Corso di recupero di Fisica 2017/2018

Dario Madeo

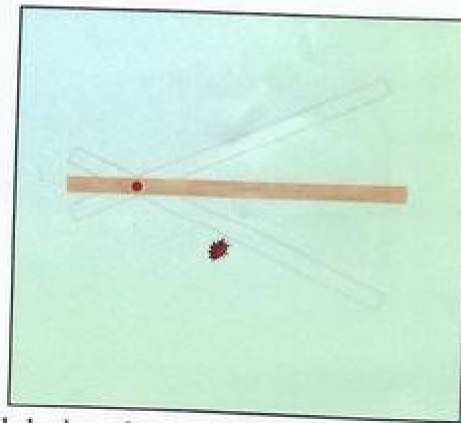
Lezione del 25/05/2018

Slides disponibili all'indirizzo
http://www.dii.unisi.it/~madeo/crf/crf1718.html

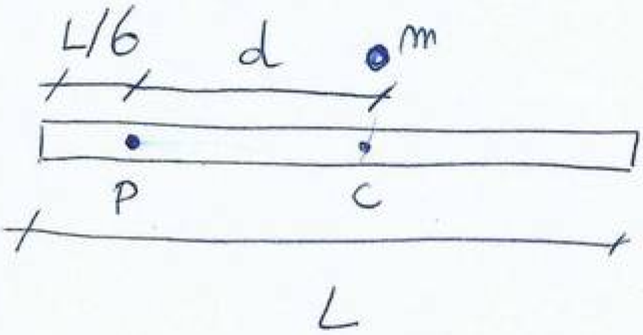
Esercizio estratto dall'esame di Fisica 1 del 21 Luglio 2005

Esercizio 1

Una sbarretta sottile di massa M e lunghezza L poggia su un piano orizzontale liscio e ruota intorno ad un asse verticale, il quale imperniato a distanza L/6 da un estremo della sbarretta. Un oggetto puntiforme di massa m (da determinare) viene posto sul piano, così che la sbarretta arriva ad urtarlo. La collisione è istantanea e perfettamente anelastica; l'oggetto puntiforme resta attaccato al centro della sbarretta. Si osserva che nell'urto la velocità angolare della sbarretta passa a Ω a Ω/2.



a) Calcolare l'intensità della reazione vincolare prima dell'urto.
b) Determinare m e calcolare il modulo dell'impulso esercitato dal vincolo nell'urto.
c) Determinare l'energia dissipata nell'urto e l'intensità della reazione vincolare dopo l'urto.



$$d = \frac{L}{2} - \frac{L}{6} = \frac{3}{6}L - \frac{L}{6} = \frac{L}{3}.$$

$$I = \frac{ML^2}{12} + Md^2 = \frac{ML^2}{12} + \frac{ML^2}{9} = \frac{3ML^2 + 4ML^2}{36} = \frac{7}{36}ML^2.$$

1) Non si conserva l'energia durante l'urto.
Si conserva però sia prima che dopo poiché non agiscono forze dissipative.

2) Non si conserva la quantità di moto. durante l'urto a causa di forze di reazione impulsive che si generano sul fulcro.

3) Si conserva ~~la~~ il momento angolare. Infatti, le forze di reazione nel fulcro non hanno braccio.

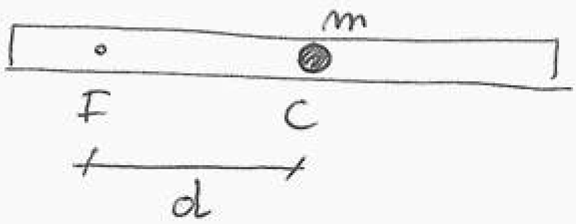
Sfruttiamo la conservazione momento angolare

$$L_- = I\Omega \qquad L_+ = I'\frac{\Omega}{2}$$

$$L_- = L_+$$

$$I\Omega = I'\frac{\Omega}{2} \Rightarrow I = \frac{I'}{2}$$

$$I' = I + md^2 = \frac{7}{36}ML^2 + \frac{mL^2}{9}.$$



$$\left(d = \frac{L}{3}\right)$$

$$I = \frac{I'}{2} \Rightarrow \frac{7}{36}ML^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{7}{36}ML^2 + \frac{mL^2}{9}\right)$$

Incognita: m

$$\Rightarrow \boxed{m = \frac{7}{4}M}$$

Energia dissipata

$$K_- = \frac{1}{2} I \Omega^2 = \frac{7}{72} M L^2 \Omega^2$$

$$K_+ = \frac{1}{2} I' \left(\frac{\Omega}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{72} M L^2 \Omega^2$$

$$\Delta K = K_- - K_+ = \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{72} M L^2 \Omega^2$$

Reazione vincolare prima e dopo l'urto.

Prima e dopo ho moto circolare uniforme.

$\Rightarrow$ Il netto delle forze ha direzione centripeta.

$\Rightarrow$ Poiché R (reazione sul fulcro) è l'unica forza che agisce, allora:

Prima $\quad |R| = M|a_c| = M\Omega^2 d = \frac{M\Omega^2}{3}$

Dopo $\quad |R| = (M+m)\left(\frac{\Omega}{2}\right)^2 d = \dots$

Quantità di moto

$$p_- = M\, v_{CDM}$$

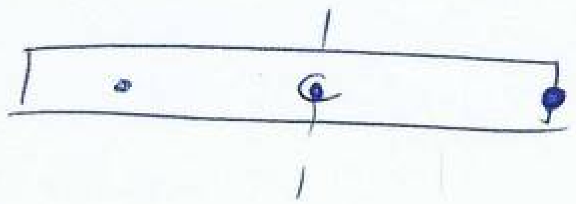
V_{CDM} = vel. cdm sbarretta

$$v_{CDM} = d\Omega$$

$$p_+ = (M+m)\, v'_{CDM}$$

$$d = \frac{L}{3}$$

$$v'_{CDM} = \frac{d\Omega}{2}$$



$$p_- = M d\Omega = \frac{ML\Omega}{3}$$

$$p_+ = \left(M + \frac{7}{4}M\right) d\,\frac{\Omega}{2} = \frac{11}{24} ML\Omega$$

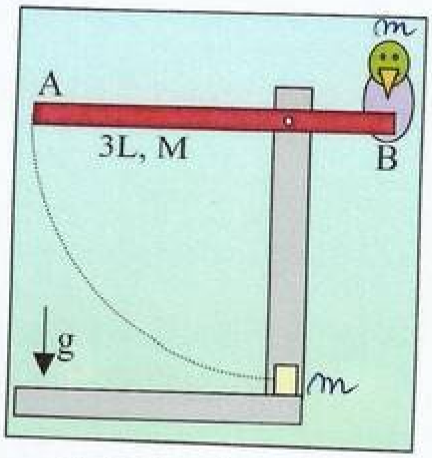
$p_+ \neq p_- \Rightarrow$ la quantità di moto non si è conservata

$\Delta p = p_+ - p_- \equiv$ impulso sul fulcro

$= \dots$

Esercizio estratto dall'esame di Fisica 1 del 15 Aprile 2005

Esercizio 1



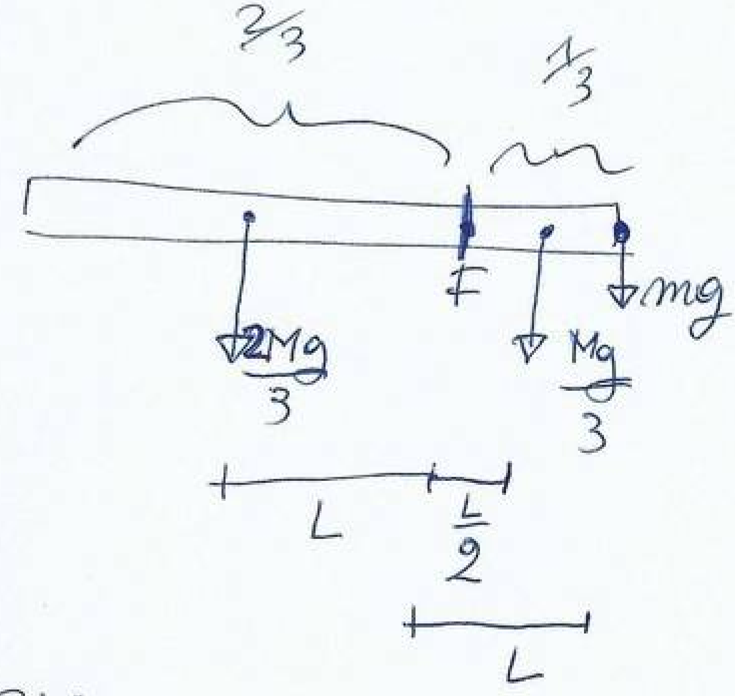
Si consideri il sistema in figura, dove una sbarretta AB omogenea di massa M e lunghezza 3L, imperniata in un punto distante L dal suo estremo B, è mantenuta in posizione orizzontale da un volatile appollaiato sull'estremo B.

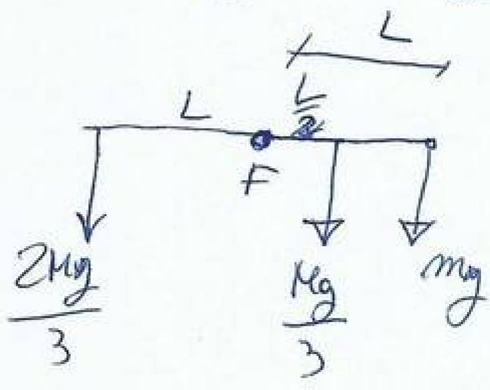
Ad un certo istante il volatile se ne va (senza esercitare spinte sulla sbarretta), e la sbarretta ruota fino ad urtare elasticamente con il suo estremo A un corpo puntiforme posto sotto il fulcro ed avente la stessa massa del volatile.

a) Determinare la massa del volatile (e del corpo urtato).
b) Determinare la velocità angolare della sbarretta nell'istante che precede l'urto.
c) Determinare l'impulso fornito dal vincolo nell'urto.
d) Determinare l'ampiezza angolare delle oscillazioni dopo l'urto e chiarire se la legge oraria può essere descritta con buona approssimazione con un moto armonico, indicando la pulsazione di quest'ultimo.

$$d = 3L - \frac{3L}{2} - L = \frac{L}{2}$$

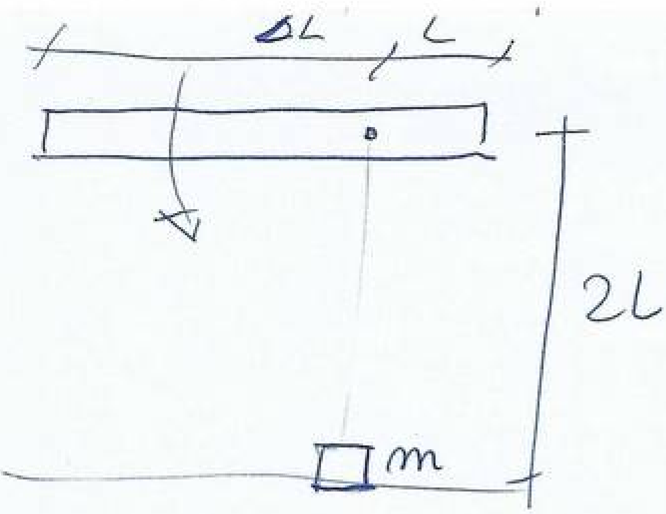
$$= \frac{6L - 3L - 2L}{2} = \frac{L}{2}.$$





$$\frac{2Mg}{3} L = \frac{Mg}{3} \cdot \frac{L}{2} + mg \cdot L \implies \boxed{m = \frac{M}{2}}$$

Se $m = \frac{M}{2}$, il sys è all'equilibr...

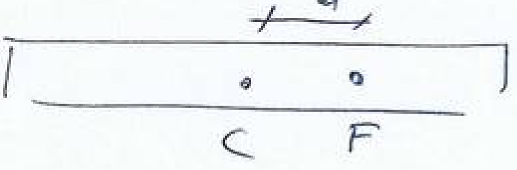


1) Energia meccanica durante l'urto si conserva poiché è elastico.

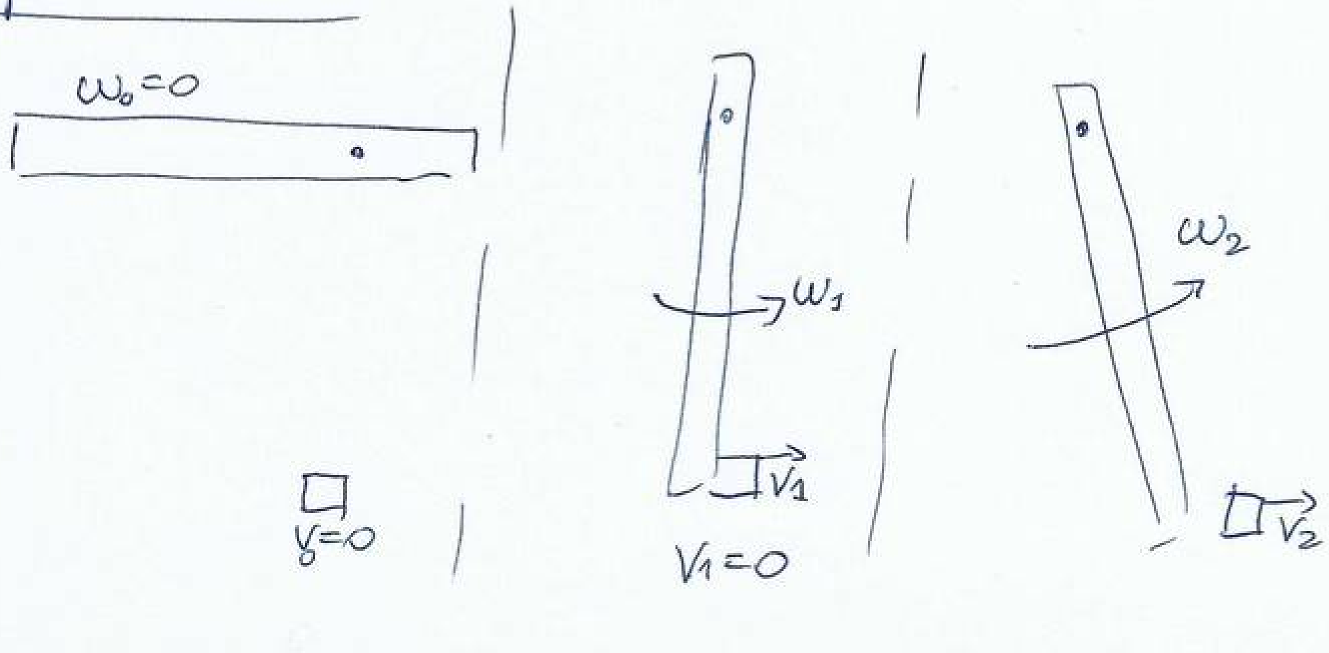
2) Quantità di moto. La presenza di forze di reazione impulsive potrebbe non garantire la conservazione della quantità di moto.

3) Il Momento angolare si conserva.

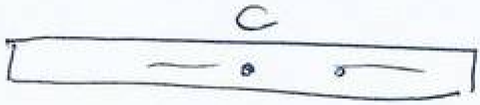
$$I = \frac{M(3L)^2}{12} + Md^2 = \dots = ML^2 \qquad \left(d = \frac{L}{2}\right)$$

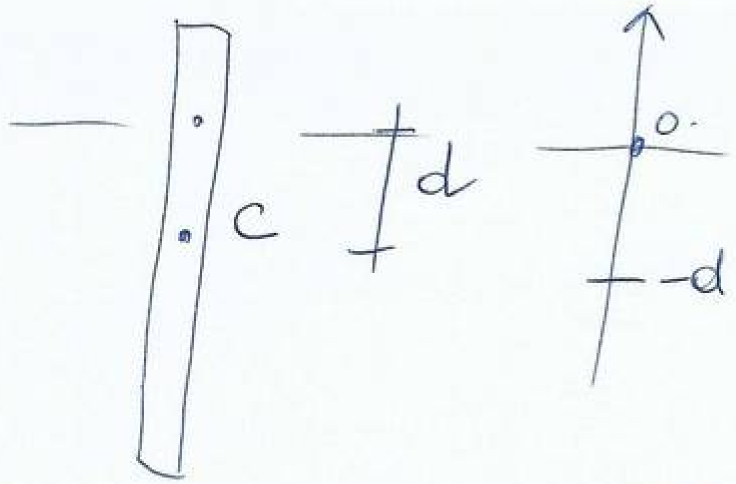


Energia cinetica



Energia potenziale





$d = \frac{L}{2}$

La quota persa del COM della sbarretta è d.

$U_0 = 0$ | $U_1 = -Mg\frac{L}{2}$ || Prima dell'urto

$K_0 = 0$ | $K_1 = \frac{1}{2} I \omega_1^2$

$\Rightarrow \omega_1^2 = \frac{MgL}{I} = \frac{g}{L}$.

$U_1 + K_1 = U_2 + K_2$ Durante l'urto

$L_1 = L_2$

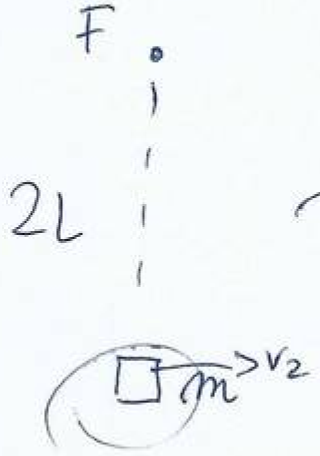
$U_2 = U_1$ $K_2 = \frac{1}{2} I \omega_2^2 + \frac{1}{2} m v_2^2$

$\cancel{U_1} + K_1 = \cancel{U_1} + K_2$

$$\boxed{\frac{1}{2} I \omega_1^2 = \frac{1}{2} I \omega_2^2 + \frac{1}{2} m v_2^2}.$$

Momento angolare

$$\boxed{I\omega_1 = I\omega_2 + \underbrace{m v_2 2L}}$$



$$\rightsquigarrow I = m(2L)^2$$

$$\omega = \frac{v_2}{2L}$$

$$I\omega = m(2L)^{\cancel{2}} \cdot \frac{v_2}{\cancel{2L}}$$

$$= m v_2 \cdot 2L.$$

Momento angolare per corpo puntiforme che trasla.

$m \cdot v \cdot$ (distanza dal fulcro)

Incognite: ω_2 e v_2

Calcolato prima

$$v_2 = \frac{4}{3}\sqrt{gL}, \quad \omega_2 = -\frac{1}{3}\sqrt{\frac{g}{L}}, \quad \omega_1 = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

Q.tà di moto prima:

$$p_1 = M v_{CDM} = M \omega_1 \frac{L}{2}$$

$$p_2 = M v_{CDM}' + m v_2$$

$$= M \omega_2 \frac{L}{2} + m v_2 =$$

$$\omega_2 = -\frac{1}{3}\omega_1$$

$$= -\frac{1}{3} M \omega_1 \frac{L}{2} + m \frac{4}{3}\sqrt{gL}$$

$$= -\frac{1}{3} M \sqrt{\frac{g}{L}} \cdot \frac{L}{2} + m \frac{4}{3}\sqrt{gL}$$

$$\sqrt{\frac{g}{L}} \cdot L = \frac{\sqrt{g}}{\cancel{\sqrt{L}}} \cancel{\sqrt{L}} \cdot \sqrt{L} = \sqrt{gL}$$

$$= -\frac{1}{3}\frac{M}{2}\sqrt{gL} + \frac{4}{3} m\sqrt{gL} = 0 \qquad m = \frac{M}{2}$$

$$= -\frac{M}{6}\sqrt{gL} + \frac{4}{6} M\sqrt{gL} = \frac{1}{2} M\sqrt{gL}.$$

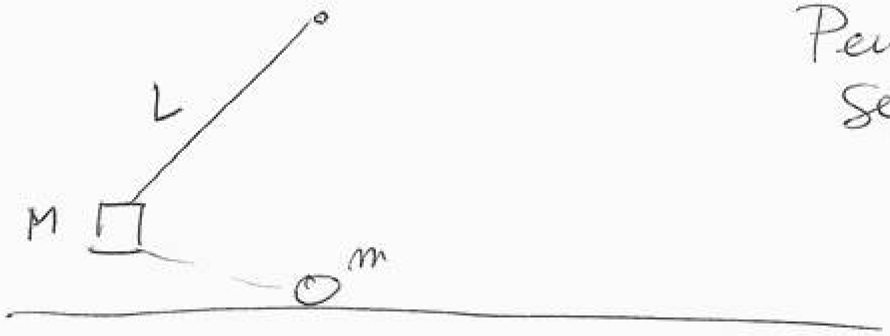
$$p_1 = M \frac{L}{2}\sqrt{\frac{g}{L}} = \frac{1}{2} M \sqrt{gL}.$$

$$\Delta p = p_2 - p_1 = 0$$

La quantità di moto si è conservata! Ma e' un caso particolare!

Generalmente negli urti tra una sbarretta e una massa la quantità di moto **non** si conserva.
Per risolvere il problema abbiamo solo sfruttato la conservazione del momento angolare e dell'energia cinetica (urto elastico).

Ecco un altro caso in cui si conserva la quantità di moto



Pendolo Semplice

Si conserva ~~la~~ il momento angolare.

$$I\omega_1 = I\omega_2 + m v_2 L$$

Conservazione del momento angolare

$$I = ML^2$$

$$ML^2\omega_1 = ML^2\omega_2 + m v_2 L$$

Dividio per L

$$\underbrace{ML\omega_1} = \underbrace{ML\omega_2} + m v_2$$

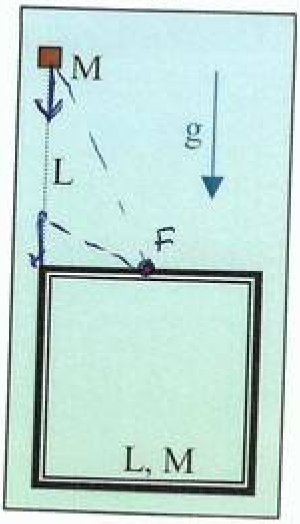
$$\boxed{M v_{COM_1} = M v_{CDM_2} + m v_2}$$

Conservazione della quantità di moto

Nota bene. Come nel caso precedente, la conservazione della quantità di moto non è un' ipotesi usata per risolvere il problema.
Essa è solo una conseguenza della conservazione del momento angolare e della particolare configurazione del problema.

Esercizio estratto dall'esame di Fisica 1 del 4 Luglio 2003

Esercizio 1



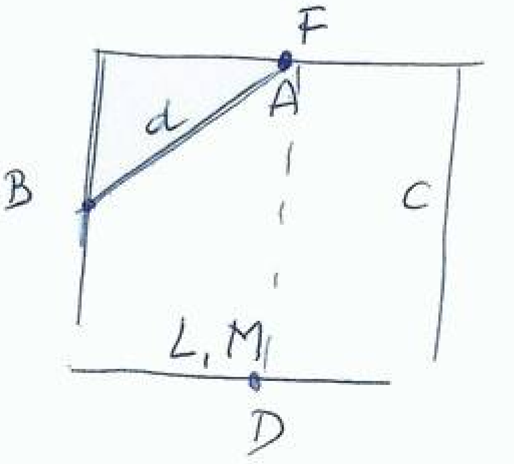
Una cornice quadrata avente per lati quattro sbarrette omogenee identiche di lunghezza L e massa M, è sospesa ad un punto situato sul centro di un suo lato. Una particella di massa M (uguale a quella di ogni lato) cade da un'altezza L e urta elasticamente, da sopra, un angolo della cornice (vedi figura).

a) Stabilire quali grandezze meccaniche del sistema (fra quelle utili a studiare il problema) si conservano prima , durante e dopo l'urto.
b) Calcolare il momento d'inerzia I della cornice rispetto al punto di sospensione.

Assumendo noto il momento d'inerzia I di cui si è calcolata l'espressione al punto precedente,

c) impostare le equazioni necessarie a calcolare la velocità angolare della cornice dopo l'urto;
d) calcolare la velocità angolare della cornice dopo l'urto;
e) calcolare l'impulso ricevuto dalla particella nell'urto;
f) calcolare la frequenza di piccole oscillazioni della cornice.

Calcolo del momento di inerzia della cornice:



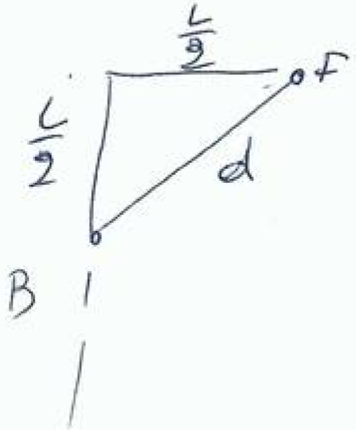
$$I_0 = \frac{ML^2}{12}$$

Momento di inerzia di un lato rispetto al suo centro.

$$I_A = \frac{ML^2}{12}$$

Momento di inerzia del lato alto rispetto al suo centro A (fulcro).

$$d = \frac{L\sqrt{2}}{2}$$



$$I_B = I_C = \frac{ML^2}{12} + Md^2 = \frac{7}{12}ML^2$$

Momento di inerzia di un lato verticale rispetto al punto A (fulcro).

$$I_D = \frac{ML^2}{12} + ML^2 = \frac{13}{12}ML^2$$

Momento di inerzia del lato basso rispetto al punto A (fulcro).

$$I = I_A + I_B + I_C + I_D$$

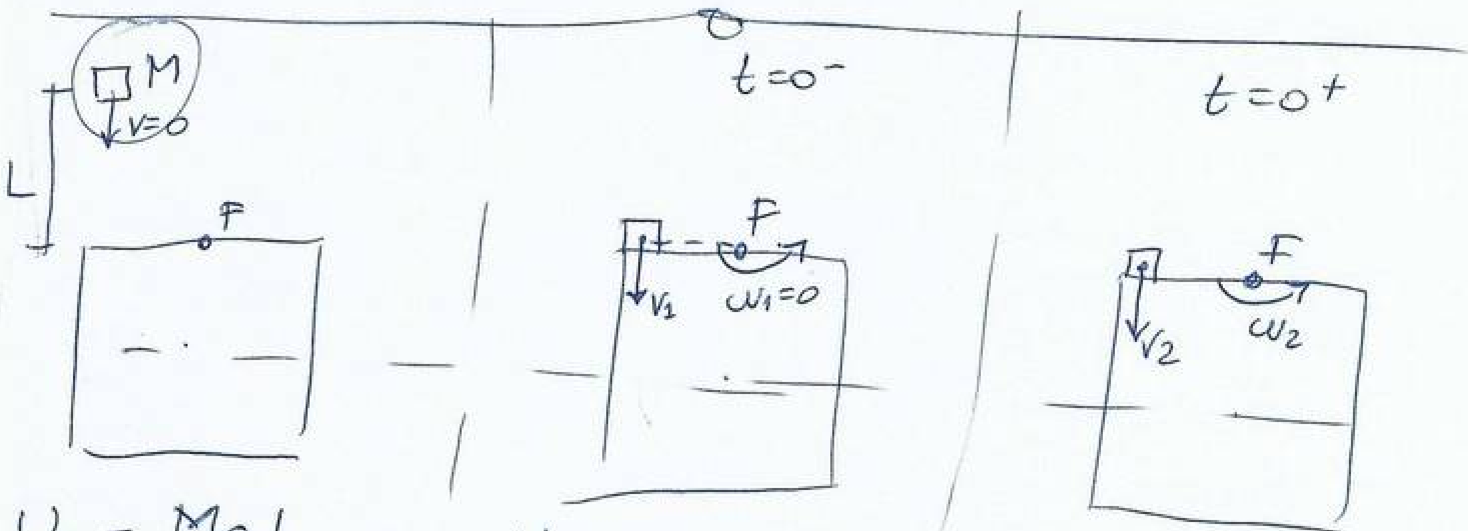
$$= \dots = \frac{7}{3} M L^2 .$$

<u>Energia meccanica</u>. Si conserva prima, durante e dop

<u>Quantità di moto</u>. Non si conserva né prima e né dopo.*

Non so se si conserva a causa delle forze di reazione impulsive.

<u>Momento angolare</u> Non si conserva prima e dopo.*
Si conserva durante.



$U_0 = MgL$ | $U_1 = 0$ | $U_2 = 0$

$K_0 = 0$ | $K_1 = \frac{1}{2} M v_1^2$ | $K_2 = \frac{1}{2} M v_2^2 + \frac{1}{2} I \omega_2^2$

$$v_1 = \sqrt{2gL}$$

* Non si conservano prima e dopo poichè agisce la gravità (forza esterna).

$K_1 = K_2 \qquad (U_1 = U_2 = 0)$

$$\boxed{MgL = \frac{1}{2} M v_2^2 + \frac{1}{2} I \omega_2^2}$$

$$L_1 = M \cdot \frac{L}{2} \cdot v_1 = \frac{ML}{2}\sqrt{2gL}$$

$$L_2 = M \frac{L}{2} v_2 + I \omega_2$$

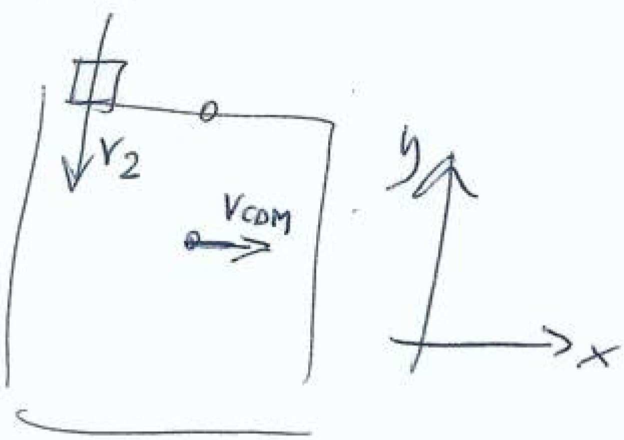
$$L_1 = L_2 \Rightarrow \boxed{\frac{ML}{2}\sqrt{2gL} = \frac{ML}{2} v_2 + I\omega_2}$$

Incognite: v_2, ω_2

$$v_2 = -\frac{25}{31}\sqrt{2gL}$$

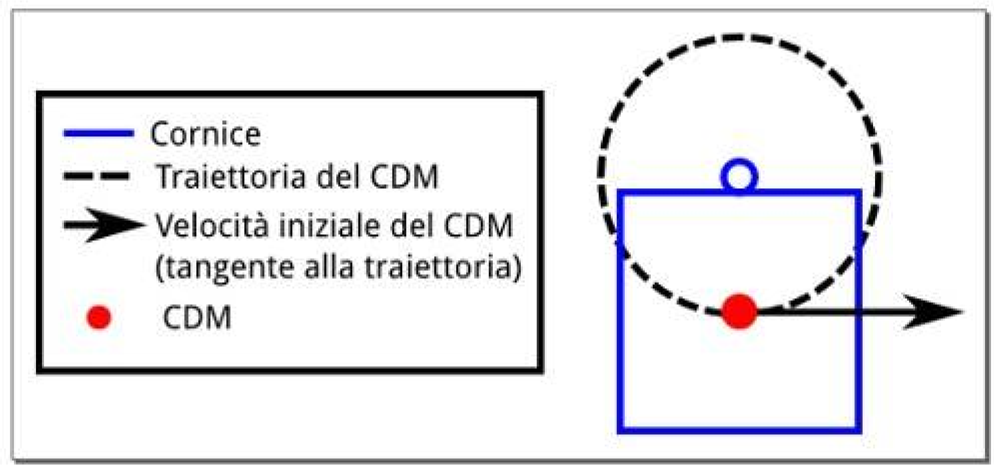
$$\omega_2 = \frac{12}{31}\sqrt{\frac{2g}{L}}$$

Calcolare l'impulso



Da notare che immediatamente dopo l'urto:
1) la massa si muove verticalmente;
2) il CDM della cornice si sposta orizzontalmente.

Dunque, devo considerare la variazione di quantità di moto lungo entrambi gli assi!



Invece, negli esercizi precedenti, immediatamente dopo l'urto, sia la massa che il CDM della sbarretta si sono mossi lungo la stessa direzione!

Lungo y

$$p_{1y} = Mv_1$$

$$p_{2y} = Mv_2$$

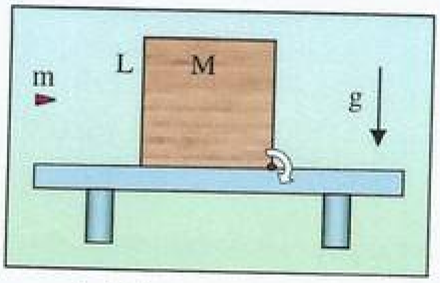
Lungo x

$$p_{1x} = 0$$

$$p_{2x} = 4M\,v_{CDM}$$

$$\Delta p = \begin{bmatrix} 4M v_{CDM} \\ Mv_2 - Mv_1 \end{bmatrix} \qquad v_{CDM} = \omega_2 \frac{L}{2}$$

Esercizio estratto dall'esame di Fisica 1 del 9 Settembre 2016

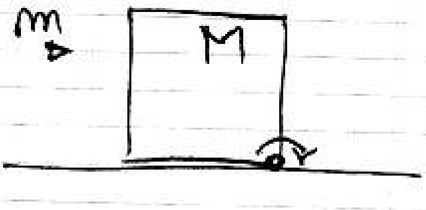


Esercizio 1

Un cubo omogeneo di massa M e lato L poggia con una faccia su un piano orizzontale ed è fermo. Esso può ruotare intorno a uno degli spigoli appoggiati sul piano, che è fisso. Un proiettile di massa m (con m<<M) giunge con velocità $\underline{\mathbf{v}}_0$ perpendicolare alla faccia opposta a quella soprastante il fulcro e si conficca nel suo centro.

a) Discutere quali quantità si conservano durante l'urto e dopo l'urto.
b) Esprimere in termini di m, v_0, M, L e g l'energia persa nell'urto nel caso in cui il cubo si sollevi fino ad un angolo massimo pari a 15° (angolo tra faccia inferiore e piano).
c) Calcolare il momento d'inerzia I del cubo rispetto al fulcro.
d) Determinare per quali valori di v_0 si osserva un ribaltamento del cubo [stavolta si richiede di rispondere in termini di m, M, I, L, g].

9 Settembre 2016



~~Si conserva~~

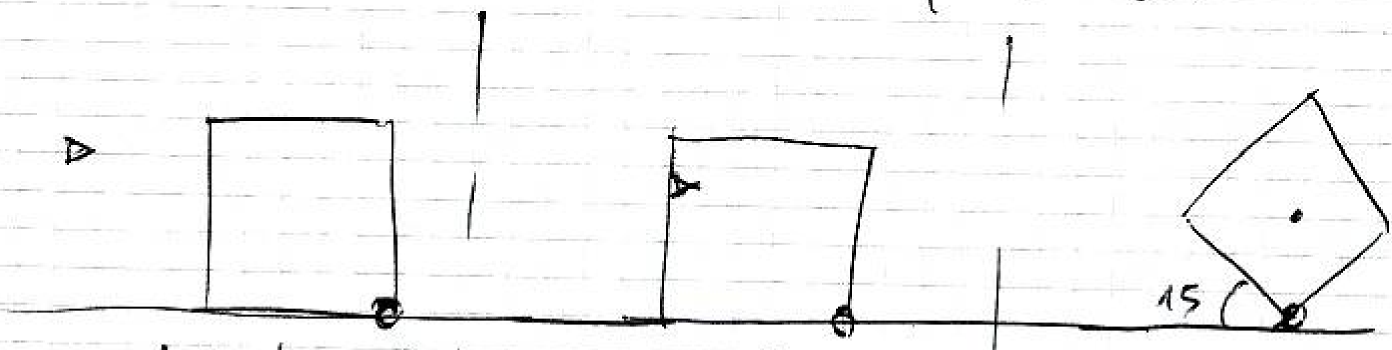
Prima Qtà di moto, energia, mom angolare

Durante mom angolare

Dopo Energia cinetica

Visto il 9/3/2018 (let 1)

$$K_{in} - K_{fin} = \frac{1}{2} m v_0^2 - MgL\left(\frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{1}{2}\right)$$



$K = \frac{1}{2} m v_0^2$ | $K_1 = ?$ | $K_2 = 0$

$U = MgL \cdot \frac{1}{2}$ | $U_1 = MgL\frac{1}{2}$ | $U_2 = MgL\left(\frac{\sqrt{6}}{4}\right)$

$K_1 + U_1 = K_2 + U_2$ si conserva

$K + U > K_1 + U_1$ non si conserva

$$K_1 = K_2 + U_2 - U_1 = 0 + MgL\frac{\sqrt{6}}{4} - MgL\frac{1}{2}$$

$$= MgL\left(\frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{1}{2}\right)$$ (1)

$$K_1 = \frac{1}{2} I\omega_1^2 = \frac{1}{2}\,\frac{2ML^2}{3}\,\omega_1^2 = \frac{ML^2\omega_1^2}{3}$$

$$I = \frac{2ML^2}{3}$$

$$= MgL\left(\frac{\sqrt{6}-2}{4}\right)$$

$$\frac{\cancel{M}L^{\cancel{2}}\omega_1^2}{3} = \cancel{M}g\cancel{L}\left(\frac{\sqrt{6}-2}{4}\right)$$

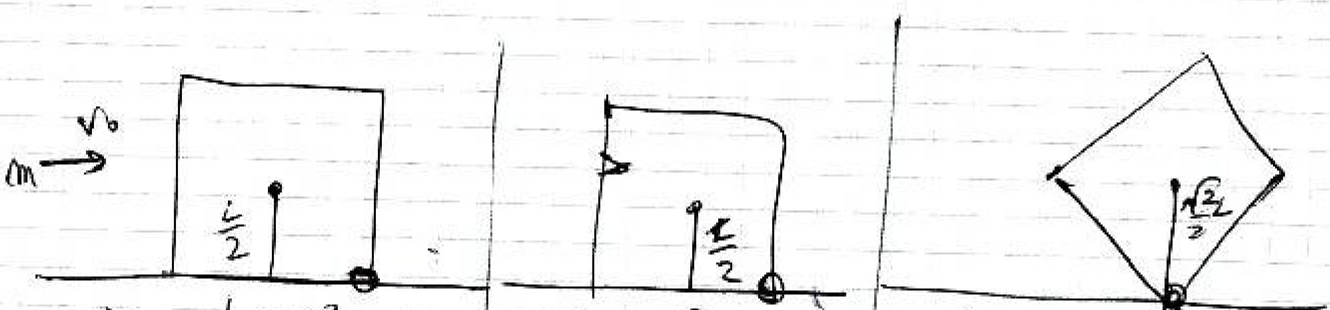
$$\boxed{\omega_1^2 = \frac{3g}{4L}\left(\sqrt{6}-2\right)}$$

Cons. mom angolare

$$mv_0 \cdot \frac{L}{2} = I\omega_1$$

$$\Rightarrow \quad v_0 = \frac{2I\omega_1}{mL}$$

Velocità che mi serve per arrivare a 15°!



$K = \frac{1}{2} m v_0^2$ | $K_1 = ?$ | $K_2 = \text{[illegible]} \quad \varepsilon > 0$

$U = Mg\frac{L}{2}$ | $U_1 = Mg\frac{L}{2}$ | $U_2 = MgL\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$K_1 + U_1 = K_2 + U_2$$

$$\Rightarrow K_1 = \varepsilon + MgL\frac{\sqrt{2}}{2} - Mg\frac{L}{2} = \varepsilon + \frac{MgL}{2}(\sqrt{2}-1)$$

Mom ang

$$\begin{cases} m v_0 \frac{L}{2} = I\omega_1 \\ \frac{1}{2} I\omega_1^2 = \varepsilon + Mg\frac{L}{2}(\sqrt{2}-1) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \omega_1 = \frac{m v_0 L}{2I} \\ \frac{1}{2} \cancel{I} \frac{m^2 v_0^2 L^2}{4 I^{\cancel{2}}} = \varepsilon + Mg\frac{L}{2}(\sqrt{2}-1) \end{cases}$$

$$\frac{m^2 v_0^2 L^2}{8I} = \varepsilon + \frac{MgL}{2}(\sqrt{2}-1)$$

$$\varepsilon = \frac{m^2 v_0^2 L^2}{8I} - \frac{MgL}{2}(\sqrt{2}-1) > 0$$

$$\frac{m^2 v_0^2 L^{\cancel{2}}}{\cancel{8}_4 I} > \frac{Mg\cancel{L}}{\cancel{2}}(\sqrt{2}-1)$$

$$Kg^{\cancel{2}}\frac{\cancel{m}^{\cancel{2}}}{s^2}\frac{m}{\cancel{kg}\cdot \cancel{m}^{\cancel{2}}}$$

$$\frac{m^2 v_0^2 L}{4I} > Mg(\sqrt{2}-1)$$

$$v_0^2 > \frac{4MgI(\sqrt{2}-1)}{m^2 L}$$

$$> \frac{4Mg(\sqrt{2}-1)}{m^2 \cancel{L}}\cdot\frac{2}{3}ML^{\cancel{2}}$$

$$\left(\frac{m}{s}\right)^2$$

$$> \frac{8}{3}\frac{M^2}{m^2}Lg(\sqrt{2}-1)$$