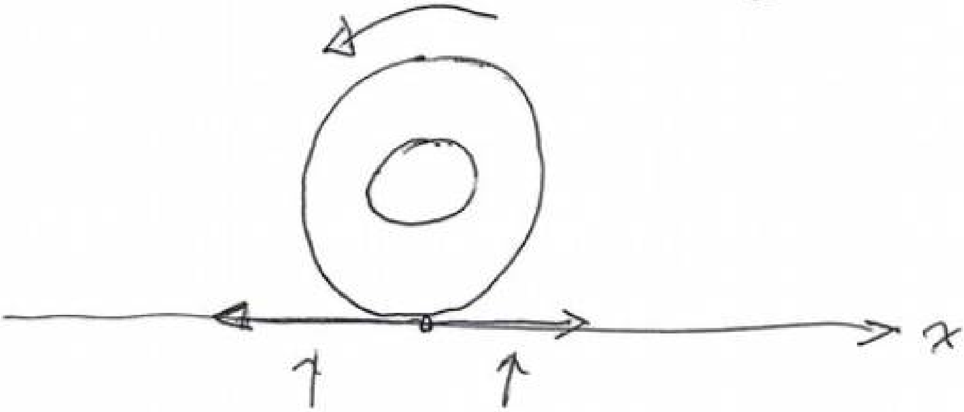
$$\boxed{V + \omega R = 0} \Rightarrow$$



<u>Se striscia</u> $V_P \neq 0$

$\Rightarrow$ <u>L'attrito è dinamico</u>

ω_0 ⟶ Condizione iniziale.



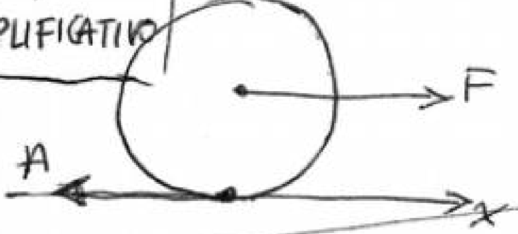
attrito dinamico

Non so in che direzione va!

Riassumendo

- Se non ho strisciamento:

CASO ESEMPLIFICATIVO



$$\begin{cases} Ma = F - A \\ I\alpha = -AR \\ a + \alpha R = 0 \end{cases}$$

$\rightarrow$ 3 equazioni in 3 incognite (a, α, A).

Il segno di a, α ed A è determinato algebricamente.

- Se ho strisciamento:
  - $\hookrightarrow$ "perdo" l'equazione $a + \alpha R = 0$
  - $\hookrightarrow$ tuttavia so che $|A| = \mu_D M g$.
  - $\hookrightarrow$ Inoltre:

  * $A > 0$ se $V_P = V + \omega R < 0$

  * $A < 0$ se $V_P = V + \omega R > 0$

  Ovvero, A è opposto alla velocità del punto di contatto!

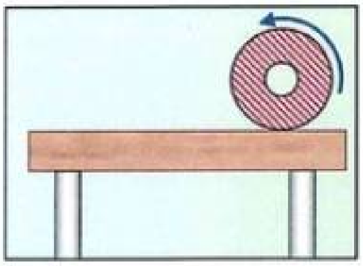
<u>Due ipotesi</u>

$V_P = V + \omega R > 0$	$V_P = V + \omega R < 0$
$\begin{cases} Ma = F - \mu_D M g \\ I\alpha = -\mu_D M g R \end{cases}$	$\begin{cases} Ma = F + \mu_D M g \\ I\alpha = \mu_D M g R \end{cases}$

Calcolo a ed α, ottengo v ed ω, valuto il segno di V_P!
Infine, scelgo l'ipotesi giusta!

Esercizio estratto dall'esame di Fisica 1 del 22 Gennaio 2016

Esercizio 2



Un cilindro forato è poggiato su un piano orizzontale scabro (di assegnati coefficienti d'attrito radente, μ_D e μ_S). Il corpo ha densità omogenea, massa M raggio esterno 3R e raggio interno R. All'istante t=0 il centro di del corpo è immobile, ed esso ruota a velocità angolare ω_0, così che striscia sul piano. Determinare velocità e velocità angolare del corpo in funzione del tempo. Stabilire se esiste un istante t_0 al quale il corpo cessa di strisciare. In caso affermativo, determinare tale istante e descrivere il tipo di moto che si ha per $t>t_0$. In caso negativo, invece, calcolare l'energia cinetica che ha il disco in funzione del tempo.

Momento di inerzia

$$V = h\left(\pi(3R)^2 - \pi R^2\right) = 8\pi R^2 h$$

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{8\pi R^2 h}$$

$$I_{PIENO} = \underbrace{I_1}_{\text{cilindro interno}} + I \rightarrow \text{cilindro forato.}$$

$$I = I_{PIENO} - I_1$$

$$M_{PIENO} = \rho\, V_{PIENO} = \left(\frac{M}{8\pi R^2 h}\right)\cdot\left(h\,\pi(3R)^2\right) = \frac{9}{8}M.$$

$$M_1 = \rho\, V_1 = \left(\frac{M}{8\pi R^2 h}\right)\cdot\left(h\pi R^2\right) = \frac{M}{8}$$

$$I_{PIENO} = \frac{1}{2} M_{PIENA} (3R)^2 = \frac{81}{16} R^2 M$$

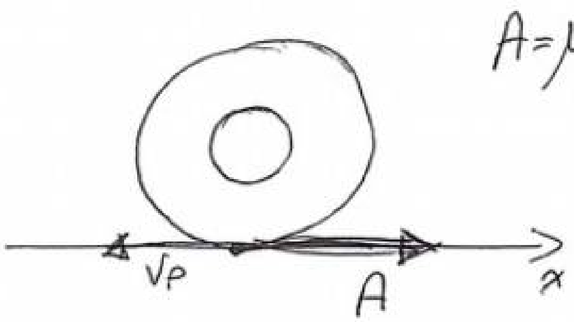
$$I_1 = \frac{1}{2} M_1 R^2 = \frac{1}{16} R^2 M$$

$$I = I_{PIENO} - I_1 = \left(\frac{81}{16} - \frac{1}{16}\right) R^2 M = 5R^2 M.$$

Ipotesi 1

$V_P < 0$

$A = \mu_0 g M$



$$Ma = \mu_0 g M$$

$$I\alpha = 3R\,\mu_0 g M$$

$$\Downarrow$$

$$a = \mu_0 g$$

$$\alpha = \frac{3R\,\mu_0 g M}{I} = \frac{3\mu_0 g}{5R}$$

$$\Downarrow$$

$$v(t) = \mu_0 g t$$

$$\omega(t) = \omega_0 + \frac{3\mu_0 g}{5R} t$$

$$V_P(t) = v(t) + 3R\omega(t)$$

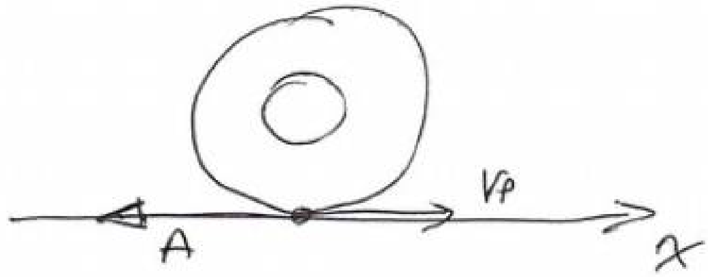
$$= 3R\omega_0 + \frac{14}{5}\mu_0 g t$$

NB $\quad V_P(t) > 0$

Ipotesi errata!

Ipotesi 2

$V_P > 0$



$$Ma = -\mu_0 g M$$

$$I\alpha = -3R\,\mu_0 g M$$

$$\Downarrow$$

$$a = -\mu_0 g$$

$$\alpha = -\frac{3}{5}\frac{\mu_0 g}{R}.$$

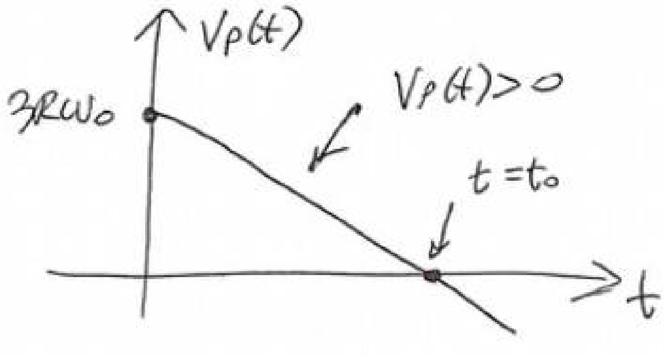
$$\Downarrow$$

$$v(t) = -\mu_0 g t$$

$$\omega(t) = \omega_0 - \frac{3\mu_0 g}{5R} t$$

$$V_P(t) = v(t) + 3R\omega(t)$$

$$= 3R\omega_0 - \frac{14}{5}\mu_0 g t.$$



Il corpo cessa di strisciare quando $v_P(t)=0$.

$\Rightarrow$ Cessa l'attrito dinamico

$\Rightarrow$ Subentra quello statico

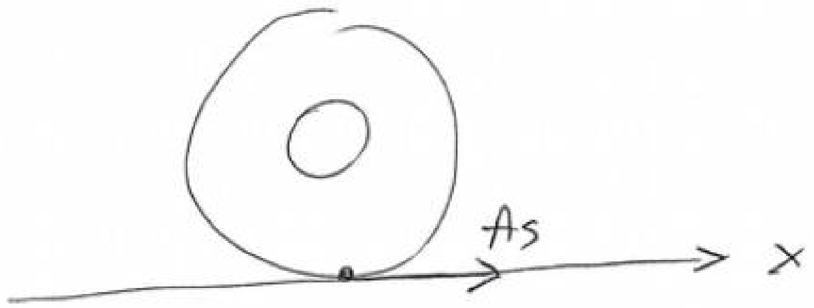
$\Rightarrow$ Moto di puro rotolamento.

---

t_0 : $v_P(t_0)=0$

$$3R\omega_0 - \frac{14}{5}\mu_0 g t_0 = 0 \Rightarrow \boxed{t_0 = \frac{15}{14}\frac{R\omega_0}{\mu_0 g}}.$$

$\Rightarrow$ $t > t_0$ ~~ho~~ puro rotolamento ($v_P = 0$)



$$\begin{cases} Ma = A_s \\ I\alpha = 3RA_s \\ a + 3R\alpha = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Ma - A_s = 0 \\ I\alpha - 3RA_s = 0 \\ a + 3R\alpha = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} a = 0 \\ \alpha = 0 \\ A_s = 0 \end{array}}$$

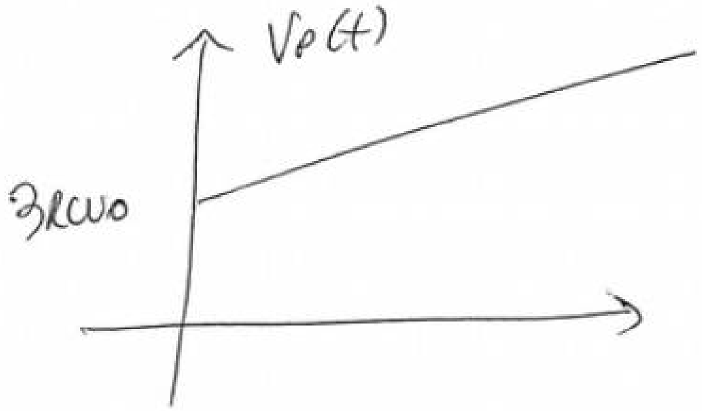
Il corpo continua a traslare con velocità

$$v(t_0) = -\frac{15}{14}R\omega_0$$

e a rotolare con velocità angolare

$$\omega(t_0) = \frac{5}{14}R\omega_0.$$

Se fosse stata vera la prima ipotesi ($v_P < 0$)



$$K(t) = \frac{1}{2}Mv^2(t) + \frac{1}{2}I\omega^2(t)$$

$$= \frac{1}{2}M\mu_0 g\, t^2 + \frac{5}{2}MR^2\left(\omega_0 + \frac{3\mu_0 g}{5R}t\right)^2$$

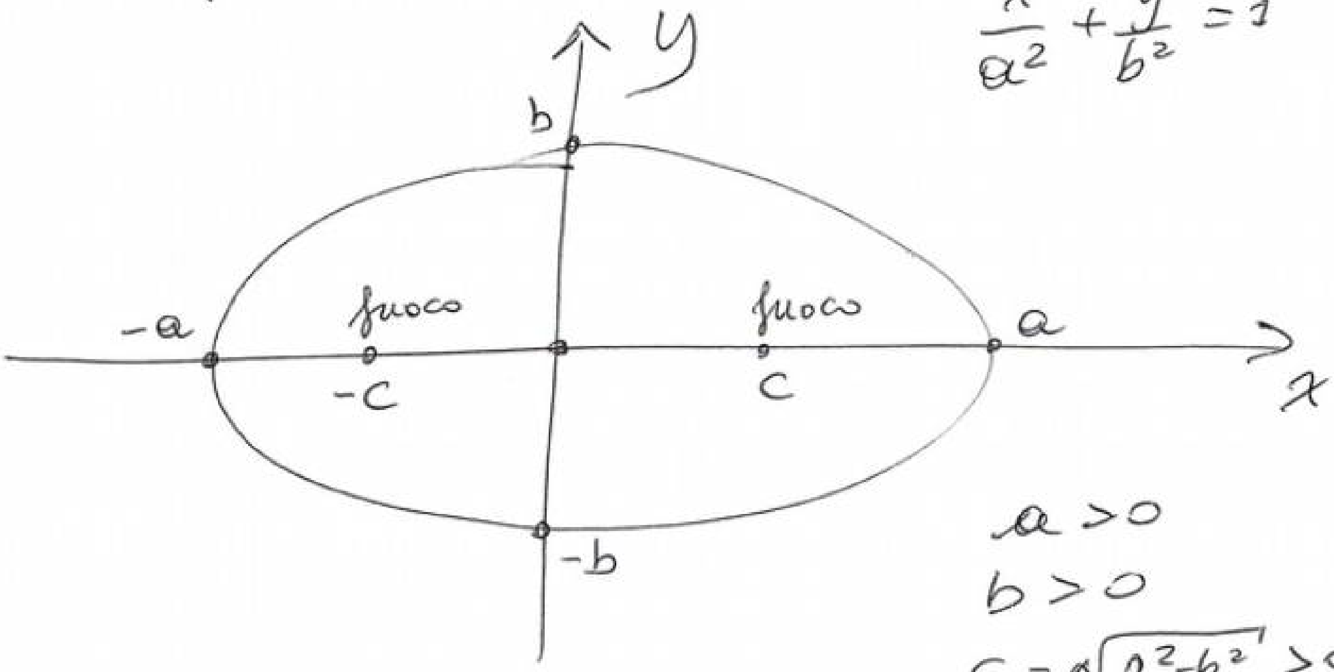
$$\lim_{t\to+\infty} K(t) = +\infty \qquad \underline{\underline{\text{ASSURDO}}}$$

Moto di pianeti

↳ Moto pianeta - satellite

- Pianeta (o Sole) fermo!
- L'energia meccanica determina il tipo di orbita.
  - ↳ $\boxed{E<0 \quad \text{ellittica (o circolare)}}$
  - ↳ $E=0$ parabolica
  - ↳ $E>0$ iperbolica.
- E ed L si conservano.
- 2 parole sull'ellissi

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$



$a>0$

$b>0$

$c=\sqrt{a^2-b^2}>0$

Caso notevole: $a=b \Rightarrow c=0 \Rightarrow$ circonferenza!

Esercizio estratto dall'esame di Fisica 1 del 9 Settembre 2016

Esercizio 2

Un satellite artificiale ruota intorno alla Terra su un'orbita circolare di raggio $r_0=4R_T$, dove R_T è il raggio terrestre. In un intervallo di tempo trascurabile rispetto al periodo orbitale, viene eseguita una manovra nella quale un razzo imprime al satellite un'accelerazione in direzione tangenziale[1]. La nuova orbita ha l'apogeo distante $r_2=8R_T$ dal centro della Terra.

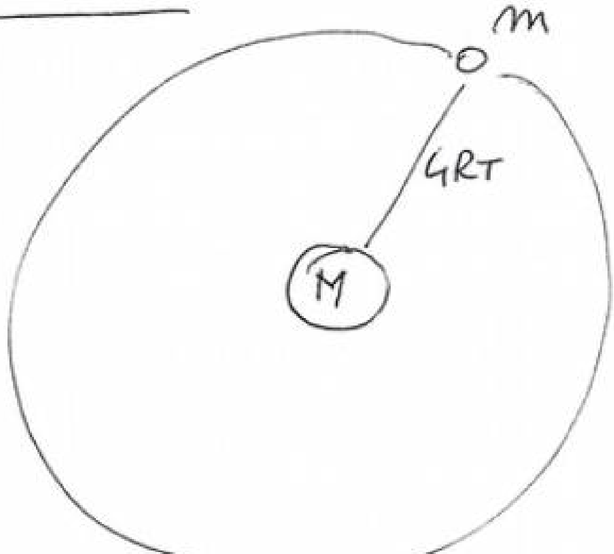
In termini di R_T e dell'accelerazione di gravità g misurata sulla superficie terrestre, calcolare

a) l'accelerazione del satellite quando si muove sull'orbita iniziale;

b) la velocità v_0 con cui si muove il satellite sull'orbita iniziale;

c) le velocità v_1 e v_2 che esso ha al perigeo e all'apogeo della nuova orbita.

Orbita circolare



$$\cancel{m} a_c = \frac{GM\cancel{m}}{(4R_T)^2}$$

$$a_c = \frac{GM}{16R_T^2}$$

$$g = \frac{GM}{R_T^2} \Rightarrow \boxed{a_c = \frac{1}{16} g} \text{ (a)}$$

$$a_c = \frac{V_0^2}{4R_T}$$ V_0: vel. tangenziale

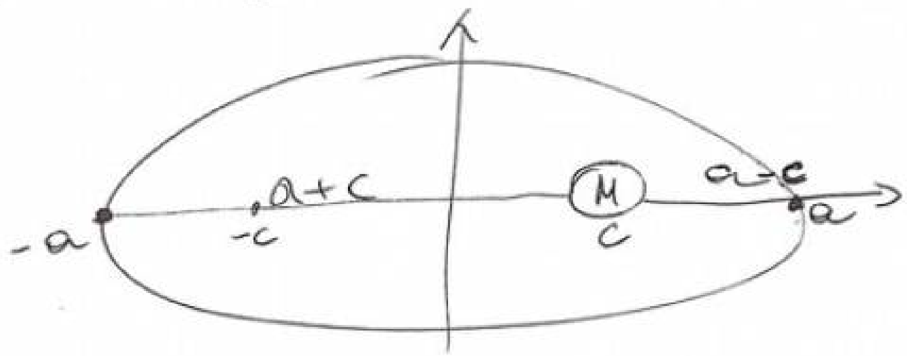
$$\frac{g}{16} = \frac{V_0^2}{4R_T} \Rightarrow \boxed{V_0 = \frac{1}{2}\sqrt{gR_T}} \text{ (b)}$$

Verificare che $E<0$

$$E = K + U = \frac{1}{2}mV_0^2 - \frac{GMm}{4R_T}$$

Il satellite cambia orbita. Da circolare, l'orbita diventa ellittica.

1) So che la terra sta su un fuoco



$a+c=8R_T$

2) Apogeo $=8R_T \Rightarrow a+c=8R_T$

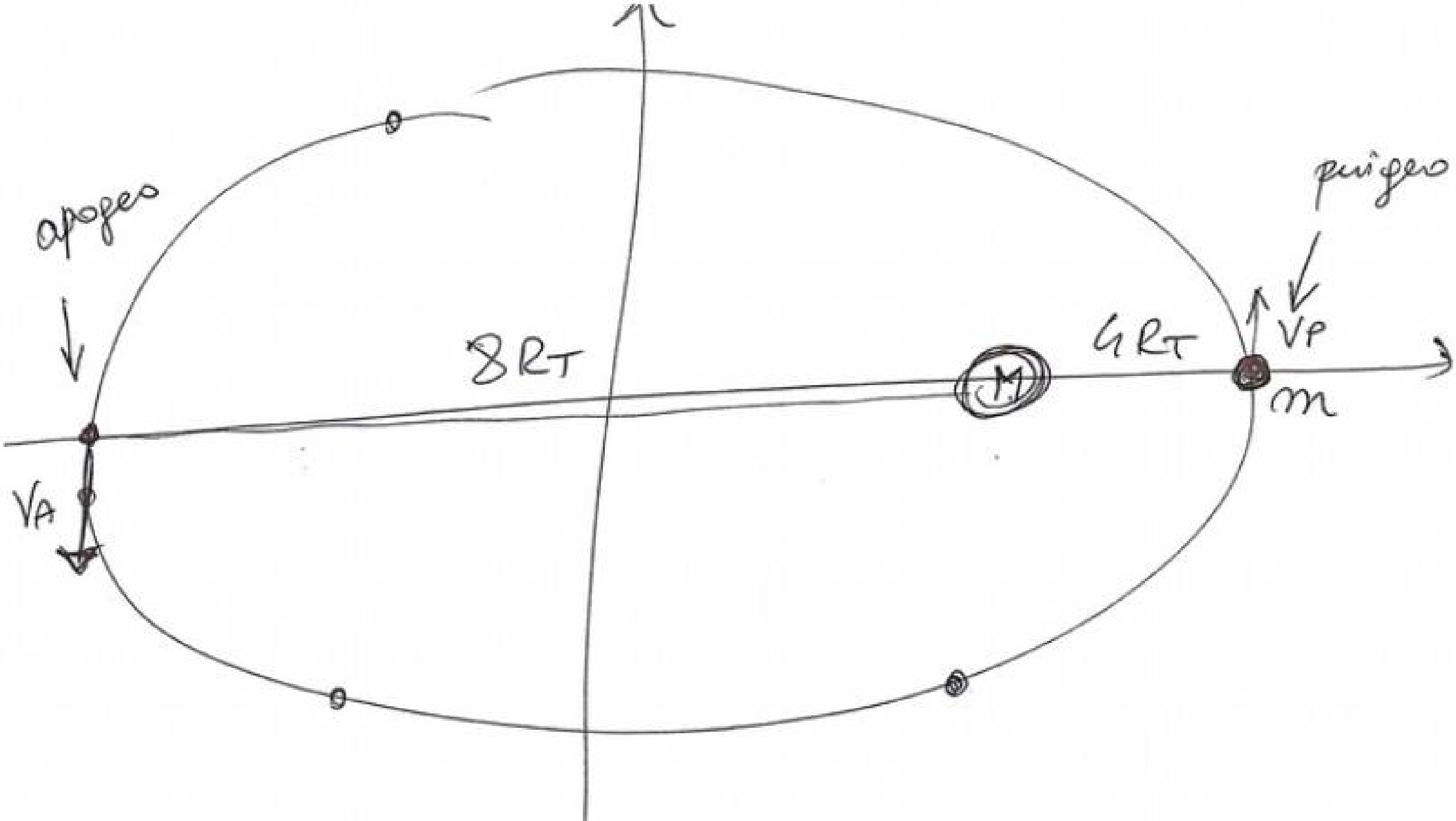
3) Nel caso circolare, la velocità del satellite è <u>sempre</u> ortogonale all'asse che congiunge satellite e terra.

Nell'ellisse, la velocità è ortogonale a tale asse solo in 2 punti:
- apogeo
- perigeo

$\Rightarrow$ Il satellite è o al perigeo o all'apogeo, poiché in precedenza la sua velocità era ortogonale a tale asse.

4) La distanza iniziale tra satellite e terra è $4R_T$.

$\Rightarrow$ Il satellite è al perigeo!



E ed L si conservano.

$$\bullet\ \underbrace{\frac{1}{2} m v_P^2 - \frac{\overset{g}{GM} m R_T}{4R_T R_T}}_{\text{E perigeo}} = \underbrace{\frac{1}{2} m v_A^2 - \frac{\overset{g}{GM} m R_T}{8R_T R_T}}_{\text{E apogeo}}$$

$$\frac{1}{2} m v_P^2 - \frac{g R_T m}{4} = \frac{1}{2} m v_A^2 - \frac{g R_T m}{8}$$

$$4 m v_P^2 - 2 g R_T m = 4 m v_A^2 - g R_T m$$

$$\boxed{4 m v_P^2 - 4 m v_A^2 = g R_T m}$$

$$\bullet\ \underbrace{m V_P 4R_T}_{\text{L perigeo}} = \underbrace{m V_A 8R_T}_{\text{L apogeo}} \Rightarrow \boxed{V_P = 2V_A}$$

$$v_P = 2v_A$$

$$4m\,4v_A^2 - 4mv_A^2 = gR_Tm$$

$$12\cancel{m}v_A^2 = gR_T\cancel{m}$$

$$\boxed{\begin{aligned} v_A &= \sqrt{\frac{gR_T}{12}} \\ v_P &= 2\sqrt{\frac{gR_T}{12}} \end{aligned}}$$

Considerazioni finali

Perigeo ed apogeo sono due punti notevoli della traiettoria del satellite intorno al pianeta.

In particolare, è molto semplice calcolare in tali punti l'energia meccanica del sistema. Infatti, la distanza tra il pianeta e tali punti si ricava facilmente (o è dato del problema).

Inoltre, è anche semplice calcolare il momento angolare in questi punti, essendo gli unici in tutta la traiettoria per i quali la velocità del satellite è ortogonale al braccio (ovvero, l'asse che congiunge il pianeta con il satellite).
Grazie all'ortogonalità, non ho bisogno di calcolare l'angolo che si forma tra la tangente alla traiettoria ed il braccio, necessario per effettuare il prodotto vettoriale tra braccio e velocità (vedi definizione di momento angolare).

Nota lessicale

Se il corpo celeste più massiccio (ovvero quello intorno al quale avviene la rotazione) è il sole, allora si parla di perielio e di afelio, anzichè di perigeo ed apogeo.

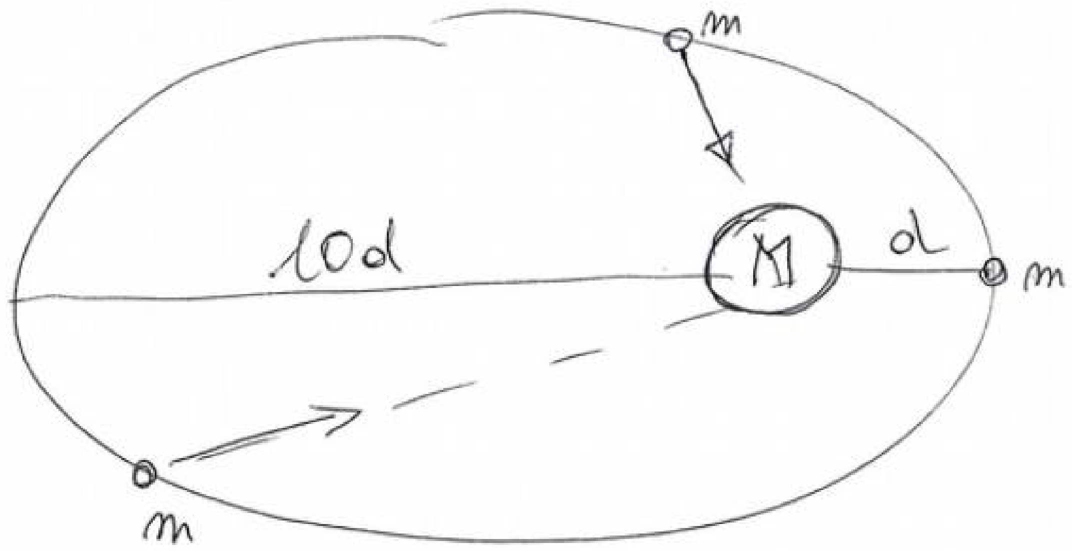
Esercizio estratto dall'esame di Fisica 1 del 2 Ottobre 2002

Esercizio 2

Una cometa di massa m orbita intorno al sole (che ha massa M) su un'orbita ellittica. L'orbita è tale che la distanza massima dal sole, D, è uguale a dieci volte la distanza minima, d.

a) Quali grandezze meccaniche sono costanti del moto, e perché?
b) Di quanto varia l'energia cinetica della cometa fra il punto in cui essa è massima e quello in cui è minima? E quali sono tali due punti?
c) Quanto vale l'energia meccanica totale della cometa?

[Rispondere usando solo i dati disponibili, che sono d, D = 10d, M, m e la costante universale di gravitazione G. Si assuma M >> m , così che il sole possa considerarsi fermo e si assumano trascurabili gli effetti di altri corpi celesti.]



1) Energia meccanica costante
Infatti la gravità è conservativa.

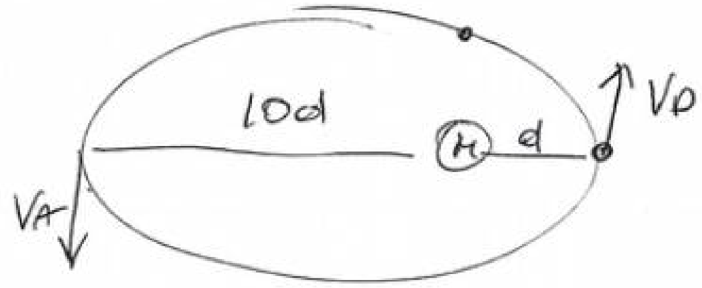
2) Momento angolare costante
La forza di gravità $\vec{F}$ è sempre parallela al raggio vettore $\vec{r}$.

$\Rightarrow \vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = 0$

$\Rightarrow$ Non ho momenti!

Velocità massima: perielio (perigeo) ≡ punto + vicino al sole (pianeta)

Velocità minima: afelio (apogeo) ≡ punto + lontano



Cons. di L

$$\cancel{m} V_P \cancel{d} = \cancel{m} V_A 10 \cancel{d}$$

$$\boxed{V_P = 10 V_A}$$

Cons. di E

$$\frac{1}{2} m V_P^2 - \frac{GMm}{d} = \frac{1}{2} m V_A^2 - \frac{GMm}{10d}$$

$$5 m V_P^2 - 10 \frac{GMm}{d} = 5 m V_A^2 - \frac{GMm}{d}$$

$$5 m V_P^2 - 5 m V_A^2 = 9 \frac{GMm}{d}$$

$$V_P = 10 V_A$$

$$5 m \cdot 100 \cdot V_A^2 - 5 m V_A^2 = 9 \frac{GMm}{d}$$

$$5 m V_A^2 \cdot \cancel{99}^{11} = \cancel{9}^{1} \frac{GMm}{d}$$

$$55 \cancel{m} V_A^2 = \frac{GM\cancel{m}}{d} \Rightarrow V_A = \sqrt{\frac{GM}{55 d}}$$

$$V_P = 10 \sqrt{\frac{GM}{55 d}}$$

$$V_A^2 = \frac{9GM}{d\cdot 5\cdot 99} = \frac{GM}{d\cdot 55}$$

$$V_A = \sqrt{\frac{GM}{d\,55}} \qquad V_P = 10\sqrt{\frac{GM}{d\,55}}$$

$$K_A = \frac{1}{2} m V_A^2 = \frac{1}{2} m \frac{GM}{d\,55} = \frac{GMm}{d\,110}$$

$$K_B = \frac{1}{2} m V_P^2 = \frac{1}{2} m\, 100 \frac{GM}{d\,55} = \frac{GMm\,100}{d\,110}.$$

$$\Delta K = K_B - K_A = \left(\frac{100}{110} - \frac{1}{110}\right) \frac{GMm}{d}$$

$$= \frac{\cancel{99}^{\,9}}{\cancel{110}_{\,10}} \frac{GMm}{d} = \boxed{\frac{9}{10} \frac{GMm}{d}}$$

$$E = \frac{1}{2} m V_A^2 - \frac{GMm}{10d}$$

$$= \frac{1}{2} m \cdot \frac{GM}{d\,55} - \frac{GMm}{10d} =$$

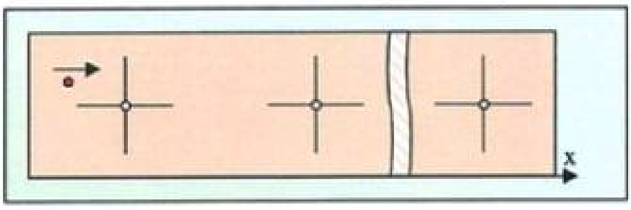
$$= \frac{GMm}{d}\left(\frac{1}{110} - \frac{1}{10}\right) = \frac{GMm}{d}\left(\frac{1-11}{110}\right)$$

$$= -\frac{GMm}{d}\frac{10}{110} = -\frac{GMm}{d}\,11 < 0$$

Esercizio estratto dall'esame di Fisica 1 del 24 Luglio 2015

Esercizio 2

Su un piano orizzontale liscio giacciono 34354546 corpi a forma di "+". Ciascuno di questi corpi è costituito da due sbarrette di massa M e lunghezza L rigidamente connesse al centro ed è vincolato ad un asse verticale intorno al quale può ruotare liberamente. I centri dei corpi sono posti a distanza 2L l'uno dall'altro. Inizialmente tutti i "+" sono immobili, con una sbarretta orientata lungo x (e l'altra lungo y).

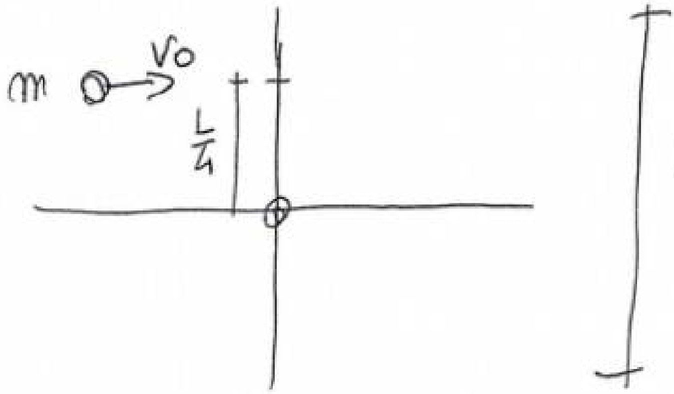


Un corpo puntiforme di massa m (da determinare) viaggia parallelamente all'asse x con velocità v_0, e, a t=0, arriva ad urtare elasticamente la prima "+" a distanza L/4 dal centro. Dopo l'urto, resta immobile, fino a quando viene urtata nuovamente da un braccio del "+" che si è messo in movimento e riparte (anche in questo caso l'urto è elastico).

a) Quanto vale m?

b) Qual è la velocità angolare con cui inizia a ruotare la 13151719ma "+"?

c) A quale istante avviene l'ultimo urto?



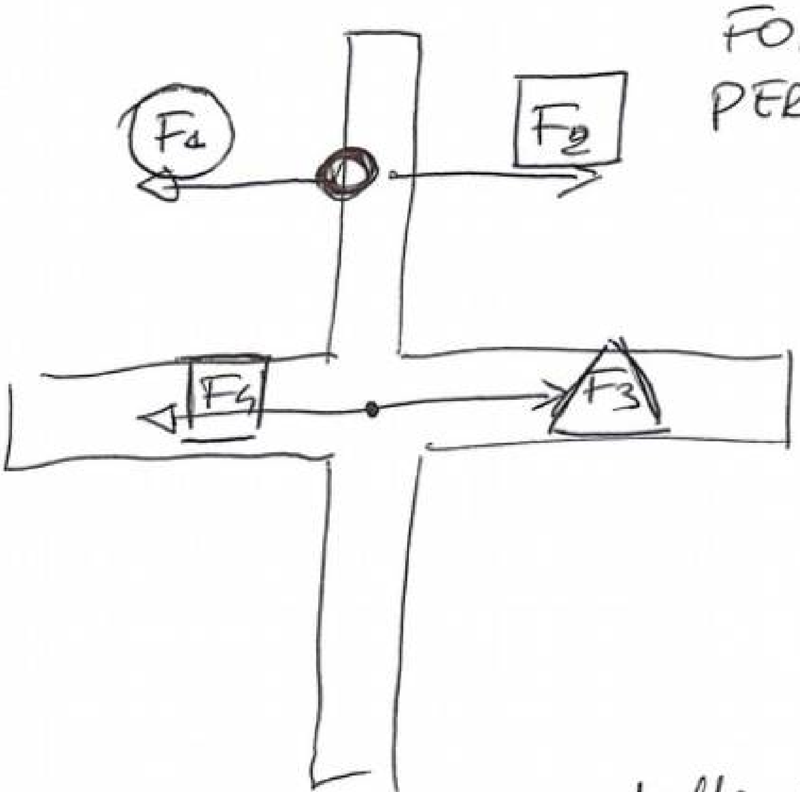
$$I = 2\left(\frac{1}{12}ML^2\right) = \frac{ML^2}{6}$$

Si conserva l'energia cinetica (urto elastico)

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}I\omega_1^2$$

Cos'altro si conserva!

DIAGRAMMA DELLE FORZE IMPULSIVE PER $t \in [0^-; 0^+]$



F_1: la forza che riceve m dalla croce

F_2: la forza che riceve la croce da m.

$$F_1 = -F_2 \qquad \text{(III principio)}$$

F_3: la forza che riceve il pavimento dalla croce.

F_4: la forza che riceve la croce dal pavimento.

$$F_4 = -F_3 \qquad \text{(III principio)}$$

○ ≡ forze su m

□ ≡ forze sulla croce

△ ≡ forze sul pavimento.

- m
- croce

S_1

- pavimento

S_2

$\boxed{S_2}$

$$m a_m = F_1 \qquad = -F_2$$

$$2M a_c = F_2 + F_4 \qquad = F_2 - F_3$$

$$\underbrace{M_p a_p}_{\text{pavimento}} = F_3 \qquad = F_3$$

p_m, p_c, p_p le quantità di moto dei corpi (lungo x)

$$\frac{d}{dt} p_m = m a_m = -F_2$$

$$\frac{d}{dt} p_c = 2M a_c = F_2 - F_3$$

$$\frac{d}{dt} p_p = M_p a_p = F_3$$

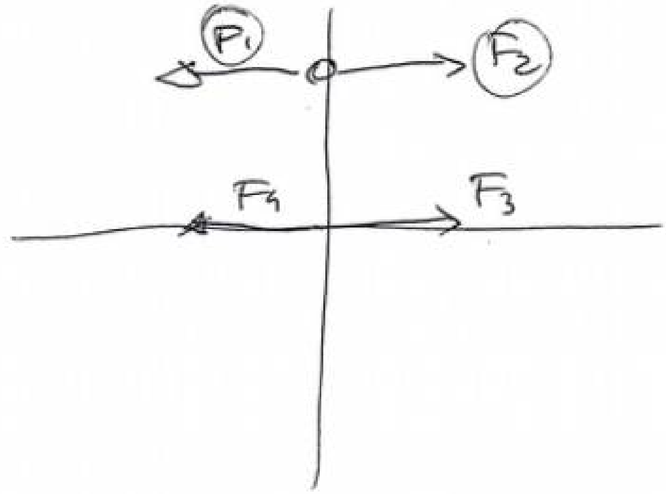
$$\frac{d}{dt} (\underbrace{p_m + p_c + p_p}_{\text{quantità di moto del sistema } S_2}) = 0$$

S_1

$$\frac{d}{dt}\underbrace{(p_m + p_c)}_{\text{quantità di moto di } S_1} = -F_2 + F_2 - F_3 = -F_3 \neq 0$$

$\Rightarrow$ In S_1 non si è conservata la quantità di moto!

Momento angolare



Poiché F_3 non produce momento, allora $S_1 \equiv S_2$ dal punto di vista rotazionale.

Solo F_1 ed F_2 producono momento!

$$\frac{d}{dt} L_m = I_m \alpha_m = +\frac{L}{4} F_1$$

$$\frac{d}{dt} L_c = I_c \alpha_c = -\frac{L}{4} F_2$$

$\boxed{F_1 = F_2}$ (modulo)

$$\frac{d}{dt}(L_m + L_c) = 0$$

Nel primo urto, si conserva:

- energia $\Longrightarrow \frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} I \omega_1^2$
- momento angolare

$\hookrightarrow m v_0 \frac{L}{4} = I \omega_1$

NOTA Incognite: m e ω_1

$$v_0 = \frac{4 I \omega_1}{m L}$$

$$\omega_1^2 = \frac{m v_0^2}{I} = \frac{\cancel{m}}{\cancel{I}} \frac{16 I^{\cancel{2}} \omega_1^2}{m^{\cancel{2}} L^2}$$

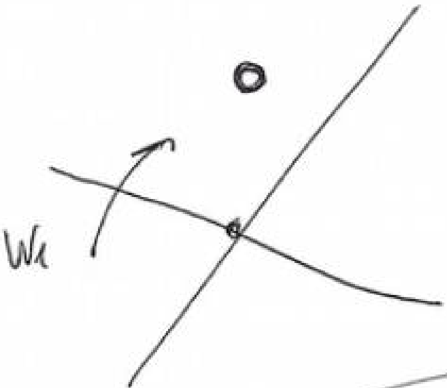
$$\omega_1^2 \left(1 - \frac{16 I}{m L^2}\right) = 0$$

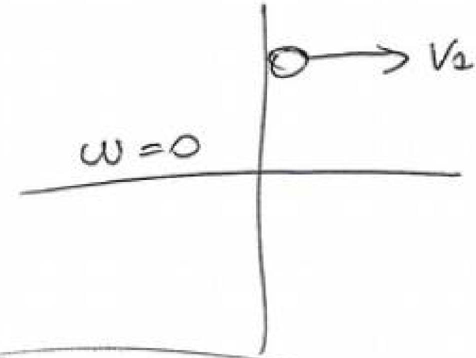
$\omega_1 = 0$ non è una soluzione voluta

$$1 - \frac{16 I}{m L^2} = 0 \Rightarrow m = \frac{L^2}{16 I} = \frac{L^2}{16 \cdot \frac{M L^2}{6}} = \frac{8}{3} M$$

$$\boxed{m = \frac{8}{3} M}$$

$$\boxed{\omega_1 = \frac{4 v_0}{L}}$$





$$\begin{cases} \frac{1}{2} I \omega_1^2 = \frac{1}{2} m v_1^2 \\ I \omega_1 = m \frac{L}{4} v_1 \end{cases}$$

2° urto

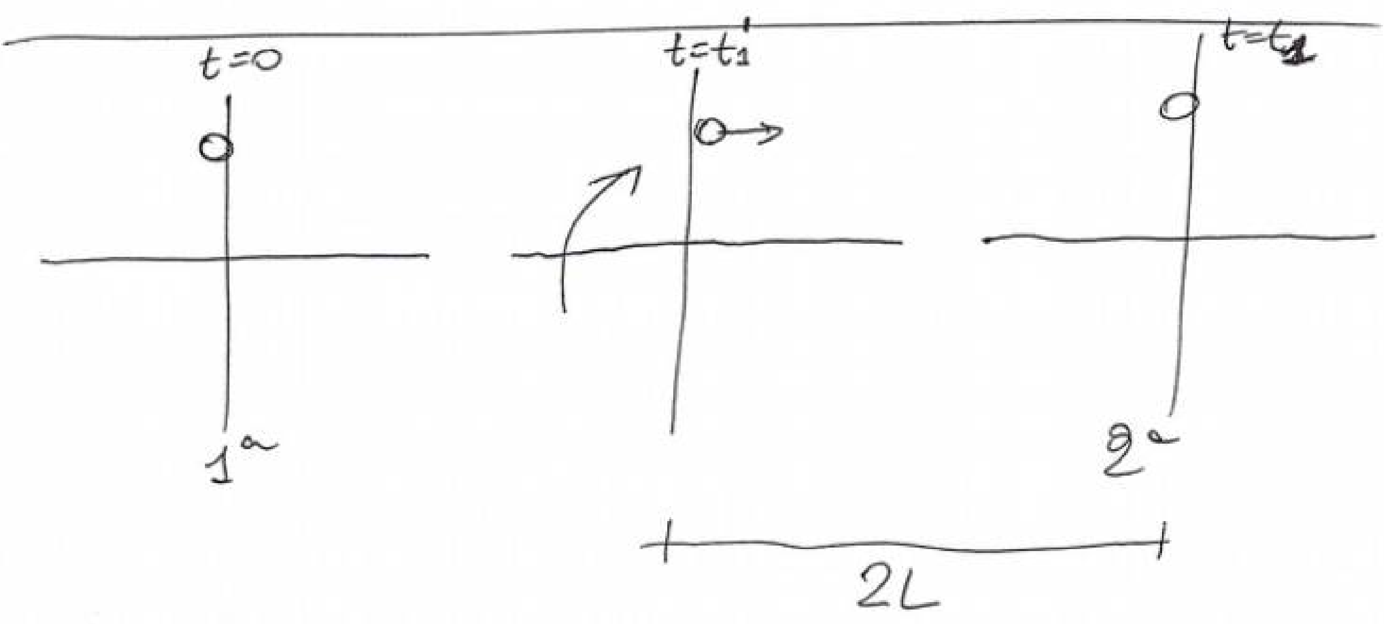
$$\begin{cases} \frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} I \omega_1^2 \\ m \frac{L}{4} v_0 = I \omega_1 \end{cases}$$

1° urto

$$\boxed{v_0 = v_1}$$

Nella sequenza di urti

$$v_0 = v_1 = v_2 = v_3 = \dots \quad v_{35} = \dots$$



$t = [0; t_1'] \Rightarrow$ Ruota la croce.

$\omega_1 = \frac{4V_0}{L}$ compie un quarto di giro.

$\theta(t) = \frac{4V_0}{L} t$

$\theta(t_1') = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{4V_0}{L} t_1' = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t_1' = \frac{\pi L}{8 V_0}$

$t = [t_1', t_1] \Rightarrow$ Si muove m

$V_1 = V_0$ percorre $2L$

$t_1 - t_1' = \frac{2L}{V_0}$

$t_1' = \frac{\pi L}{8V_0}$ $t_1 = \frac{2L}{V_0} + t_1' = \frac{L}{V_0}\left(\frac{\pi + 16}{8}\right)$

t_1: istante in cui urta la croce 2.

t_2: " " " " 3

t_m: " " " " $m+1$

$$\boxed{t_m = m \frac{L}{V_0}\left(\frac{\pi + 16}{8}\right)}$$
