Corso di recupero di Fisica 2017/2018

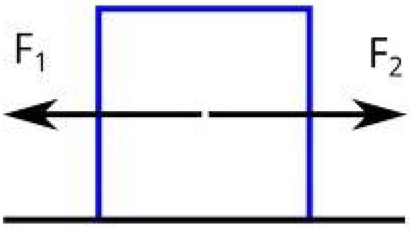
Dario Madeo

Lezione del 01/06/2018

Slides disponibili all'indirizzo
http://www.dii.unisi.it/~madeo/crf/crf1718.html

Corpo fermo su piano scabro soggetto a varie forze.

Sotto quali condizioni rimane fermo grazie alla forza di attrito statico?
Qual'è la direzione dell'attrito statico?



Se $F_1 > F_2$, allora la forza di attrito statico deve puntare verso destra. Il suo modulo è pari a F_1-F_2, e deve essere inferiore a $Mg\,\mu_s$

Se $F_1 < F_2$, allora la forza di attrito statico deve puntare verso sinistra. Il suo modulo è pari a F_2-F_1, e deve essere inferiore a $Mg\,\mu_s$

Corpo in movimento su piano scabro soggetto a varie forze.

Qual'è la direzione dell'attrito dinamico?

Il modulo dell'attrito dinamico è sempre pari a $Mg\,\mu_D$.
Per quanto riguarda il suo verso, non contano le forze F_1 ed F_2, ma solo la velocità posseduta dal corpo.
Se il corpo si muove verso destra, l'attrito dinamico tira verso sinistra, e viceversa. Avremo dunque che:

$$M\ddot{x} = F_2 - F_1 - Mg\,\mu_D$$

se il corpo si sta muovendo verso destra, oppure

$$M\ddot{x} = F_2 - F_1 + Mg\,\mu_D$$

se il corpo si sta muovendo verso sinistra.

L'attrito dinamico, opponendosi al moto, brucia energia cinetica, ed è dunque una forza non conservativa. L'energia cinetica bruciata corrisponde al lavoro compiuto dall'attrito dinamico.
L'attrito statico invece non brucia energia cinetica e non compie lavoro (il corpo rimane fermo).

Esercizio estratto dall'esame di Fisica 1 del 7 Ottobre 2003

Esercizio 2

Un blocco di massa M è agganciato ad una molla di costante elastica k e poggia su un piano orizzontale scabro.

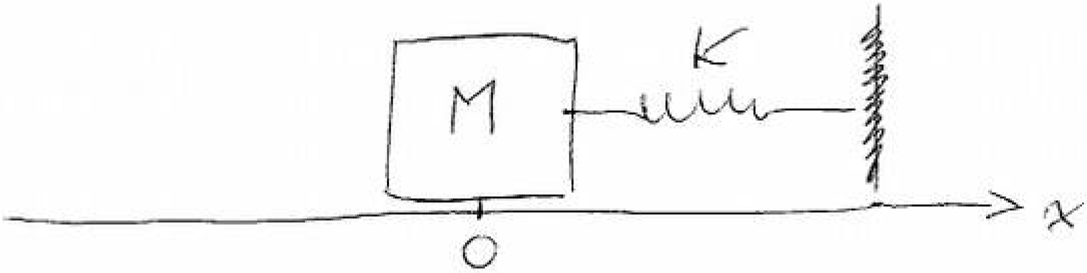
All'inizio la molla è compressa di un tratto Δx ed il sistema è tenuto bloccato. Quando il blocco viene liberato esso inizia a spostarsi, poi quando la molla è allungata di un tratto $\Delta x' = \Delta x/2$, il blocco si ferma e non si muove più.

a) Calcolare quanta energia viene dissipata nel moto e calcolare il coefficiente d'attrito dinamico μ_D.

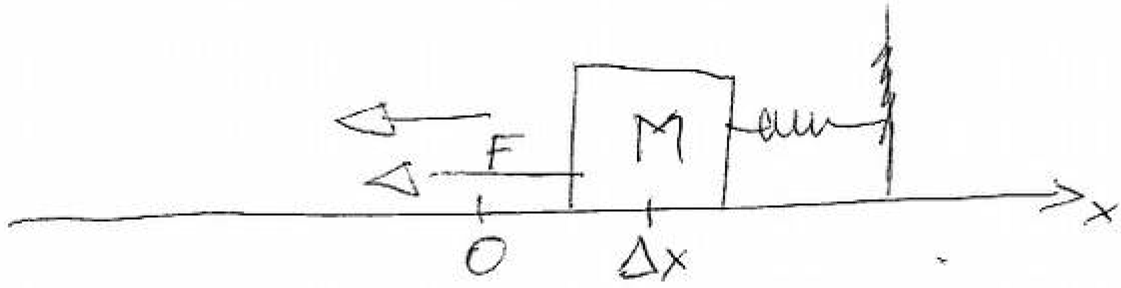
b) Stabilire il valore minimo che deve avere il coefficiente d'attrito statico.

c) Scrivere l'equazione del moto del sistema, valida nell'intervallo di tempo in cui il blocco si muove.

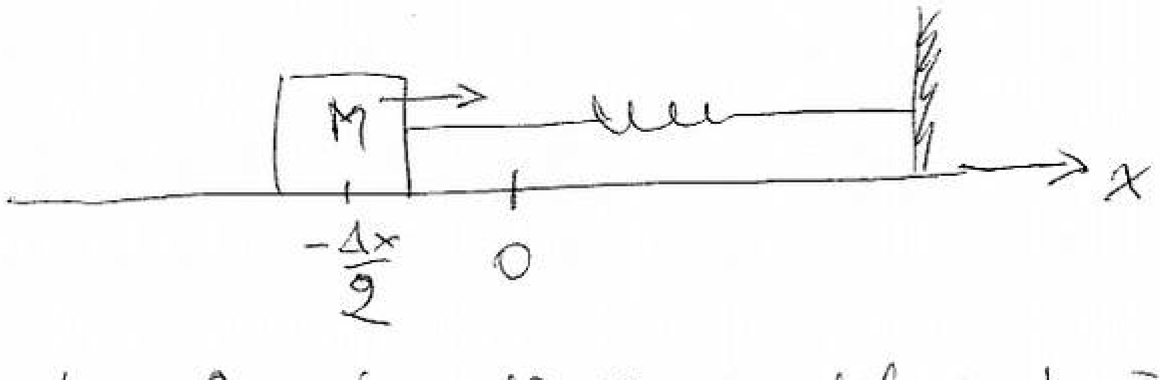
d) Identificare la posizione occupata dal blocco nell'istante in cui esso ha accelerazione nulla e determinare l'istante al quale ciò si verifica.



1



2



Tra 1 e 2 la direzione del moto è a Sx. $\equiv \dot{x} < 0$

$\Rightarrow$ La forza di attrito dinamico tira verso dx.

(1) $K_1 = 0$ $\qquad U_1 = \frac{1}{2} k \Delta x^2$

$$E_1 = \frac{1}{2} k \Delta x^2$$

(2) $K_2 = 0$ $\qquad U_2 = \frac{1}{2} k \frac{\Delta x^2}{4} = \frac{1}{8} k \Delta x^2$

$$E_2 = \frac{1}{8} k \Delta x^2$$

Energia bruciata $\quad \boxed{E_1 - E_2 = \frac{3}{8} k \Delta x^2}$

$\boxed{E_1 - E_2 = L_D} \rightarrow$ lavoro forza di attrito dinamico.

$L_D = \mu_D M g \cdot \frac{3}{2} \Delta x \Leftarrow\!\Rightarrow$ Spazio percorso

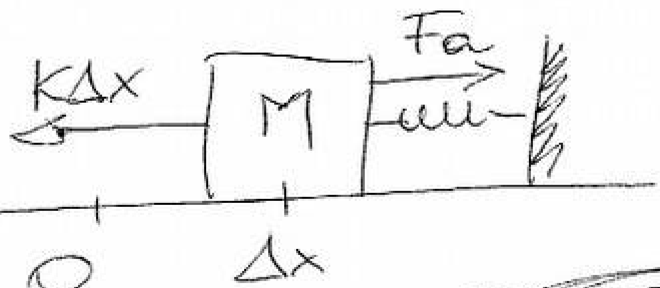
$\Downarrow$

Il verso della forza di attrito dinamico è determinato dalla velocità del corpo.

Il suo modulo è sempre costante.

$$\frac{3}{8} k \Delta x^2 = \mu_D M g \cdot \frac{3}{2} \Delta x \Rightarrow \boxed{\mu_D = \frac{k \Delta x}{4 M g}}$$

1



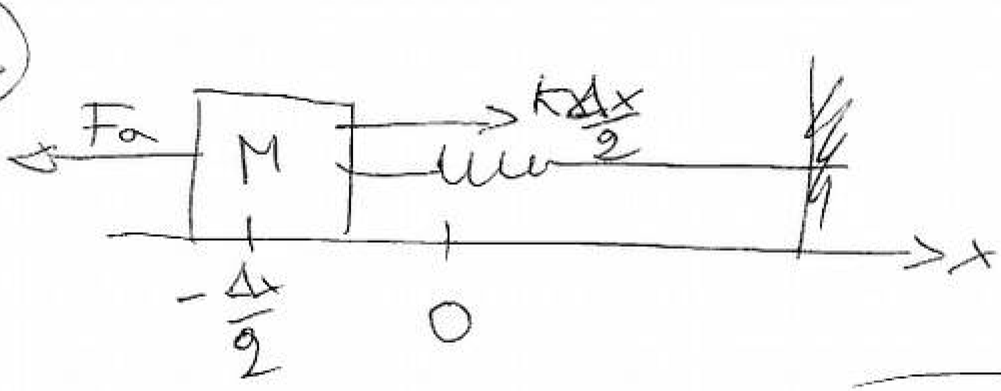
$$\mu_s Mg \geq F_a = k\Delta x \Rightarrow \boxed{\mu_s \geq \frac{k\Delta x}{Mg}}$$

L'attrito statico si trova in casi "statici".

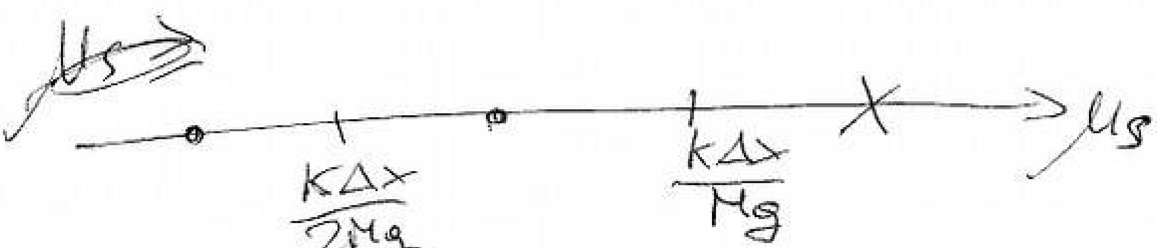
"Statico" $\equiv \dot{x} = 0$

La direzione di tale forza è ~~posi~~ opposta alla somma di tutte le altre.

2



$$\mu_s Mg \geq F_a = k\frac{\Delta x}{2} \Rightarrow \boxed{\mu_s \geq \frac{k\Delta x}{2Mg}}$$



$$\mu_S > \mu_D$$

$$\mu_S \geq \frac{K\Delta x}{Mg} \qquad \mu_D = \frac{K\Delta x}{4Mg}$$

Legge del moto

occhio al segno!

$$M\ddot{x} = -Kx + \mu_D Mg$$

$$\ddot{x} = -\omega^2 x + \mu_D g \qquad \omega = \sqrt{\frac{K}{M}}$$

$$x(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t + C$$

$$\dot{x}(t) = -A\omega\sin\omega t + B\omega\cos\omega t$$

$$\ddot{x}(t) = -A\omega^2\cos\omega t - B\omega^2\sin\omega t$$

$$x(0) = \Delta x \qquad \dot{x}(0) = 0$$

$$x(0) = A + C = \Delta x$$

$$\dot{x}(0) = B\omega = 0 \implies B = 0$$

$$-\cancel{A\omega^2\cos\omega t} - \cancel{B\omega^2\sin\omega t} = -\omega^2(\cancel{A\cos\omega t} + \cancel{B\sin\omega t} + C) + \mu_D g$$

$$0 = -\omega^2 C + \mu_D g$$

$$C = \frac{\mu_D g}{\omega^2} = \frac{1}{4}\Delta x$$

$$A = \frac{3}{4}\Delta x$$

$$x(t) = \frac{3}{4}\Delta x \cos\omega t + \frac{1}{4}\Delta x$$

$$t_2 : \dot{x}(t_2) = 0$$

$$\dot{x}(t_2) = -\frac{3}{4}\Delta x\,\omega \sin\omega t_2 = 0$$

$$\Longrightarrow \sin\omega t_2 = 0 \Rightarrow \omega t_2 = \pi$$

$$t_2 = \frac{\pi}{\omega}$$

$$x(t_2) = \frac{3}{4}\Delta x \cos\pi + \frac{1}{4}\Delta x$$

$$= -\frac{3}{4}\Delta x + \frac{1}{4}\Delta x = -\frac{\Delta x}{2}.$$

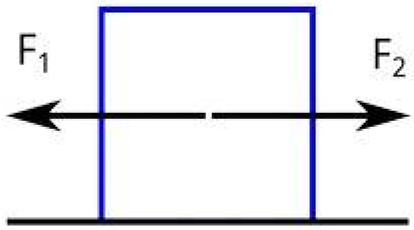
$$t' : \ddot{x}(t') = 0$$

$$\ddot{x}(t') = -\frac{3}{4}\Delta x\,\omega^2 \cos\omega t' = 0$$

$$\omega t' = \frac{\pi}{2} + \cancel{k\pi \quad k \in \mathbb{Z}}$$

$$\boxed{t' = \frac{\pi}{2\omega}}$$

$$x(t') = \frac{3}{4}\Delta x \cos\frac{\pi}{2} + \frac{1}{4}\Delta x = \frac{1}{4}\Delta x.$$



Corpo in movimento soggetto ad attrito viscoso.

Quale è il verso dell'attrito viscoso?

Il modulo dell'attrito dinamico è sempre pari a $\beta|v|$.
Per quanto riguarda il suo verso, non contano le forze F_1 ed F_2, ma solo la velocità posseduta dal corpo.
Se il corpo si muove verso destra, l'attrito dinamico tira verso sinistra, e viceversa.
Per tale ragione, nelle leggi del moto, tale forza ha sempre la forma $-\beta v$. Ad esempio, considerando il corpo in figura, si ha che:

$$M\ddot{x} = F_2 - F_1 - \beta v$$

La presenza del "-" davanti a v, fà si che tale forza si orientata sempre in direzione opposta al moto.

Talvolta, l'attrito viscoso dipende dal quadrato del modulo della velocità. In questo caso, βv^2 è sempre positivo. Avremo dunque che:

$$M\ddot{x} = F_2 - F_1 - \beta v^2$$

se il corpo si sta muovendo verso destra, oppure

$$M\ddot{x} = F_2 - F_1 + \beta v^2$$

se il corpo si sta muovendo verso sinistra.

L'attrito viscoso brucia energia cinetica, ed è dunque una forza non conservativa.

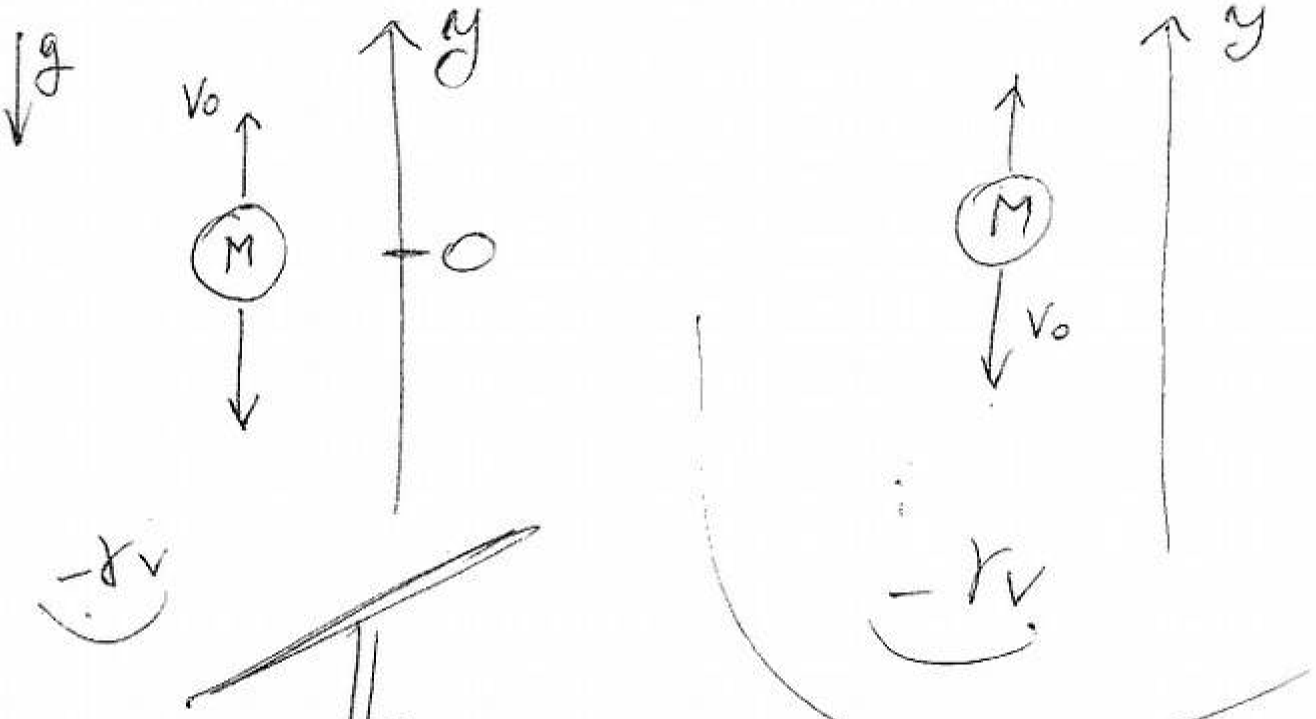
Esercizio estratto dall'esame di Fisica 1 del 29 Aprile 2005

Esercizio 2

Un oggetto di massa M si muove in direzione verticale sotto l'azione della forza peso e di una forza d'attrito viscoso descritta dalla relazione $F=-\gamma v$. Sapendo che al tempo $t=0$ esso si muove verso l'alto con velocità v_0,

a) determinare l'istante t_1 al quale si ferma;
b) calcolare lo spazio percorso prima di arrestarsi;
c) scrivere un'equazione per determinare l'istante t_2 al quale l'oggetto torna a transitare nel punto che occupava a $t=0$; risolvere tale equazione o chiarire il motivo per cui non si sa risolverla;
d) calcolare la quantità di energia che è stata dissipata per attrito durante la salita e cioè nell'intervallo di tempo fra 0 e t_1.

*[**Suggerimento**: iniziare indicando chiaramente qual è l'equazione del moto che si deve risolvere e quali sono condizioni iniziali con cui si devono determinare le leggi orarie per velocità e posizione]*



$$M\ddot{y} = -\gamma\dot{y} - Mg$$

$$M\dot{v} = -\gamma v - Mg$$

$$y(0) = 0$$
$$\dot{y}(0) = v_0$$

Polinomio caratteristico

$$M\ddot{y} + \gamma\dot{y} = 0 \Longrightarrow MD^2 + \gamma D = 0$$

$$D_1 = 0$$
$$D_2 = -\frac{\gamma}{M}$$

$$\boxed{\ddot{y} = -\frac{\gamma}{M}\dot{y} - g = -\lambda\dot{y} - g}$$

A causa di $-Mg$, "guadagno" un'altra soluzione nulla $\Rightarrow D_3 = 0$

$$y(t) = \underbrace{A e^{-\lambda t}}_{D_2} + \underbrace{B + Ct}_{D_1, D_3}$$

$$\lambda = \frac{\gamma}{M}$$

$$\dot{y}(t) = -\lambda A e^{-\lambda t} + C$$

$$\ddot{y}(t) = \lambda^2 A e^{-\lambda t}$$

1) $y(0) = A + B = 0$

2) $\dot{y}(0) = \underline{-\lambda A + C = V_0}$

3) $\ddot{y} = -\lambda \dot{y} - g$

$$\cancel{\lambda^2 A e^{-\lambda t}} = -\lambda(\cancel{-\lambda A e^{-\lambda t}} + C) - g$$

$$0 = -\lambda C - g$$

$$\boxed{C = -\frac{g}{\lambda}}$$

$$\boxed{A = -\left(\frac{\lambda V_0 + g}{\lambda^2}\right)}, \quad \boxed{B = \left(\frac{\lambda V_0 + g}{\lambda^2}\right)}$$

$$y(t) = -\left(\frac{\lambda v_0 + g}{\lambda^2}\right) e^{-\lambda t} + \left(\frac{\lambda v_0 + g}{\lambda^2}\right) - \frac{g}{\lambda} t$$

$$\dot{y}(t) = \frac{\lambda v_0 + g}{\lambda} e^{-\lambda t} - \frac{g}{\lambda}$$

$$t_1 : \dot{y}(t_1) = 0$$

$$\frac{\lambda v_0 + g}{\lambda} e^{-\lambda t_1} - \frac{g}{\lambda} = 0$$

$$(\lambda v_0 + g) e^{-\lambda t_1} = g$$

$$e^{-\lambda t_1} = \frac{g}{\lambda v_0 + g}$$

$$e^{\lambda t_1} = \frac{\lambda v_0 + g}{g}$$

$$\lambda t_1 = \ln\left(\frac{\lambda v_0 + g}{g}\right)$$

$$\boxed{t_1 = \frac{1}{\lambda} \ln\left(1 + \frac{\lambda v_0}{g}\right) > 0}$$

>0

$\ln x < 0$ $\ln(1) = 0$ $\ln(x) > 0$

$x < 1$ $x > 1$

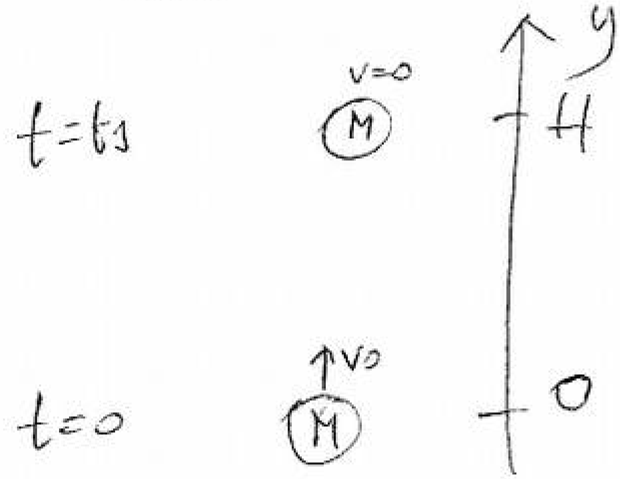
$$y(t_1) = -\left(\frac{\lambda v_0 + g}{\lambda^2}\right) e^{-\lambda t_1} + \left(\frac{\lambda v_0 + g}{\lambda^2}\right) - \frac{g}{\lambda} t_1$$

$$\left[e^{-\lambda t_1} = \frac{g}{\lambda v_0 + g} \right]$$

$$y(t_1) = -\left(\frac{\cancel{\lambda v_0 + g}}{\lambda^2}\right) \cdot \frac{g}{\cancel{\lambda v_0 + g}} + \left(\frac{\lambda v_0 + g}{\lambda^2}\right) - \frac{g}{\lambda^2} \ln\left(1 + \frac{\lambda v_0}{g}\right)$$

$$= -\cancel{\frac{g}{\lambda^2}} + \frac{v_0}{\lambda} + \cancel{\frac{g}{\lambda^2}} - \frac{g}{\lambda^2} \ln\left(1 + \frac{\lambda v_0}{g}\right)$$

$$= \frac{v_0}{\lambda} - \frac{g}{\lambda^2} \ln\left(1 + \frac{\lambda v_0}{g}\right) = H$$

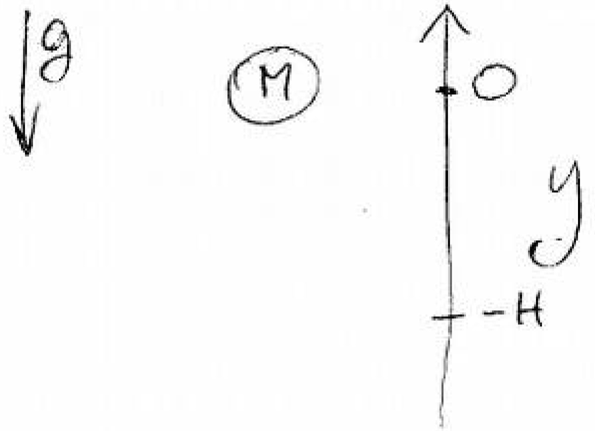


$\longrightarrow K_1 = 0 \qquad U_1 = MgH$

$\longrightarrow K_0 = \frac{1}{2} M v_0^2 \qquad U_0 = 0$

$$E_1 = MgH \qquad E_0 = \frac{1}{2} M v_0^2$$

$$\boxed{L_\gamma = \frac{1}{2} M v_0^2 - MgH}$$



$$M\ddot{y} = -Mg - \gamma\dot{y}$$

$$\ddot{y} = -\frac{\gamma}{M}\dot{y} - g$$

$$\ddot{y} = -\lambda\dot{y} - g$$

$y(0)=0 \qquad \dot{y}(0)=0$

$$y(t) = A e^{-\lambda t} + B + Ct$$

$$A = -\frac{g}{\lambda^2} \qquad B = \frac{g}{\lambda^2} \qquad C = -\frac{g}{\lambda}$$

$$y(t) = -\frac{g}{\lambda^2} e^{-\lambda t} + \frac{g}{\lambda^2} - \frac{g}{\lambda} t$$

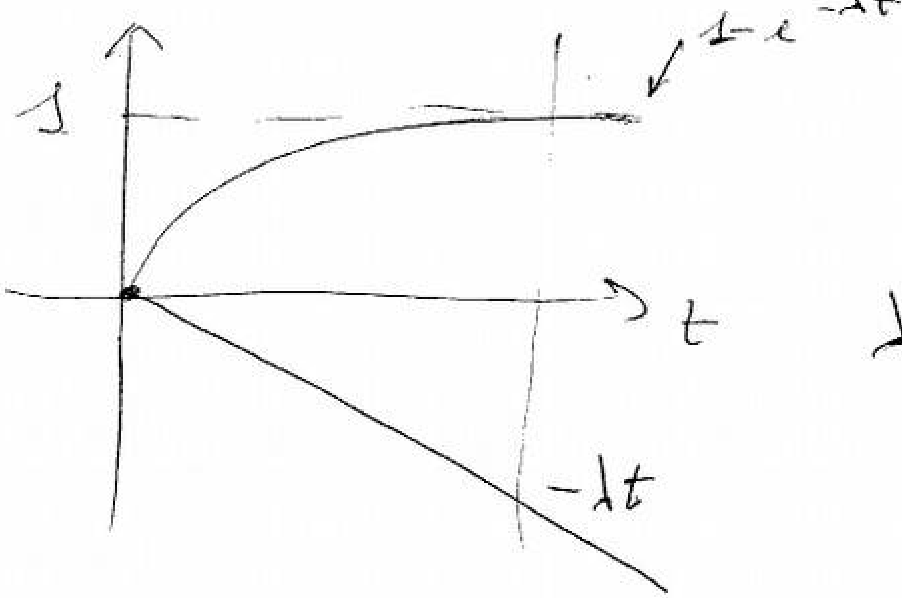
$t_2 : \; y(t_2) = -H$

$$-\frac{g}{\lambda^2} e^{-\lambda t_2} + \frac{g}{\lambda^2} - \frac{g}{\lambda} t_2 = -H$$

Equazione trascendente

$$y(t_2) = \frac{g}{\lambda^2}\left[1 - e^{-\lambda t} - \lambda t\right]$$

$\frac{g}{\lambda^2} > 0$



$$\lambda = \frac{\gamma}{M}$$

So che dopo un certo tempo

$1 - e^{-\lambda t} - \lambda t$ è negativo.

Inoltre, $\lim_{t \to +\infty} 1 - e^{-\lambda t} - \lambda t = -\infty$

Io non conosco $-H$, ma so che è negativo.

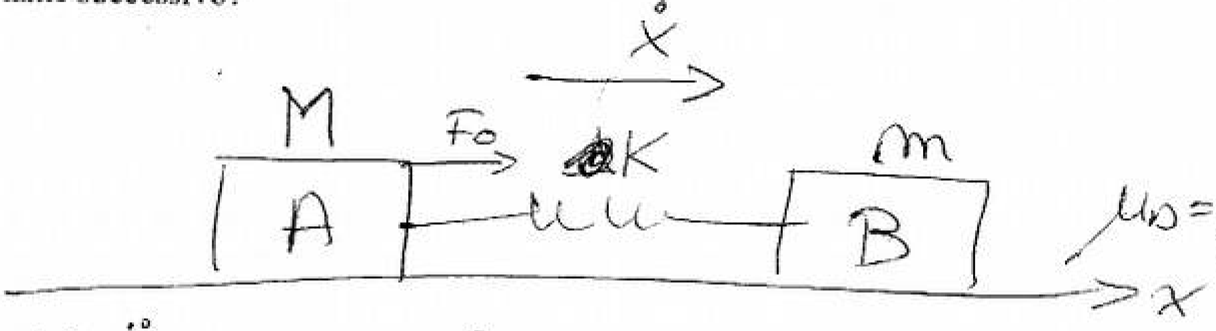
Prima o poi passa da $-H$!

$\Longrightarrow \exists\, t_2 : y(t_2) = -H.$

Esercizio estratto dall'esame di Fisica 1 del 10 Luglio 2012

Esercizio 1

Su un piano orizzontale scabro (coefficiente d'attrito dinamico $\mu_D=0.5$), strisciano due corpi, A e B, connessi da una molla. Il corpo A ha massa M, nota, e il corpo B ha massa m, da determinare. Se il sistema viene messo in movimento applicando (gradualmente, così da evitare oscillazioni di A rispetto a B) una forza F_0 che spinge A verso B, il sistema si muove con la molla compressa di Δx. Se la stessa forza viene applicata su B, il sistema si muove con la molla dilatata di $2\Delta x$. Determinare la costante elastica k della molla e la massa di B. Determinare l'accelerazione del sistema nei due casi. Se la forza F_0 (applicata a B) venisse bruscamente rimossa, quale sarebbe l'accelerazione di B all'istante successivo?



$$M\ddot{x}_A = -K(x_A - x_B) + F_0 - \mu_D M g$$

$$m\ddot{x}_B = -K(x_B - x_A) - \mu_D m g$$

1) $\boxed{x_A - x_B = \Delta x} \equiv$ costante nel tempo.

2) $\dot{x}_A - \dot{x}_B = 0 \Rightarrow \dot{x}_A = \dot{x}_B$

3) $\dot{x}_A = \dot{x}_B \Rightarrow \ddot{x}_A = \ddot{x}_B = a$

$$\begin{cases} Ma = -K\Delta x + F_0 - \mu_D M g \\ ma = +K\Delta x - \mu_D m g \end{cases}$$

Incognite: m, K

$$a = -\frac{K}{M}\Delta x + \frac{F_0}{M} - \mu_D g$$

$$a = \frac{k\Delta x}{m} - \mu_D g$$

$$-\frac{K}{M}\Delta x + \frac{F_0}{M} - \cancel{\mu_D g} = \frac{k\Delta x}{m} - \cancel{\mu_D g}$$

$$m(-k\Delta x + F_0) = M\, k\Delta x$$

$$m = M \cdot \frac{k\Delta x}{F_0 - k\Delta x}$$

$$(F_0 > k\Delta x)$$

$$M\ddot{x}_A = -K(x_A - x_B) - \mu_D M g$$

$$m\ddot{x}_B = -K(x_B - x_A) + F_0 - \mu_D m g$$

1) $x_A - x_B = -2\Delta x \equiv$ costante nel tempo

2) $\dot{x}_A = \dot{x}_B \equiv \ddot{x}_A = \ddot{x}_B = a'$

$$\left| \begin{array}{l} M a' = 2K\Delta x - \mu_D M g \\ m a' = -2K\Delta x + F_0 - \mu_D m g \end{array} \right|$$

$$a' = \frac{2K\Delta x}{M} - \mu_D g$$

$$a' = -\frac{2K\Delta x}{m} + \frac{F_0}{m} - \mu_D g$$

$$\frac{2K\Delta x}{M} - \cancel{\mu_D g} = -\frac{2K\Delta x}{m} + \frac{F_0}{m} - \cancel{\mu_D g}$$

$$m\, 2K\Delta x = M(F_0 - 2K\Delta x)$$

$$m = M\,\frac{F_0 - 2K\Delta x}{2K\Delta x}$$

$$\boxed{F_0 > 2K\Delta x}$$

$$m = M\frac{k\Delta x}{F_0 - k\Delta x} \quad ; \quad m = M\frac{F_0 - 2k\Delta x}{2k\Delta x}$$

$$\cancel{M}\frac{k\Delta x}{F_0 - k\Delta x} = \cancel{M}\frac{F_0 - 2k\Delta x}{2k\Delta x}$$

$$2k^2\Delta x^2 = (F_0 - 2k\Delta x)(F_0 - k\Delta x)$$

$$\cancel{2k^2\Delta x^2} = F_0^2 + \cancel{2k^2\Delta x^2} - 3k\Delta x F_0$$

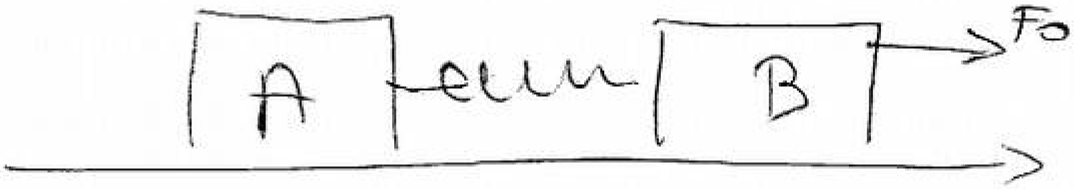
$$3k\Delta x F_0 = F_0^2 \implies \boxed{k = \frac{F_0}{3\Delta x}}$$

$$m = M\frac{\frac{F_0}{3\cancel{\Delta x}}\cdot\cancel{\Delta x}}{F_0 - \frac{F_0}{3\cancel{\Delta x}}\cancel{\Delta x}} = \frac{M\frac{F_0}{3}}{\frac{2}{3}F_0} = \frac{M}{2}$$

$$\boxed{m = \frac{M}{2}}$$

$a = \ldots$

$a' = \ldots$



$$m\ddot{x}_B = -k(x_B - x_A) - \mu_D mg \cancel{+ F_o}$$

$$x_B(0) - x_A(0) = 2\Delta x$$

$$m\ddot{x}_B = -k2\Delta x - \mu_D mg$$

$$\boxed{\ddot{x}_B(0) = -\frac{k2\Delta x}{m} - \mu_D g}$$