# Corso di recupero di Fisica 2017/2018

**Dario Madeo**

**Lezione del 08/06/2018**

Slides disponibili all'indirizzo
http://www.dii.unisi.it/~madeo/crf/crf1718.html

**Forze conservative ed energia potenziale**

Consideriamo un corpo che si muove da un punto A ad un punto B a causa di una forza. Se il lavoro di tale forza è indipendente dal percorso compiuto per andare da A a B, allora tale forza si dice *conservativa.*

Questo significa che il lavoro compiuto da una forza conservativa può essere espresso in funzione dei soli punti A e B.

Tale funzione prende il nome di *energia potenziale.*

In particolare, tale funzione si indica generalmente con $U$, ed è legata al lavoro $W$ dalla seguente relazione:

$$W = U(A) - U(B).$$

Nel caso monodimensionale, $U$ è una funzione da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$. Se la forza ha spostato il corpo dal punto $x_A$ al punto $x_B$, abbiamo che:

$$W = U(x_A) - U(x_B).$$

D'altro canto, il lavoro è per definizione:

$$W = \int_{x_A}^{x_B} F dx.$$

Dunque, possiamo concludere che:

$$F = -U'(x).$$

In generale, se siamo in $R^2$ o $R^3$, la relazione precedente diventa:

$$F = -\nabla U,$$

dove $\nabla$ indica il gradiente rispetto alle (2 o 3) coordinate spaziali.

**Perchè è importante l'energia potenziale?**

Dato il legame che ha l'energia potenziale con le forze conservative, è possibile studiare le proprietà di alcuni punti particolari nello spazio.

Consideriamo nel caso monodimensionale una massa $m$ soggetta ad una forza conservativa (e quindi ad un potenziale):

$$m\ddot{x} = -U'(x).$$

Si dice che il sistema è all'*equilibrio* se $m\ddot{x} = 0$ (e $\dot{x} = 0$), ovvero se:

$$-U'(x) = 0.$$

Questo significa che i punti di equilibrio sono *punti stazionari* della funzione $U(x)$.

I punti di equilibrio si dividono in *stabili*, *instabili* e *indifferenti.* Un punto di equilibrio è stabile se esso rappresenta un *minimo (locale)* dell'energia potenziale $U(x)$. Al contrario, se il punto è un *massimo (locale)* o un *flesso a tangente orizzontale* di $U(x)$, si parla di equilibrio instabile. Infine, un equilibrio è indifferente se fa parte di una regione di spazio costituita totalmente da punti di equilibrio (ad esempio, un piano). Da notare che una tale regione è costituita da punti in cui l'energia potenziale rimane sempre la stessa.

**Cosa succede ad una massa se è situata in un punto di equilibrio?**

Se la massa non ha velocità ($\dot{x} = 0$), essa rimarrà ferma in tale punto.

Estratto dall'esame di Fisica 1 del 7 Luglio 2005

Esercizio 2

Un oggetto di massa M si muove lungo una coordinata x è sottoposto ad una forza conservativa F cui è associata un energia potenziale U, la quale dipende dalla posizione x secondo la legge $U(x)=3Ax-Bx^3$, con A costante positiva e B costante da determinare.

a) Stabilire per quali valori di B esistono punti di equilibrio, e, di questi, quali sono di equilibrio stabile e quali di equilibrio instabile (esprimere la posizione di tali punti in termini di A e B).

b) In una condizione (cioè per un valore di B) sotto cui esiste un punto di equilibrio stabile ed uno di equilibrio instabile, determinare con quale velocità deve muoversi l'oggetto nel punto di equilibrio stabile per potersi allontanare indefinitamente da tale punto.

c) Calcolare quanto lavoro compie la forza F quando l'oggetto si sposta dalla posizione $-3\sqrt{(A/B)}$ alla posizione $3\sqrt{(A/B)}$.

$$U(x) = 3Ax - Bx^3 \qquad \underline{A>0}, \underline{B\,?}$$

$$F(x) = -\frac{\partial U(x)}{\partial x} \qquad \text{(Caso 1D)}$$

$$\underline{F(x)} = 3Bx^2 - 3A$$

$$\boxed{m\ddot{x} = F(x)}$$

Concetto di equilibrio.

Il sistema è all'equilibrio se si trova in una posizione $x^*$ tale che $F(x^*) = 0 \Rightarrow \ddot{x} = 0$

$$\equiv \quad U'(x^*) = 0$$

$x^*$ è anche un punto stazionario del potenziale.

Un equilibrio $x^*$ può essere:

- <u>stabile</u> se $x^*$ è minimo locale di $U(x)$
- <u>instabile</u> se $x^*$ è massimo locale di $U(x)$
- indifferente se $x^*$ ha vicino a sé un'infinità di altri punti di equilibrio

---

Cerco gli equilibri:

$$x^* : F(x^*) = 0 \qquad (\equiv U'(x^*) = 0)$$

$$3Bx^2 - 3A = 0$$

$$x^*_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{A}{B}}$$

Esistono ($\equiv$ sono $\mathbb{R}$eali) se $B > 0$.

---

Per la stabilità, valuto la derivata seconda di $U(x)$

$$\frac{\partial^2 U(x)}{\partial x^2} = -6Bx.$$

$$\left.\frac{\partial^2 U(x)}{\partial x^2}\right|_{x=x_1^*} = -6B\left(-\sqrt{\frac{A}{B}}\right) = 6B\sqrt{\frac{A}{B}} > 0$$

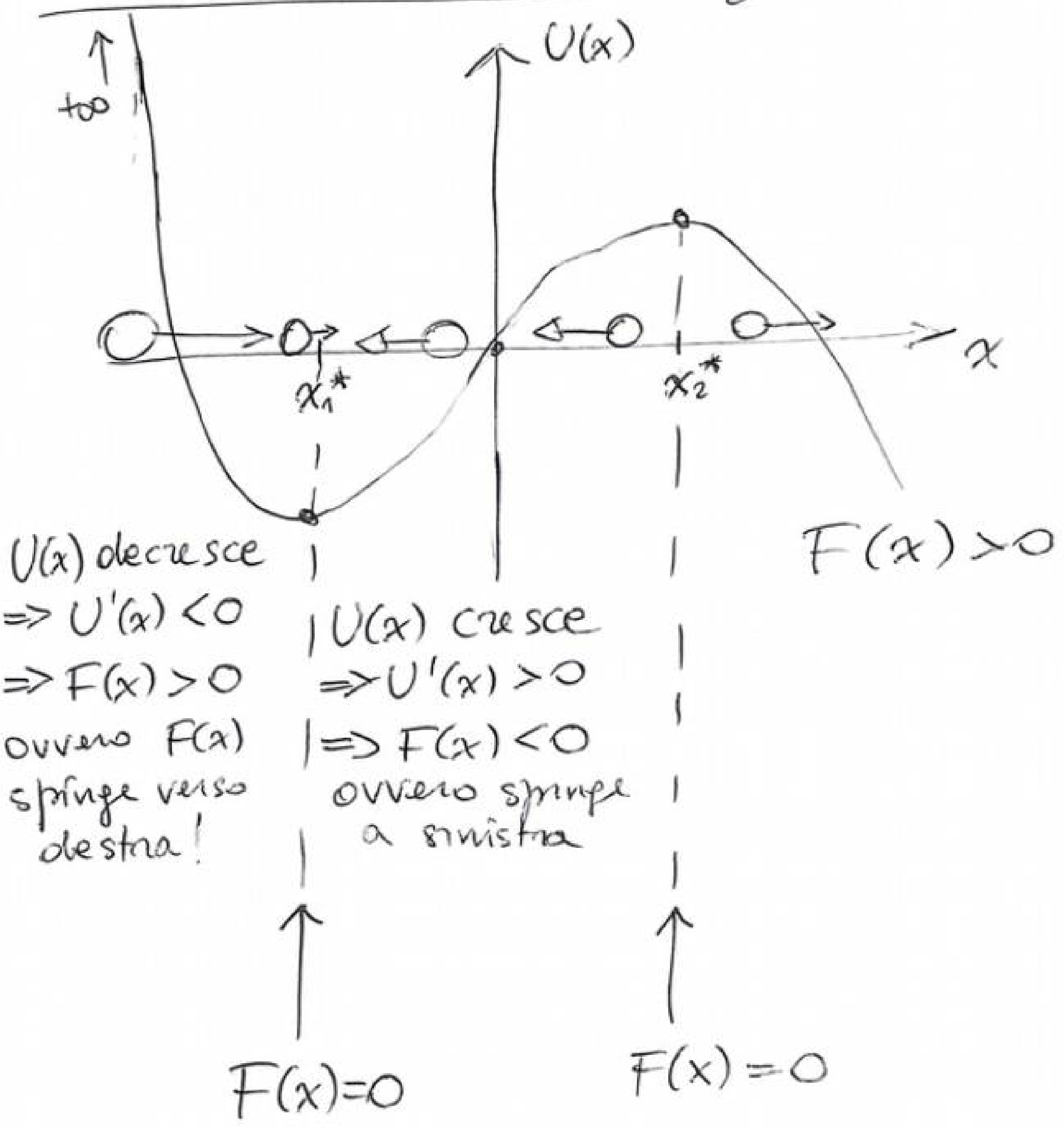
$x_1^*$ è minimo locale di $U(x)$ $\equiv$

$x_1^*$ è un punto di equilibrio <u>stabile</u>.

$$\left.\frac{\partial^2 U(x)}{\partial x^2}\right|_{x=x_2^*} = -6B\sqrt{\frac{A}{B}} < 0$$

$x_2^*$ è massimo locale di $U(x) \Rightarrow$

$x_2^*$ è un punto di equilibrio instabile.



La pallina si può allontanare indefinitamente da $x_1^*$ se:

- ha velocità verso destra
- ha energia cinetica sufficiente a superare la "barriera di potenziale" dovuta alla presenza di $x_1^*$ e $x_2^*$.

<u>Barriera</u> $U(x_2^*) - U(x_1^*)$

$$U(x_2^*) = 2A\sqrt{\frac{A}{B}} \qquad U(x_1^*) = -2A\sqrt{\frac{A}{B}}$$

$$\underbrace{U(x_2^*)}_{U_2} - \underbrace{U(x_1^*)}_{U_1} = 4A\sqrt{\frac{A}{B}}$$

Conservazione energia meccanica

$$K_1 + U_1 = K_2 + U_2$$

<u>$K_2 > 0$</u> $\Rightarrow K_2 = K_1 + U_1 - U_2 > 0$

$$\boxed{K_1 > U_2 - U_1}$$ $\triangleright$ barriera di potenziale

$$\frac{1}{2} M v_1^2 = 4A\sqrt{\frac{A}{B}} \Rightarrow v_1 = \sqrt{\frac{8A}{M}\sqrt{\frac{A}{B}}}$$

incognita

Cosa succede se $A = 0$ !

$U(x) = -Bx^3$

$U'(x) = -3Bx^2 \longrightarrow \underline{F(x) = 3Bx^2} > 0$

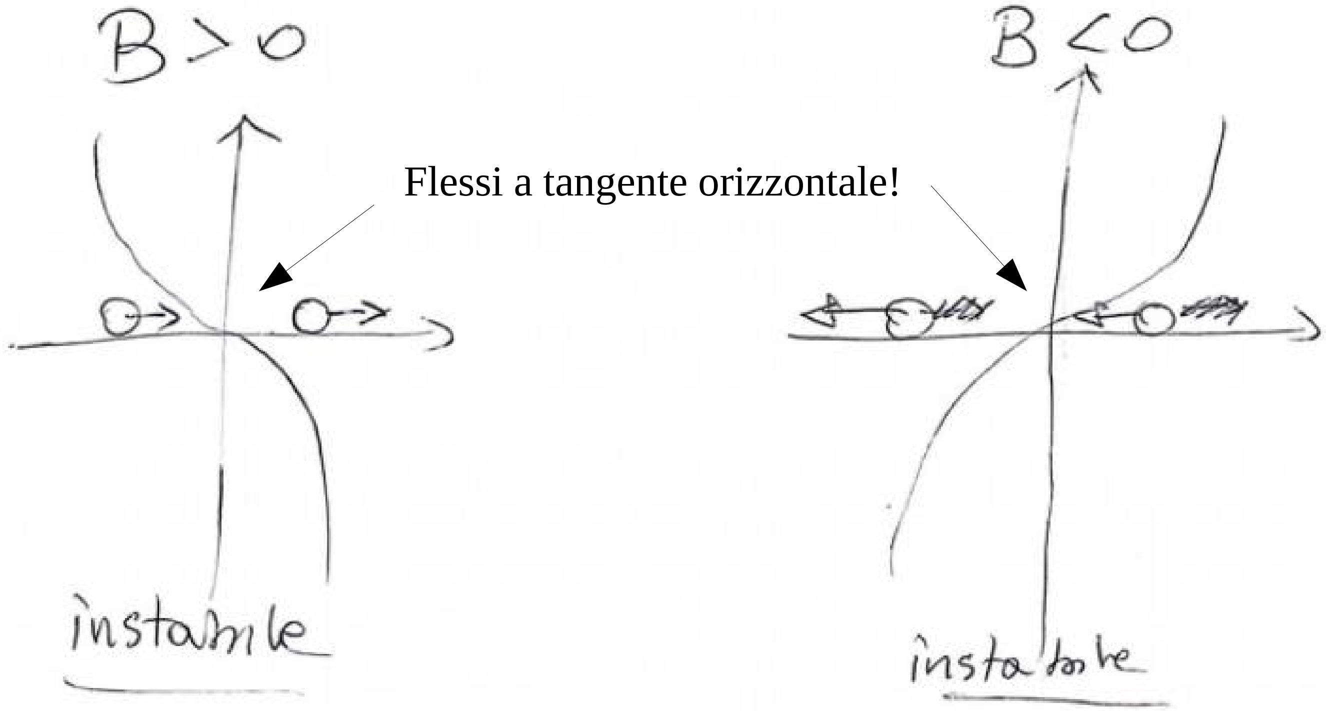
$U''(x) = -6Bx$

Equilibri $\boxed{x^* = 0}$

Osserviamo il segno di $F(x)$:

1) Se $B > 0$, $F(x) > 0$

2) Se $B < 0$, $F(x) < 0$




$\boxed{\text{Notare che } U''(0) = 0}$

Lavoro

$$a = -3\sqrt{\frac{A}{B}}$$

$$b = +3\sqrt{\frac{A}{B}}$$

$$L = \int_a^b F(x)\,dx$$

$$= \int_a^b -U'(x)\,dx$$

$$= -\int_a^b U'(x)\,dx = -\left(U(b) - U(a)\right) =$$

$$= U(a) - U(b).$$

$$U\left(-3\sqrt{\frac{A}{B}}\right) = 18A\sqrt{\frac{A}{B}}$$

$$U\left(3\sqrt{\frac{A}{B}}\right) = -18A\sqrt{\frac{A}{B}}$$

$$L = 36A\sqrt{\frac{A}{B}}.$$

Estratto dall'esame di Fisica 1 del 21 Luglio 2005

Esercizio 2

Un oggetto di massa M si muove lungo una coordinata x è sottoposto ad una forza conservativa F cui è associata un energia potenziale U, la quale dipende dalla posizione x secondo la legge

$$U(x)=2Bx^3-3Ax^2,$$

con A costante positiva e B costante da determinare.

a) Al variare di B, stabilire se esistono punti di equilibrio, qual è la loro ascissa (esprimere la posizione di tali punti in termini di A e B), quali sono di equilibrio stabile e quali di equilibrio instabile.

b) In una condizione (cioè per un valore di B) sotto cui esiste un punto di equilibrio stabile ed uno di equilibrio instabile, determinare con quale velocità deve muoversi l'oggetto nel punto di equilibrio stabile per potersi allontanare indefinitamente da tale punto.

c) Determinare la frequenza con cui l'oggetto compie piccole oscillazioni intorno al punto di equilibrio stabile.

$$U(x) = 2Bx^3 - 3Ax^2 \qquad A>0,\ B\ ?$$

$$U'(x) = 6Bx^2 - 6Ax \Rightarrow F(x) = 6Ax - 6Bx^2$$

$$U''(x) = 12Bx - 6A.$$

Equilibri $\quad U'(x^*)=0$

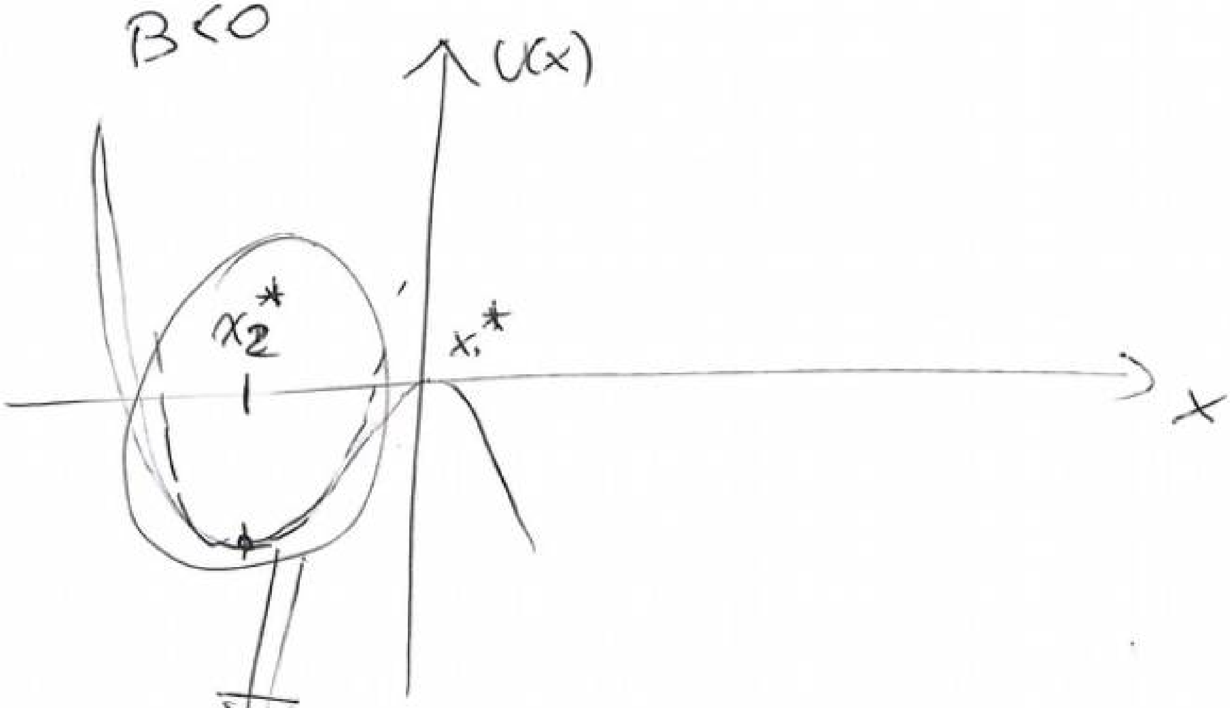
$$6(Bx^2 - Ax) = 0 \quad \begin{cases} x_1^* = 0 \\ x_2^* = \dfrac{A}{B} \end{cases}$$

$x_2^* \ \exists$ se $B \neq 0$

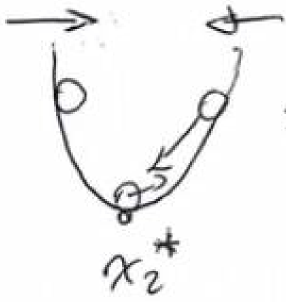
Stabilità

$U''(0) = -6A < 0 \Rightarrow x_1^*$ è massimo $\Rightarrow x_1^*$ è instabile.

$U''\left(\frac{A}{B}\right) = 12 \cdot B \cdot \frac{A}{B} - 6A = 6A > 0 \Rightarrow x_2^*$ è minimo $\Rightarrow x_2^*$ è stabile.




Analisi locale




$\Longrightarrow$ Potenziale convesso può produrre oscillazioni!

Linearizzo la forza.
"Quadratizzo" il potenziale.

$$F(x) = 6Ax - 6Bx^2$$

La linearizzo nel punto stabile.

$$F(x) = F(x_2^*) + F'(x_2^*)(x - x_2^*) + \dots$$
$$= 0 + (-6A)\left(x - \frac{A}{B}\right) + \dots$$

$$M\ddot{x} = -6A\left(x - \frac{A}{B}\right)$$

$$\ddot{x} = -\underbrace{\left(\frac{6A}{M}\right)}_{\omega^2}\left(x - \frac{A}{B}\right)$$

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{6A}{M}}}$$

pulsazione per piccole oscillazioni!

**Nota**

Supponiamo che un potenziale sia convesso (anche solo localmente) intorno ad un suo punto stazionario (cioè intorno ad un punto di equilibrio della dinamica). La convessità del potenziale produce due conseguenze:

- esiste un intorno destro del punto di equilibrio in cui la forza è negativa – quindi se la massa è a destra dell'equilibrio, verrà spinta verso di esso;
- esiste un intorno sinistro del punto di equilibrio in cui la forza è positiva – quindi se la massa è a sinistra dell'equilibrio, verrà spinta verso di esso.

Tale fenomeno produce oscillazioni!

# Estratto dall'esame di Fisica 1 del 23 Giugno 2017

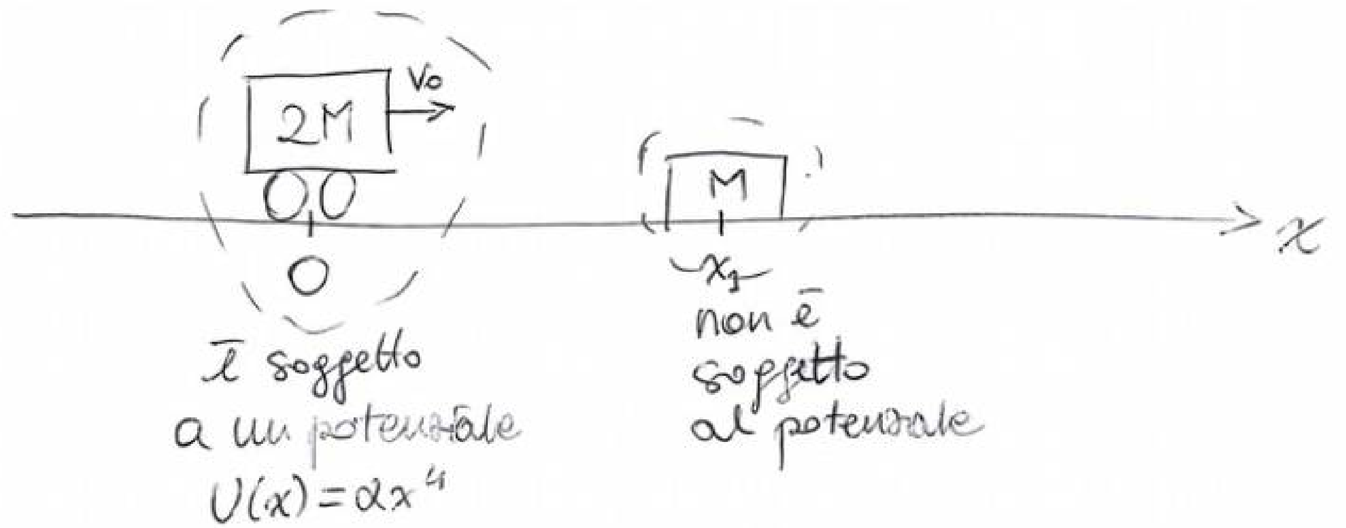
Esercizio 1

Un carrello C di massa 2M si muove senza attriti su un binario orizzontale su cui è definita un'ascissa x. Esso è sottoposto a una forza conservativa associata all'energia potenziale $U(x)=\alpha x^4$, dove $\alpha$ è una assegnata costante positiva. All'istante t=0, C è in x=0 con una data velocità $v_0>0$. Ad un istante successivo, al quale la velocità di C è dimezzata, esso urta elasticamente ed istantaneamente contro un blocco B di massa M, inizialmente fermo, il quale inizia a muoversi liberamente sul binario.

a) Determinare la posizione in cui avviene l'urto e chiarire se, dopo la collisione, C tornerà a transitare da x=0. In caso di risposta affermativa, calcolare la velocità con cui ci transiterà.

b) Stabilire se il successivo moto di C è di tipo oscillatorio. In caso affermativo, determinarne l'ampiezza.

c) Chiarire se il moto di C è di tipo armonico (eventualmente anche in ipotesi di piccole oscillazioni). In caso affermativo, determinarne la frequenza.




Quando arriva in $x_1$, la velocità è $\frac{v_0}{2}$.

Conservazione energia meccanica.

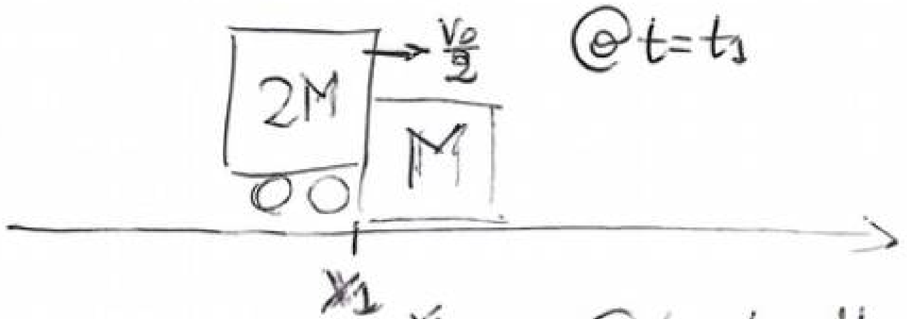
$$U_0 = 0 \qquad\qquad U_1 = \alpha x_1^4$$

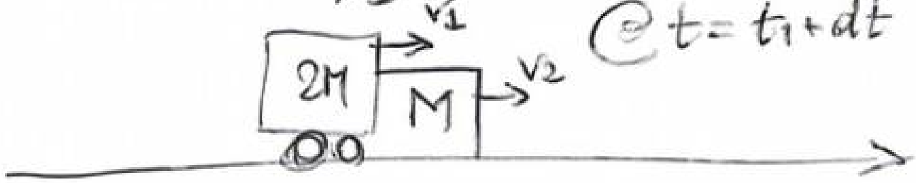
$$K_0 = \frac{1}{2} 2M v_0^2 = M v_0^2 \qquad\qquad K_1 = \frac{1}{2} 2M \left(\frac{v_0}{2}\right)^2 = \frac{M v_0^2}{4}$$

$$U_0 + K_0 = U_1 + K_1$$

$$M v_0^2 = \alpha x_1^4 + \frac{M v_0^2}{4} \Rightarrow \alpha x_1^4 = \frac{3}{4} M v_0^2$$

$$x_1 = + \sqrt[4]{\frac{3 M v_0^2}{4\alpha}}$$




$$\begin{cases} 2M\frac{v_0}{2} = 2Mv_1 + Mv_2 \\ \frac{1}{2}2M\left(\frac{v_0}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}2Mv_1^2 + \frac{1}{2}Mv_2^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_1 = \frac{v_0}{6} \\ v_2 = \frac{2}{3}v_0 \end{cases}$$

---

$U(x) = \alpha x^4$

$U'(x) = 4\alpha x^3$

$U''(x) = 12\alpha x^2$

Equilibrio: $x=0$

Stabilità di $x=0$

$U''(0) = 0 \Rightarrow$ Caso dubbio

Valuto il segno di $U'$!

- $4\alpha x^3 > 0 \xRightarrow{\alpha>0} x > 0$
- $4\alpha x^3 < 0 \Rightarrow x < 0$

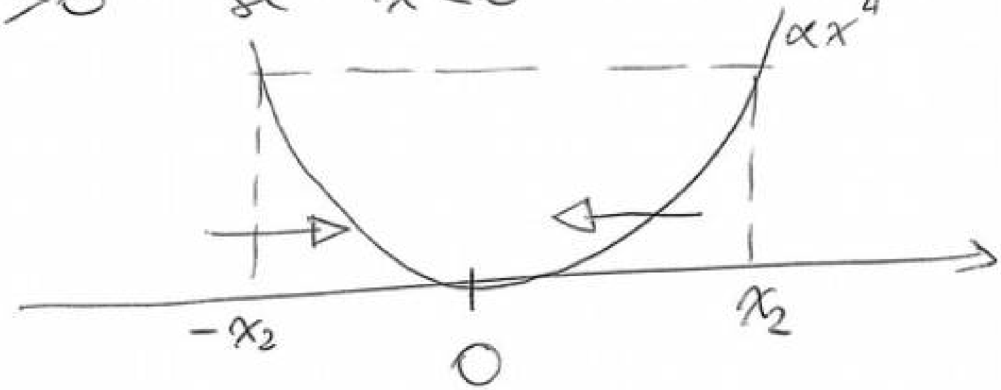
$4\alpha\, x \cdot x \cdot x \geq 0$

| | | 0 | |
|---|---|---|---|
| $x>0$ | $-$ | | $+$ |
| $x>0$ | $-$ | | $+$ |
| $x>0$ | $-$ | | $+$ |
| | $-$ | | $+$ ← $x>0$ |

---

$F<0$ se $x>0$

$F>0$ se $x<0$




<u>$U(x)$ è pari</u> $\qquad U(x)=U(-x)$

$x_2$ è il punto nel quale il carrello ha energia cinetica nulla.

$$t_1: \quad V_1 = \frac{V_0}{6} \quad \Rightarrow \quad K_1 = \frac{1}{2} 2M V_1^2 = \frac{M V_0^2}{36}$$

$$x_1 = \sqrt[4]{\frac{3MV_0^2}{4\alpha}} \quad \Rightarrow \quad U_1 = \alpha x_1^4 = \frac{3MV_0^2}{4}.$$

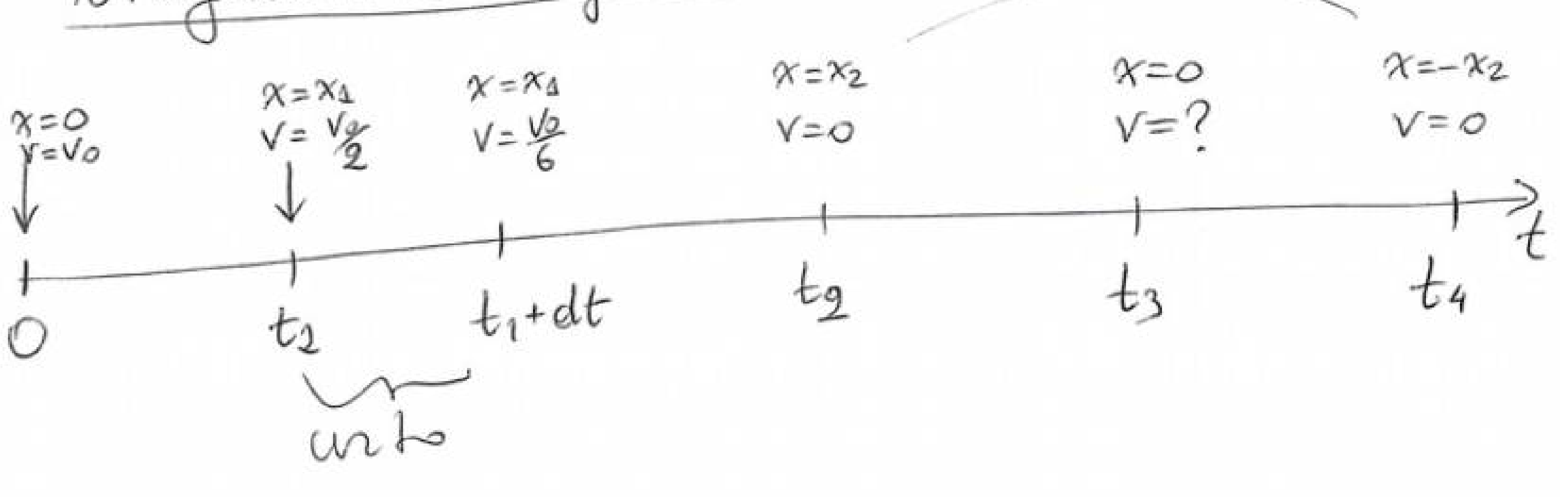
$$t_2: \quad K_2 = 0$$ ← si è fermato!

$$U_2 = \alpha x_2^4$$

$$K_1 + U_1 = K_2 + U_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{MV_0^2}{36} + \frac{3}{4} MV_0^2 = \alpha x_2^4$$

$$\alpha x_2^4 = \frac{\cancel{28}^{\,7}}{\cancel{36}_{\,9}} MV_0^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_2 = \sqrt[4]{\frac{7MV_0^2}{9\alpha}}}$$

Diagramma degli eventi



$t_2$: $v_2 = 0$ $\quad K_2 = 0$

$$x_2 = \sqrt[4]{\frac{7MV_0^2}{9\alpha}} \quad U_2 = \frac{7MV_0^2}{9}$$

$$\boxed{U = \alpha x^4}$$

$t_3$: $V_3 = ?$ $\quad K_3 = \frac{1}{2} \cdot 2MV_3^2 = MV_3^2$

$x = 0$ $\quad U_3 = 0$

$$K_2 + U_2 = K_3 + U_3$$

$$\frac{7MV_0^2}{9} = MV_3^2 \Rightarrow \boxed{V_3 = -\frac{V_0}{3}\sqrt{7}}$$

mi sto muovendo a sinistra!

---

$$U(x) = \alpha x^4$$

$$U'(x) = 4\alpha x^3 \quad F(x) = -4\alpha x^3$$

$\hookrightarrow$ NON È LINEARE, DUNQUE IL MOTO NON È ARMONICO.

PROVO A LINEARIZZARE (HP. PICCOLE OSC.)

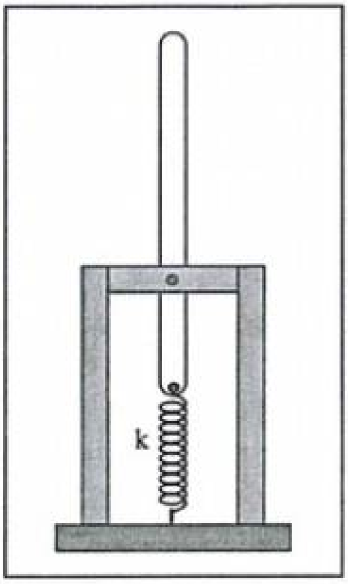
$$F(x) = F(0) + F'(0)(x-0) + \ldots$$

$$= 0 + 0\,(x-0) + \ldots$$

NON POSSO LINEARIZZARE!

$\Rightarrow$ Il moto non è armonico nemmeno per piccole oscillazioni.

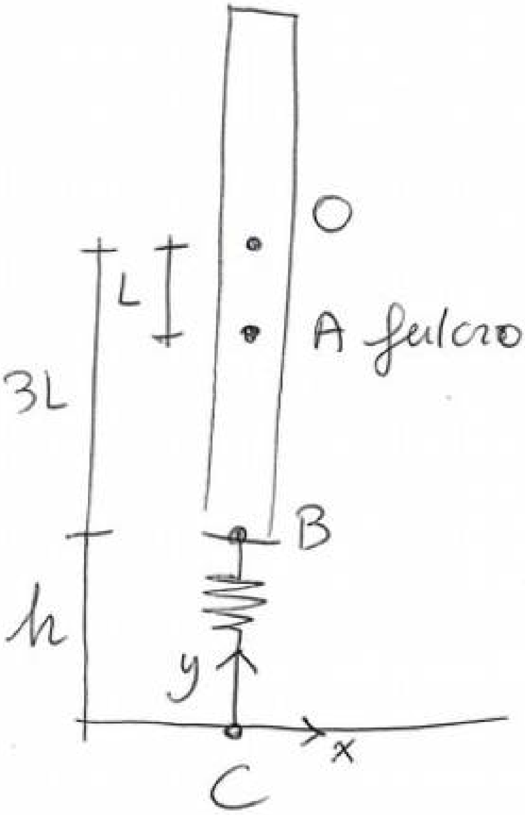
# Estratto dall'esame di Fisica 1 del 17 Febbraio 2017




Esercizio 2

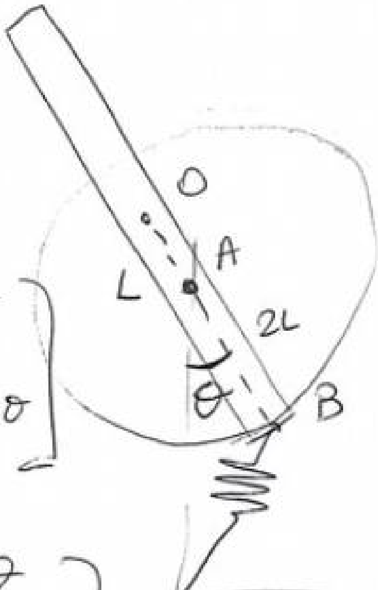
Una sbarretta sottile di massa M e lunghezza 6L è imperniata ad 1/3 della sua lunghezza ad un asse liscio orizzontale. Essa viene mantenuta verticale con il baricentro sopra al fulcro mediante una molla di lunghezza trascurabile e costante elastica k, come rappresentato in figura. Quanto deve essere allungata la molla affinché la posizione descritta sia stabile? Se si toglie la molla e si applica all'estremo inferiore una massa puntiforme M, la posizione resta di equilibrio stabile? Se sì, qual è la frequenza di piccole oscillazioni intorno ad essa? Se no, qual è la velocità angolare della sbarretta quando essa, partendo da ferma, transita in posizione orizzontale?

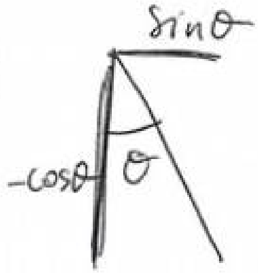
[Suggerimento: iniziare indicando con x la lunghezza della molla quando la sbarretta è verticale, e calcolando la lunghezza y(θ) conseguente a una rotazione di un angolo θ].




$$C = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 \\ 2L+h \end{bmatrix}$$




$$B = A + 2L \begin{bmatrix} \sin\theta \\ -\cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2L\sin\theta \\ 2L+h-2L\cos\theta \end{bmatrix}$$

$$O = A + L \begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -L\sin\theta \\ 2L+h+L\cos\theta \end{bmatrix}$$

## Potenziale della sbarretta

$$U_s(\theta) = Mg\left(\boxed{2L+h}+L\cos\theta\right)$$

**Posso buttare via i termini che non dipendono dalla variabile posizionale!**

$$U_s(\theta) = MgL\cos\theta$$

## Lunghezza della molla

$$\overline{BC} = \sqrt{(2L\sin\theta)^2+(2L+h-2L\cos\theta)^2}$$

$$= \sqrt{4L^2\sin^2\theta + 4L^2+h^2+4L^2\cos^2\theta + 4Lh - 8L^2\cos\theta - 4Lh\cos\theta}$$

$$= \sqrt{8L^2+h^2+4Lh-8L^2\cos\theta-4Lh\cos\theta}.$$

## Potenziale della molla

$$U_K(\theta) = \frac{1}{2}K\overline{BC}^2 =$$

$$= \frac{1}{2}K\left(\boxed{8L^2+h^2+4Lh}-8L^2\cos\theta-4Lh\cos\theta\right).$$

Posso buttare via i termini che non dipendono dalla variabile posizionale!

$$U_K(\theta) = \frac{1}{2}K\left(-8L^2\cos\theta-4Lh\cos\theta\right)$$

$$= -2KL\cos\theta\,(2L+h).$$

## Potenziale del sistema

$$U(\theta) = U_S(\theta) + U_K(\theta)$$
$$= \left[MgL - 2KL(2L+h)\right]\cos\theta.$$

$$\boxed{\text{NOTA} \quad \tau = -\frac{\partial U(\theta)}{\partial\theta}}$$

Equilibrio $\Rightarrow \tau(\theta^*) = 0$

$$\tau(\theta) = -\left[MgL - 2KL(2L+h)\right]\sin\theta$$

$$\tau(\theta^*) = 0 \quad \Rightarrow \quad \sin\theta^* = 0 \qquad \theta^* = 0$$

opp

$$\theta^* = \pi$$

$$U''(\theta) = -\left[MgL - 2KL(2L+h)\right]\cos\theta$$

$$U''(0) = -MgL + 2KL(2L+h) > 0$$

incognita ($h$) — $\theta^* = 0$ stabile

$$\Rightarrow 2KL(2L+h) > MgL$$

$$2L + h > \frac{Mg}{2K}$$

$$\boxed{h > \frac{Mg}{2K} - 2L}$$