Corso di recupero di Fisica 2017/2018

Dario Madeo

Lezione del 18/05/2018

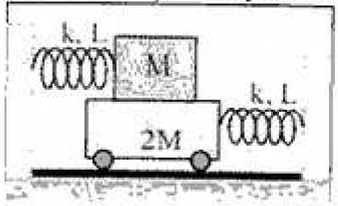
Slides disponibili all'indirizzo
http://www.dii.unisi.it/~madeo/crf/crf1718.html

Esercizio estratto dall'esame di Fisica 1 del 19 Aprile 2018

Esercizio 1

Un carrello di massa 2M scorre su un binario orizzontale liscio. Esso è connesso ad un muro a destra tramite una molla di costante elastica k e lunghezza a riposo L. Sopra al carrello c'è un blocco di massa M connesso a un muro a sinistra tramite un'altra molla identica. Fra blocco e carrello si ha attrito radente descritto dai coefficienti μ_D e μ_S. Inizialmente, il sistema è in quiete e le molle sono a riposo. Si applica al carrello una forza esterna progressivamente crescente, così che il sistema si sposta lentamente verso destra fino ad un'assegnata distanza D

a) Sapendo che il blocco non striscia sul carrello, quanto lavoro è necessario per compiere questa operazione e qual è il massimo valore di D?



All'istante t=0, la forza esterna viene repentinamente rimossa

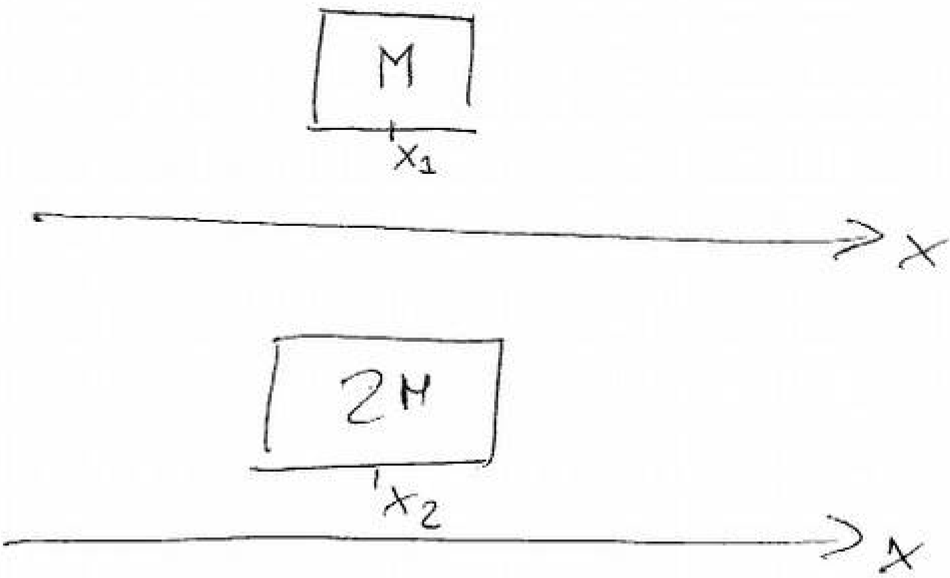
b) Nel moto successivo, può succedere che si osservi strisciamento?

Si supponga (in ogni caso) che non si abbia strisciamento

c) Qual è la legge del moto per t>0, e quale legge oraria ne consegue?

d) Qual è l'intensità della reazione d'attrito, per t>0?

Non ho strisciamento



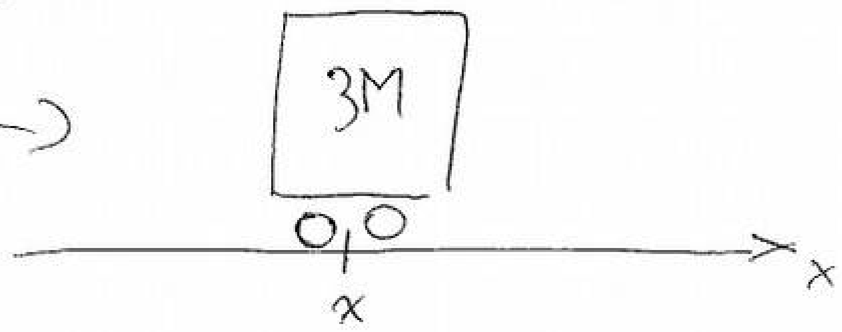
$$\Rightarrow \boxed{x_1 = x_2} = x$$

$$\Downarrow$$

$$\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = \dot{x}$$

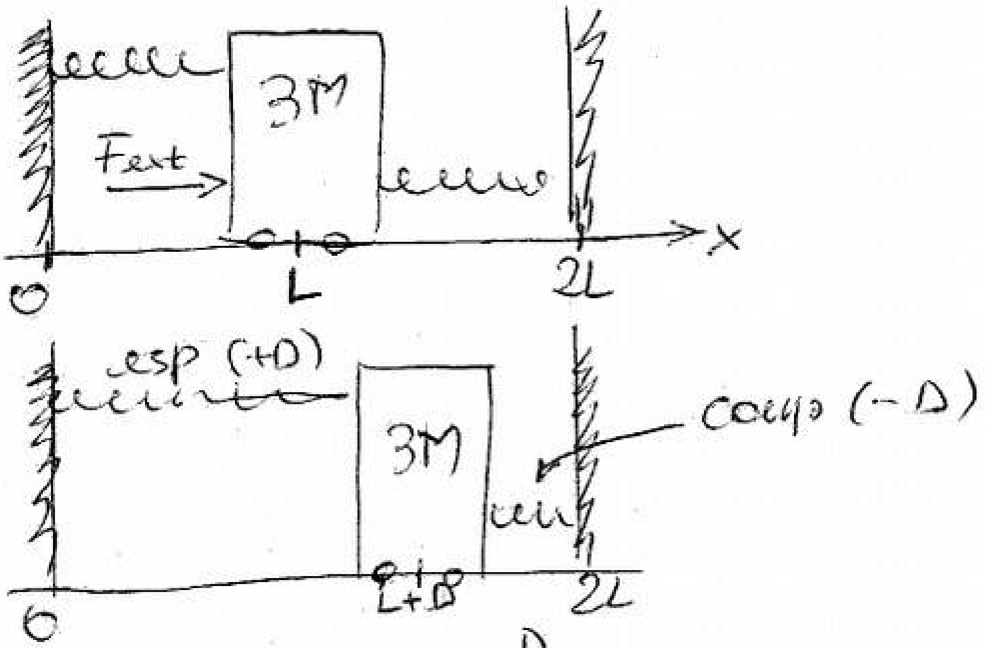
$$\Downarrow$$

$$\ddot{x}_1 = \ddot{x}_2 = \ddot{x}$$



Se ipotizziamo che il corpo superiore non strisci, allora possiamo assumere che i due corpi formano un unico corpo "unito" di massa M + 2M = 3M.

Non ho strisciamento $\Rightarrow$ considero un corpo unico di massa 3M.



Lavoro compiuto $\int_0^D F_{ext}\, ds = ?$

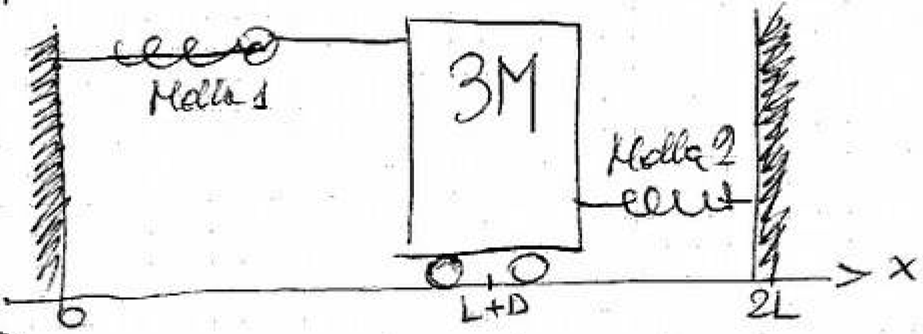
Tuttavia: lavoro compiuto per:

- espandere molle di D: $\frac{1}{2} KD^2$
- comp. molle di D: $\frac{1}{2} KD^2$

$\Rightarrow \boxed{\text{Lavoro} = KD^2}$

La forza esterna (non nota) ha caricato le molle. Dunque, il lavoro compiuto da tale forza deve eguagliare l'energia potenziale posseduta dalle molle alla fine del processo.

Equazione di moto



@t=0

$$3M\ddot{x} = \underbrace{-K(x-L)}_{\text{molla 1}} \underbrace{-K(x-L)}_{\text{molla 2}}$$

Funziona?

@t=0 $x = L+D \Rightarrow$

Forza molla 1: $-K(L+D-L) = -KD < 0$ ok

" " 2 : $-KD < 0$ OK

$$3M\ddot{x} = -2Kx + 2KL$$

$$\ddot{x} = -\frac{2K}{3M}x + \frac{2KL}{3M} \Rightarrow \ddot{x} = -\omega^2 x + \omega^2 L$$

$$\boxed{\omega^2 = \frac{2K}{3M}}$$

$x(0) = L+D$

$\dot{x}(0) = 0$

$x(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t + C$

$\dot{x}(t) = -A\omega\sin\omega t + B\omega\cos\omega t$

$\ddot{x}(t) = -A\omega^2\cos\omega t - B\omega^2\sin\omega t$

$x(0) = A + C = L + D$ $\qquad C = L+D-A$

$\dot{x}(0) = B\omega = 0 \Rightarrow B = 0$

$$x(t) = A\cos\omega t + L + D - A$$

$$\ddot{x}(t) = -A\omega^2\cos\omega t$$

$$\cancel{-A\omega^2\cos\omega t} = -\omega^2\left(\cancel{A\cos\omega t} + L + D - A\right) + \omega^2 L$$

$$0 = \cancel{-\omega^2 L} - \omega^2 D + \omega^2 A \cancel{+\omega^2 L}$$

$$\Rightarrow \boxed{A = D}$$

$$\boxed{x(t) = D\cos\omega t + L}$$

$$v(t) = -D\omega\sin\omega t$$

$$a(t) = -D\omega^2\cos\omega t$$

$$\Rightarrow |a_{MAX}| = D\omega^2$$

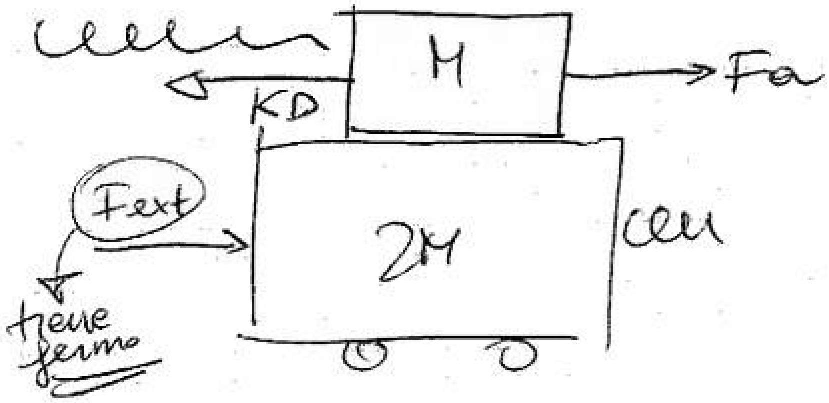
Cosa si può dire dell'attrito statico tra i due corpi?

Alla fine del processo che porta le due molle ad essere cariche (quella a sinistra è espansa di una lunghezza D, mentre quella a destra è compressa della stessa lunghezza), si ha che il sistema è in equilibrio.

Sul corpo di massa M agiscono solo due forze: la forza di richiamo della molla a sinistra (intensità kD) e la forza di attrito statico.

Poichè siamo all'equilibrio, allora queste due forze devono compensansi.

Notare che la forza esterna agisce direttamente sul corpo di massa 2M.



$$KD = F_a < \mu_s M g$$

$$\boxed{D < \mu_s \frac{Mg}{K} = D_{MAX}}$$

Abbiamo tolto la forza esterna, e si ha che:

$$3M\ddot{x} = -2Kx + 2KL$$

$$\hookrightarrow x(t) = D\cos\omega t + L \qquad \omega^2 = \frac{2K}{3M}$$

$$\hookrightarrow \ddot{x}(t) = -D\omega^2\cos\omega t$$

$$\ddot{x} = -\omega^2 x + \omega^2 L$$

$$\max|\ddot{x}| = D\omega^2 = a_{MAX}$$

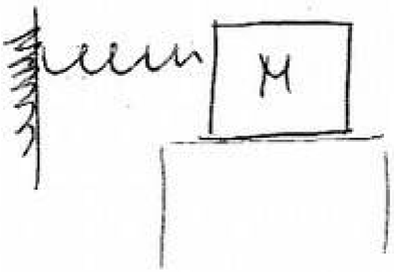
Se tra i due corpi non è presente strisciamento, essi devono avere, istante per istante, la stessa posizione, e quindi anche la stessa velocità e la stessa accelerazione!

x_1: pos. corpo 1

x_2: pos. corpo 2

$$\underset{\textstyle x}{\overset{}{x_1 = x_2}} \Rightarrow \ddot{x}_1 = \ddot{x}_2 = \ddot{x}$$

Per il corpo 1:



NOTA - Nel caso precedente (statico), abbiamo detto che la forza di attrito tira il corpo di massa M verso destra perchè deve compensare la forza di richiamo della molla che tira verso sinistra. In questo caso, poichè il sistema è in moto, è difficile stabilire il verso della forza di attrito istante per istante.

$$M\ddot{x}_1 = -K(x_1 - L) \pm F_a$$

$$\boxed{\ddot{x}_1 = -\frac{K}{M}x_1 + \frac{KL}{M} \pm \frac{F_a}{M}}$$

$$\ddot{x}_1 = \ddot{x} \qquad x_1 = x$$

$$-\frac{K}{M}x + \frac{KL}{M} \pm \frac{F_a}{M} = -\omega^2 x + \omega^2 L$$

$$-\frac{K}{M}x + \frac{KL}{M} \pm \frac{F_a}{M} = -\frac{2K}{3M}x + \frac{2K}{3M}L$$

$$\frac{2K}{3M}x - \frac{K}{M}x + \frac{KL}{M} - \frac{2KL}{3M} = \mp \frac{F_a}{M}$$

$$\frac{2Kx - 3Kx + 3KL - 2KL}{\cancel{3M}} = \mp \frac{3F_a}{\cancel{3M}}$$

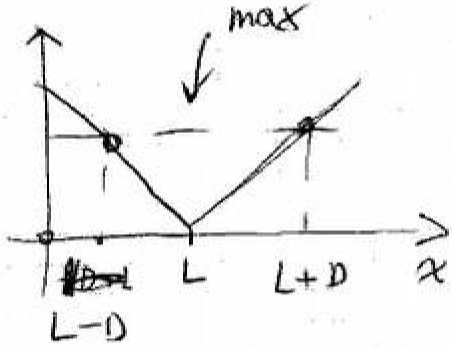
$$-Kx + KL = \mp 3F_a$$

$$|F_a| = \frac{K|x-L|}{3}$$

<u>NB</u> x varia fra $-D+L$ e $D+L$

$$|x-L|_{x=-D+L} = D$$

$$|x-L|_{x=D+L} = D$$



$$|F_a| = \frac{K|x-L|}{3} < \frac{KD}{3}$$ ok

$|F_a| < KD$ vedi prima

$\Rightarrow$ Non si ha strisciamento!

$$|F_a| = \frac{K|x-L|}{3}$$

$$x(t) = D\cos\omega t + L$$

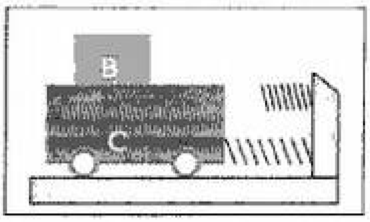
$$|F_a(t)| = \frac{KD|\cos\omega t|}{3} .$$

Modulo della forza di attrito come funzione del tempo.

Esercizio estratto dall'esame di Fisica 1 del 27 Gennaio 2017

Esercizio 1

Un carrello C di massa 3M si muove su un piano orizzontale senza incontrare attrito. Su di esso poggia un blocchetto B di massa M, i coefficienti d'attrito radente fra B e C sono $\mu_D=0.3$ e $\mu_S=0.5$. Il carrello è connesso a una parete per mezzo di una molla di costante elastica k e lunghezza L_0. Parallelamente alla prima molla, è disposta una seconda che è identica, ma è agganciata solo alla parete e non al carrello. Fino a t=0 il sistema è fermo e la prima molla è allungata di una quantità x_0. All'istante t=0 il sistema viene lasciato libero e nel moto successivo non si ha mai strisciamento di B su C.



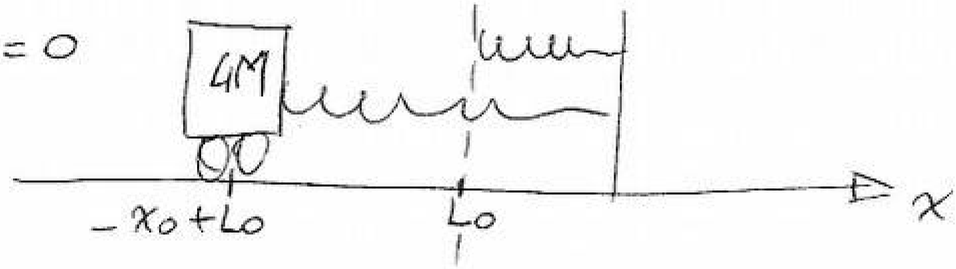
a) qual è il massimo valore possibile di x_0?

b) la molla tornerà ad essere allungata di x_0 come all'inizio?

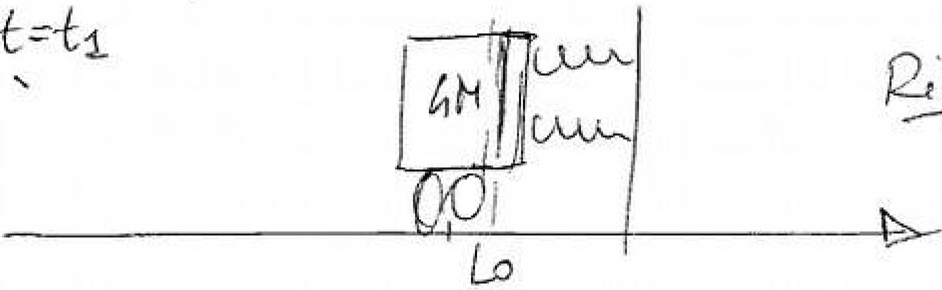
b_1) se sì, a quale/i istante/i?

b_2) se no, quale sarà il massimo allungamento?

@t=0

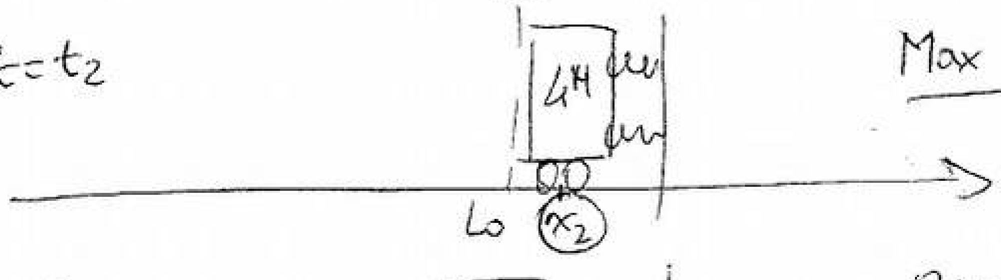


@t=t₁



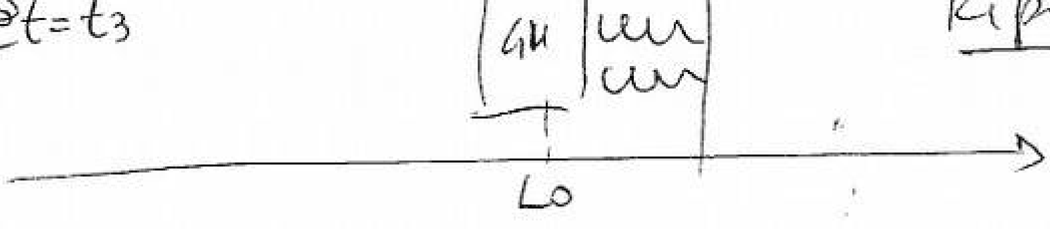
Riposo

@t=t₂



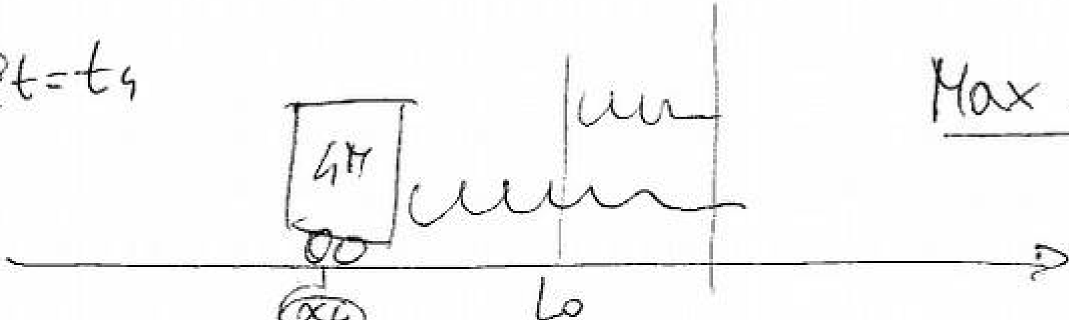
Max compressione

@t=t₃



Riposo

@t=t₄



Max espansione

$0 < t < t_1$

$$4M\ddot{x} = -K(x - L_0)$$

$$x(0) = x_0 + L_0$$

$$\dot{x}(0) = 0$$

$$\ddot{x} = -\frac{K}{4M}x + \frac{KL_0}{4M} \qquad \omega^2 = \frac{K}{4M}$$

$$\ddot{x} = -\omega^2 x + \omega^2 L_0$$

Dai calcoli di prima:

$$\boxed{x(t) = -x_0 \cos\omega t + L_0}$$

$$\boxed{\ddot{x}(t) = x_0 \omega^2 \cos\omega t}$$

$0 < t < t_1$

$$t_1 : x(t_1) = L_0 \Rightarrow -x_0 \cos\omega t_1 + \cancel{L_0} = \cancel{L_0}$$

t1 è l'istante nel quale la molla attaccata al corpo assume la lunghezza di riposo.

$$\cos\omega t_1 = 0$$

$$\omega t_1 = \frac{\pi}{2} \qquad h \in \mathbb{N}$$

$$t_1 = \frac{\pi}{2\omega}$$

$$\boxed{t_1 = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{4M}{K}} = \pi\sqrt{\frac{M}{K}}}$$

$$\dot{x}(t) = x_0 \omega \sin\omega t$$

$$\boxed{\dot{x}(t_1) = x_0 \omega}$$

Velocità del corpo all'istante t1. Ci serve come condizione iniziale per calcolare la legge oraria nella fase successiva.

$$t_1 < t < t_3 \equiv 0 < t < t_3 - t_1 (= T_3)$$

$$4M\ddot{x} = -2K(x - L_0)$$

$$\ddot{x} = -\frac{K}{2M}x + \frac{KL_0}{2M}$$

$$\ddot{x} = -2\omega^2 x + 2\omega^2 L_0 = -\omega_1^2 x + \omega_1^2 L_0$$

$$\omega_1^2 = 2\omega^2$$

E' più semplice risolvere l'equazione differenziale per $0 < t < T_3$, con $T_3 = t_3 - t_1$, piuttosto che per $t_1 < t < t_3$.

$$\boxed{\begin{aligned} x(0) &= L_0 \\ \dot{x}(0) &= x_0\omega \end{aligned}}$$

La condizione iniziale che usiamo corrisponde alla posizione ed alla velocità del corpo all'istante t_1

$$x(t) = A\cos\omega_1 t + B\sin\omega_1 t + C$$

$$\dot{x}(t) = -A\omega_1\sin\omega_1 t + B\omega_1\cos\omega_1 t$$

$$\ddot{x}(t) = -A\omega_1^2\cos\omega_1 t - B\omega_1^2\sin\omega_1 t$$

$$x(0) = A + C = L_0$$

$$\dot{x}(0) = B\omega_1 = x_0\omega \Rightarrow B = \frac{x_0\omega}{\sqrt{2}\omega} = \frac{\sqrt{2}}{2}x_0$$

$$\cancel{-A\omega_1^2\cos\omega_1 t} \cancel{- B\omega_1^2\sin\omega_1 t} = -\omega_1^2(\cancel{A\cos\omega_1 t} + \cancel{B\sin\omega_1 t} + C) + \omega_1^2 L_0$$

$$\cancel{\omega_1^2} C = \cancel{\omega_1^2} L_0 \qquad C = L_0$$

$$A + L_0 = L_0 \Rightarrow A = 0$$

$$\Rightarrow x(t) = \frac{\sqrt{2}}{2}x_0\sin\omega_1 t + L_0$$

$$\ddot{x}(t) = -\frac{\sqrt{2}}{2}x_0\omega_1^2\sin\omega_1 t$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}}x_0\cancel{2}\omega^2\sin\omega_1 t = -\sqrt{2}x_0\omega^2\sin\omega_1 t$$

$$\cancel{t_3 < t < t_4 \quad \equiv \quad 0 < t < t_4 - t_3 = T_4}$$

$$x(t) = +\frac{\sqrt{2}}{2} x_0 \sin \omega t + \cancel{l_0}$$

$$x(T_3) = \frac{\sqrt{2}}{2} x_0 \sin \omega_1 T_3 + \cancel{l_0} = \cancel{l_0}$$

$$\sin \omega_1 T_3 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\omega_1 T_3 = 0$$

$$\omega_1 T_3 = \pi \quad \Rightarrow \quad T_3 = \frac{\pi}{\omega_1} = \frac{\pi}{\sqrt{2}\omega} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}\pi}{2} \sqrt{\frac{4M}{K}} = \sqrt{2}\pi \sqrt{\frac{M}{K}}.$$

$$t_3 - t_1 = T_3 \Rightarrow t_3 = t_1 + T_3 = \pi\sqrt{\frac{M}{K}} + \sqrt{2}\pi\sqrt{\frac{M}{K}} =$$

$$= \pi\sqrt{\frac{M}{K}}\left(1+\sqrt{2}\right).$$

$$\dot{x}(t) = +\frac{\sqrt{2}}{2} x_0 \omega_1 \cos \omega_1 t$$

$$\dot{x}(T_3) = \frac{\sqrt{2}}{2} x_0 \omega_1 \cos\left(\cancel{\omega_1} \frac{\pi}{\cancel{\omega_1}}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} x_0 \omega_1 =$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2} x_0 \sqrt{2}\omega = -x_0 \omega.$$

Nota – Durante questa fase, la massima ampiezza delle oscillazioni si è ridotta. Infatti:

$$x_0 < \frac{\sqrt{2}}{2} x_0$$

$t_3 < t < t_4 \quad \equiv \quad 0 < t < t_4 - t_3 = T_4$

$$4M\ddot{x} = -K(x - L_0)$$

$$\ddot{x} = -\omega^2 x + \omega^2 L_0$$

$$x(0) = L_0$$

$$\dot{x}(0) = -x_0\omega$$

$$x(t) = -x_0 \sin\omega t + L_0 \leftarrow \text{Torna a } -x_0+L_0 !$$

$$x(T_4) = -x_0 + \cancel{L_0} = -x_0 \sin\omega T_4 + \cancel{L_0}$$

$$\sin\omega T_4 = 1$$

$$\omega T_4 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow T_4 = \frac{\pi}{2\omega} = \pi\sqrt{\frac{M}{K}}$$

$$t_4 - t_3 = T_4 \Rightarrow t_4 = T_4 + t_3$$

$$= \pi\sqrt{\frac{M}{K}} + \pi\sqrt{\frac{M}{K}}(1+\sqrt{2}) =$$

$$= \pi\sqrt{\frac{M}{K}}(2+\sqrt{2})$$

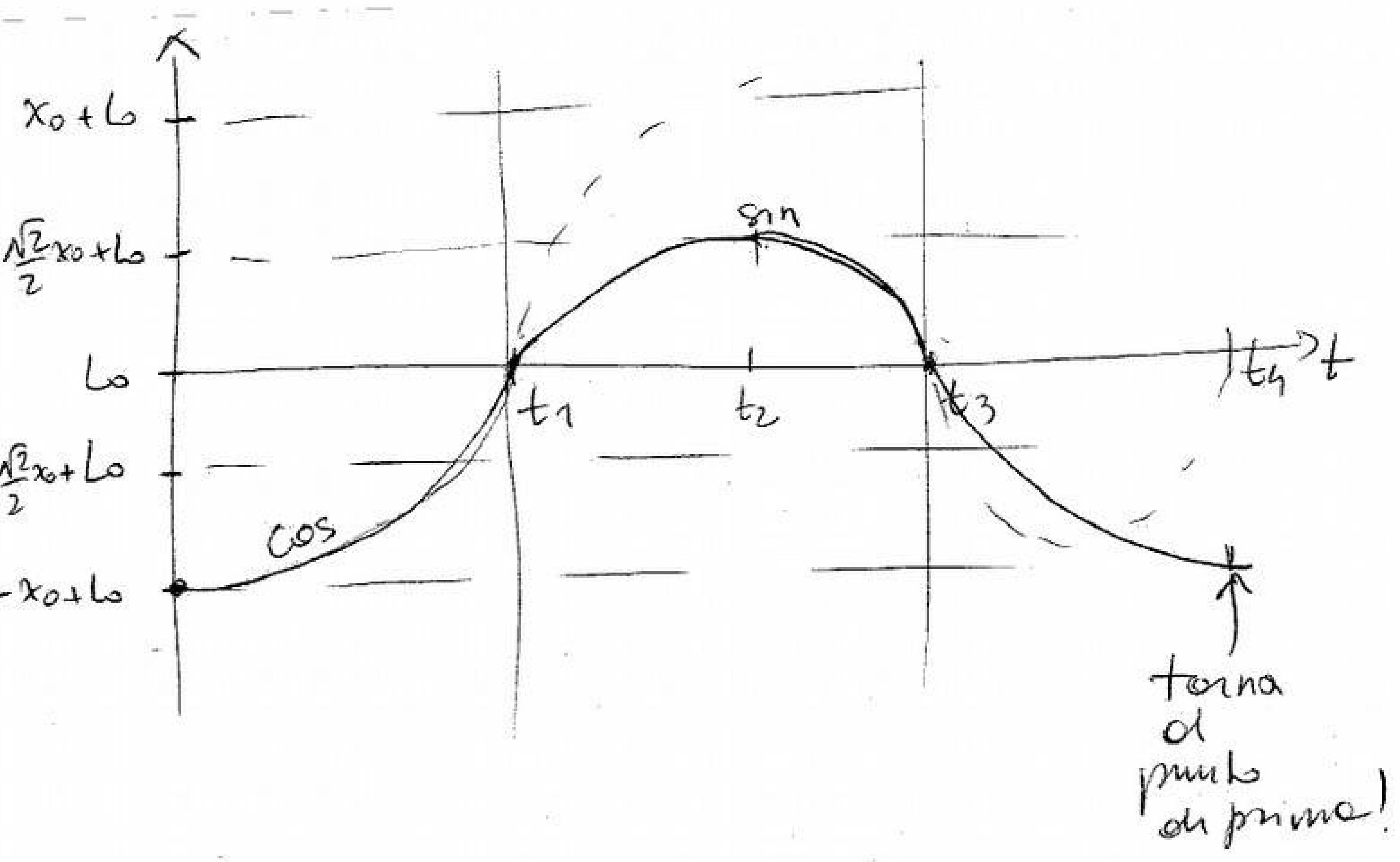
C)

Istanti in cui l'all. è max:

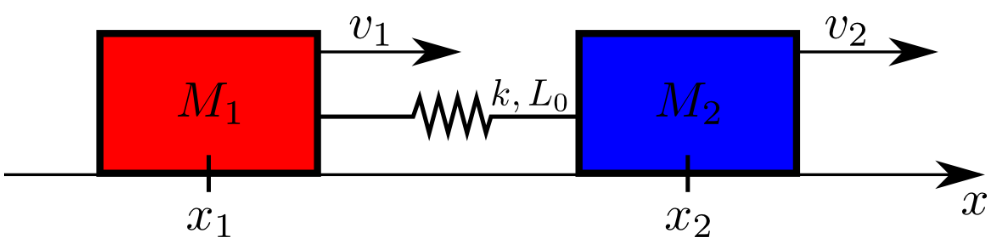
$t=0$, $t = t_4 = t = 2t_4 \ldots \quad t = nt_4 =$

$$= n\pi\sqrt{\frac{M}{K}}(2+\sqrt{2})$$

Legge oraria calcolata "a tratti"



Sistema molla + due masse



- x_1, x_2: posizione delle due masse
- v_1, v_2: velocità delle due masse
- M_1, M_2: valore delle due masse
- k: costante elastica della molla
- L_0: lunghezza a riposo della molla

Si assume che le due masse siano puntiformi. È conveniente introdurre anche le seguenti grandezze:

- $x_C = \dfrac{M_1 x_1 + M_2 x_2}{M_1 + M_2}$: posizione del centro di massa del sistema
- $x_M = x_2 - x_1 - L_0$: allungamento della molla

Leggi del moto delle due masse

$$\begin{cases} M_1 \ddot{x}_1 = -k(x_1 - x_2 + L_0) \\ M_2 \ddot{x}_2 = -k(x_2 - x_1 - L_0) \end{cases} \tag{1}$$

Notare che nella prima equazione, l'allungamento "visto" dalla prima massa è pari a quello visto dalla seconda massa, ma cambiato di segno. Partendo dalle precedenti equazioni, possiamo ricavare la seconda legge di Newton per il centro di massa:

$$\begin{aligned}
\ddot{x}_C &= \frac{M_1 \ddot{x}_1 + M_2 \ddot{x}_2}{M_1 + M_2} = \\
&= \frac{M_1}{M_1 + M_2}\left[-\frac{k}{M_1}(x_1 - x_2 - L_0)\right] + \frac{M_2}{M_1 + M_2}\left[-\frac{k}{M_2}(x_2 - x_1 + L_0)\right] = \\
&= \frac{M_1}{M_1 + M_2}\left[-\frac{k}{M_1}(-x_M - L_0)\right] + \frac{M_2}{M_1 + M_2}\left[-\frac{k}{M_2}(x_M + L_0)\right] = \\
&= -\frac{k}{M_1 + M_2}(-x_M - L_0) - \frac{k}{M_1 + M_2}(x_M + L_0) = \\
&= -\frac{k}{M_1 + M_2}(-x_M - L_0 + x_M + L_0) = 0.
\end{aligned}$$

Per quanto riguarda l'allungamento della molla, si ha che:

$$\begin{aligned}
\ddot{x}_M &= \ddot{x}_2 - \ddot{x}_1 - \ddot{L}_0 = \\
&= \ddot{x}_2 - \ddot{x}_1 = \\
&= -\frac{k}{M_2}(x_2 - x_1 - L_0) + \frac{k}{M_1}(x_1 - x_2 + L_0) = \\
&= -\frac{k}{M_2}x_M + \frac{k}{M_1}(-x_M) = \\
&= -\left(\frac{k}{M_1} + \frac{k}{M_2}\right)x_M = \\
&= -k\left(\frac{M_1 + M_2}{M_1 M_2}\right)x_M = \\
&= -\frac{k}{\mu}x_M,
\end{aligned}$$

dove è stata introdotta la massa ridotta

$$\mu = \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2}.$$

Il nuovo set di equazioni differenziali che dobbiamo risolvere è:

$$\begin{cases} \ddot{x}_C = 0 \\ \ddot{x}_M = -\dfrac{k}{\mu}x_M \end{cases}, \tag{2}$$

che è decisamente più semplice del sistema di partenza (1).

Condizioni iniziali

L'insieme delle condizioni iniziali disponibili è:

$$x_1(0), x_2(0), v_1(0), v_2(0).$$

Per risolvere il sistema di equazioni differenziali (2), bisogna trasformare queste condizioni iniziali. In particolare dobbiamo trovare posizione e velocità iniziale del centro di massa e dell'allungamanento della molla. In particolare si ha che:

$$\begin{cases} x_C(0) = \dfrac{M_1 x_1(0) + M_2 x_2(0)}{M_1 + M_2} \\ v_C(0) = \dfrac{M_1 v_1(0) + M_2 v_2(0)}{M_1 + M_2} \\ x_M(0) = x_2(0) - x_1(0) - L_0 \\ v_M(0) = v_2(0) - v_1(0) \end{cases} \tag{3}$$

Leggi orarie per il centro di massa e per l'allungamento della molla

Le equazioni differenziali (2) ci dicono che:

- il centro di massa si muove di moto rettilineo uniforme;
- l'allungamento della molla è soggetto ad un moto armonico di pulsazione $\omega = \sqrt{\frac{k}{\mu}}$.

Pertanto, le soluzioni delle equazioni differenziali (2) insieme alle condizioni iniziali (3) sono immediate:

$$\begin{cases} x_C(t) = x_C(0) + v_C(0)t \\ x_M(t) = x_M(0)\cos(\omega t) + \frac{v_M(0)}{\omega}\sin(\omega t) \end{cases} . \tag{4}$$

Dalla precedente, possiamo ricavare anche le velocità:

$$\begin{cases} v_C(t) = v_C(0) \\ v_M(t) = -\omega x_M(0)\sin(\omega t) + v_M(0)\cos(\omega t) \end{cases} . \tag{5}$$

Leggi orarie delle due masse

Come ricaviamo a questo punto le leggi orarie delle due masse di partenza? Inizialmente abbiamo scritto x_C ed x_M in funzione di x_1 ed x_2. Stavolta, ricaviamo x_1 ed x_2 in funzione di x_C ed x_M!!!

$$\begin{cases} x_C = \frac{M_1x_1 + M_2x_2}{M_1 + M_2} \\ x_M = x_2 - x_1 - L_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_C = \frac{M_1x_1 + M_2x_2}{M_1 + M_2} \\ x_1 = x_2 - x_M - L_0 \end{cases} \Rightarrow$$
$$\begin{cases} x_C = \frac{M_1(x_2 - x_M - L_0) + M_2x_2}{M_1 + M_2} \\ x_1 = x_2 - x_M - L_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_C = x_2 - (x_M + L_0)\frac{M_1}{M_1 + M_2} \\ x_1 = x_2 - x_M - L_0 \end{cases} \Rightarrow$$
$$\begin{cases} x_2 = x_C + (x_M + L_0)\frac{M_1}{M_1 + M_2} \\ x_1 = x_2 - x_M - L_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = x_C + x_M\frac{M_1}{M_1 + M_2} + L_0\frac{M_1}{M_1 + M_2} \\ x_1 = x_C - x_M\frac{M_2}{M_1 + M_2} - L_0\frac{M_2}{M_1 + M_2} \end{cases} \Rightarrow$$
$$\begin{cases} x_2 = x_C + x_M\frac{\mu}{M_2} + L_0\frac{\mu}{M_2} \\ x_1 = x_C - x_M\frac{\mu}{M_1} - L_0\frac{\mu}{M_1} \end{cases} . \tag{6}$$

Unendo i risultati (6) con le leggi orarie (4), otteniamo che:

$$\begin{cases} x_1(t) = x_C(0) + v_C(0)t - \frac{\mu}{M_1}\left(x_M(0)\cos(\omega t) + \frac{v_M(0)}{\omega}\sin(\omega t)\right) - L_0\frac{\mu}{M_1} \\ x_2(t) = x_C(0) + v_C(0)t + \frac{\mu}{M_2}\left(x_M(0)\cos(\omega t) + \frac{v_M(0)}{\omega}\sin(\omega t)\right) + L_0\frac{\mu}{M_2} \end{cases} , \tag{7}$$

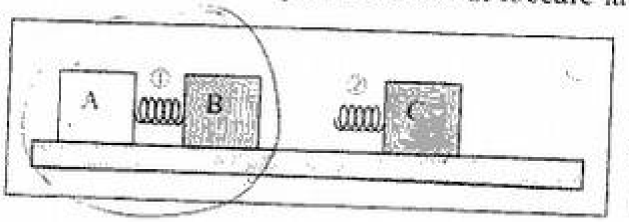
mentre le velocità sono:

$$\begin{cases} v_1(t) = v_C(0) - \frac{\mu}{M_1}\left(-\omega x_M(0)\sin(\omega t) + v_M(0)\cos(\omega t)\right) \\ v_2(t) = v_C(0) + \frac{\mu}{M_2}\left(-\omega x_M(0)\sin(\omega t) + v_M(0)\cos(\omega t)\right) \end{cases} . \tag{8}$$

Esercizio estratto dall'esame di Fisica 1 del 12 Febbraio 2018

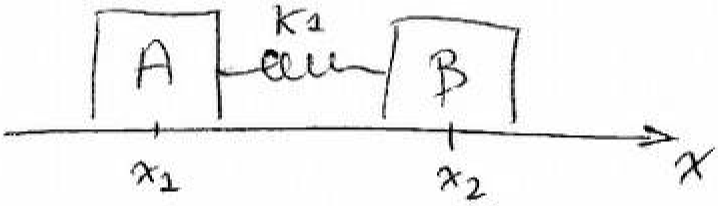
Esercizio 1

La figura mostra un piano orizzontale liscio sopra il quale si muovono in direzione x tre corpi, A, B e C. A ha massa M, B ha massa 2M e C ha massa 3M. I corpi A e B sono connessi da una molla di costante elastica k_1, che inizialmente è a riposo, ed essi si spostano insieme verso destra con velocità v_0. Su C, che inizialmente è fermo è applicata una molla di costante elastica k_2, contro cui B va ad urtare. Sia t_1 l'istante al quale B cessa di toccare la molla ②, si sa che per $t>t_1$ C si muove a velocità v_1.



a) Descrivere il moto del sistema A+B per $t>t_1$, indicandone la velocità del centro di massa e frequenza e ampiezza delle oscillazioni.

b) Determinare per quali valori di $\alpha=v_1/v_0$ si ha che per $t>t_1$ la velocità di A non cambia mai verso.



x_c : pos. COM di A+B

x_M : allungamento molla

$$x_c = \frac{Mx_1 + 2Mx_2}{3M}$$

$$x_M = x_2 - x_1$$

$\Longrightarrow$

Leggi del moto

$$\begin{cases} \ddot{x}_c = 0 \\ \ddot{x}_M = -\dfrac{k_1}{\mu} x_M \end{cases}$$

$$\mu = \frac{M \cdot 2M}{M+2M} = \frac{2}{3}M$$

Dai dati, si evince che:

$$\dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = v_0 \quad \Longrightarrow \quad \dot{x}_c(0) = v_0$$

$$x_M(0) = 0 \quad (\text{molla a riposo})$$

$$\dot{x}_M(0) = \dot{x}_2(0) - \dot{x}_1(0) = 0$$

A partire da queste condizioni iniziali, è possibile calcolare le leggi orarie:

$$\ddot{x}_c = 0$$
$$x_c(0) = S$$
$$\dot{x}_c(0) = v_0$$
$$\Rightarrow x_c(t) = S + v_0 t$$

Il centro di massa si muove di moto rettilineo uniforme

$$\ddot{x}_M = -\frac{K_1}{\mu} x_M$$
$$x_M(0) = 0$$
$$\dot{x}_M(0) = 0$$
$$\Rightarrow x_M(t) = 0 \; !$$

La molla "dovrebbe" compiere un moto armonico.
Tuttavia, in base alle condizioni iniziali, la molla è all'equilibrio, e dunque non si osservano oscillazioni.

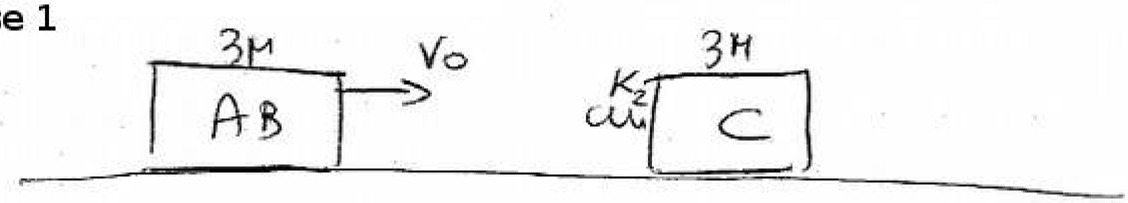
NB $\boxed{(2M+M)\,\dot{x}_c = P}$ Quantità di moto del sistema A+B

Infatti:

$$M\dot{x}_1 + 2M\dot{x}_2 = P$$
$$\frac{M\dot{x}_1 + 2M\dot{x}_2}{3M} = \frac{P}{3M}$$
$$\boxed{\dot{x}_c = \frac{P}{3M}}$$
$$\Rightarrow P = 3M\dot{x}_c$$

Possiamo dividere il moto dei 3 corpi in 3 fasi

Fase 1



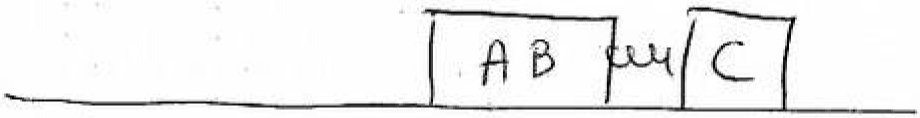
Quantità di moto totale del sistema:

$$P_0 = 3Mv_0 + 3M \cdot 0 = 3Mv_0$$

Energia totale del sistema

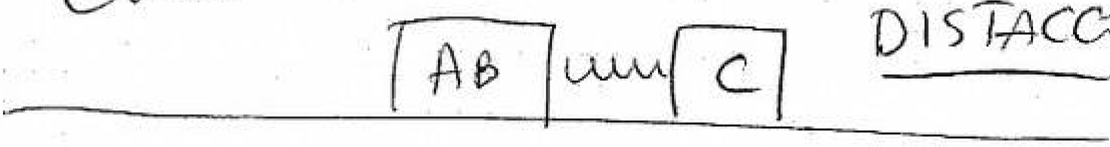
$$E_0 = K_0 + U_0 = \frac{1}{2} 3Mv_0^2 + 0 = \frac{3}{2} Mv_0^2$$

Fase 2 - I 3 corpi interagiscono



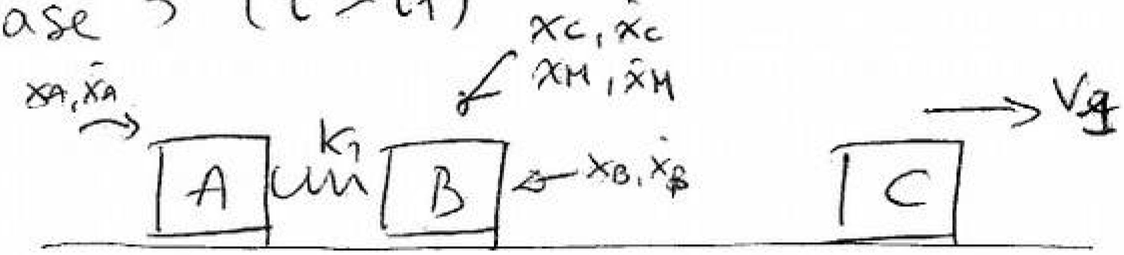
Fase 3 - Il sistema A+B si è distaccato dal corpo C

@$t=t_1$



DISTACCO

Fase 3 $(t > t_1)$



<u>Quantità di moto</u>

$$p_1 = 3M\dot{x}_C + 3MV_1$$

Si conserva $(p_0 = p_1)$

$$\Rightarrow \quad 3MV_0 = 3M\dot{x}_C + 3MV_1$$

$$\Rightarrow \boxed{\dot{x}_C = V_0 - V_1}$$

V. COM A+B dopo distacco.

<u>Energia di A+B</u> +C

$$\frac{1}{2}M\dot{x}_A^2 + \frac{1}{2}2M\dot{x}_B^2 + \frac{1}{2}k x_M^2 + \frac{1}{2}3MV_1^2 = E_1$$

$E_1 = E_0$

$$\frac{1}{2}M\dot{x}_A^2 + \frac{1}{2}2M\dot{x}_B^2 + \frac{1}{2}k_1 x_M^2 + \frac{1}{2}3MV_1^2 = \frac{3}{2}MV_0^2$$

$$\underbrace{\frac{1}{2}M\dot{x}_A^2 + \frac{1}{2}2M\dot{x}_B^2 + \frac{1}{2}k_1 x_M^2}_{\text{cost}} = \underbrace{\frac{3}{2}M(V_0^2 - V_1^2)}_{\text{cost.}}$$

$\Downarrow$

Lo calcolo in punti "notevoli".

A differenza della fase 1, durante la fase 3 è possibile che la molla oscilli.

$$\boxed{\begin{cases} x_B = x_C + x_M \dfrac{\mu}{2M} \\ x_A = x_C - x_M \dfrac{\mu}{M} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_B = \dot{x}_C + \dot{x}_M \dfrac{\mu}{2M} \\ \dot{x}_A = \dot{x}_C - \dot{x}_M \dfrac{\mu}{M} \end{cases}}$$

$$\ddot{x}_M = -\frac{k_1}{\mu} x_M \quad \text{Moto armonico}$$

$$\Rightarrow x_M \ max \equiv \text{velocità nulla} \ (\dot{x}_M = 0)$$

Se $\dot{x}_M = 0$ e $x_M = x_{MAX}$, allora $\dot{x}_A = \dot{x}_B = \dot{x}_C$

$$\frac{1}{2} M \dot{x}_A^2 + \frac{1}{2} 2M \dot{x}_B^2 + \frac{1}{2} k_1 x_M^2 =$$

$$= \frac{1}{2} M \dot{x}_C^2 + \frac{1}{2} 2M \dot{x}_C^2 + \frac{1}{2} k_1 x_{MAX}^2$$

$$= \frac{3}{2} M \dot{x}_C^2 + \frac{1}{2} k_1 x_{MAX}^2 \left(= \frac{3}{2} M (V_0^2 - V_1^2) \right)$$

Ma $\dot{x}_C = V_0 - V_1$!

$$\frac{3}{2} M (V_0 - V_1)^2 + \frac{1}{2} k_1 x_{MAX}^2 = \frac{3}{2} M (V_0^2 - V_1^2)$$

$$3M (\cancel{V_0^2} + V_1^2 - 2V_0V_1 - \cancel{V_0^2} + V_1^2) = -k_1 x_{MAX}^2$$

$$3M (2V_1^2 - 2V_0V_1) = -k_1 x_{MAX}^2$$

$$6M v_1 (v_1 - v_0) = - k_1 x_{max}^2$$

$$\boxed{\dot{x}_{max}^2 = \frac{6M v_1 (v_0 - v_1)}{k_1}}$$

NOTARE CHE: $v_1 > 0 \Rightarrow v_0 - v_1 > 0$

$$\dot{x}_C = v_0 - v_1 > 0$$

Quindi AB si muove anch'esso verso dx.

Che moto compie AB?

$$\begin{cases} \ddot{x}_C = 0 \\ \ddot{x}_M = -\frac{k_1}{\mu} x_M \end{cases}$$

$\dot{x}_C = v_0 - v_1 \ \forall t$ verso dx

$x_M(t) = x_{max} \cos \omega t$

$\omega = \sqrt{\frac{k_1}{\mu}}$

$\dot{x}_M(t) = -\omega x_{max} \sin \omega t$

$$\dot{x}_A = \dot{x}_C - \dot{x}_M \frac{\mu}{2M}$$

$$\mu = \frac{2M}{3}$$

$$= v_0 - v_1 + \frac{\omega x_{max}}{M} \mu \sin \omega t$$

$$\omega = \sqrt{\frac{3k_1}{2M}} \qquad \mu = \frac{2}{3}M$$

$$\frac{\omega\, x_{max}\, \mu}{M} = \sqrt{\frac{3k_1}{2\cancel{M}}}\sqrt{\frac{\cancel{6M}^{3}\, v_1(v_0-v_1)}{\cancel{k_1}}}\;\frac{2\cancel{M}}{3}\,\frac{1}{\cancel{M}}$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{9\, v_1(v_0-v_1)}$$

$$= 2\sqrt{v_1(v_0-v_1)}$$

$$\dot{x}_A \in \underbrace{v_0 - v_1 - 2\sqrt{v_1(v_0-v_1)}}\,;\, v_0 - v_1 + 2\sqrt{v_1(v_0-v_1)}$$

$$v_0 - v_1 - 2\sqrt{v_1(v_0-v_1)} > 0$$

$$v_0 - v_1 = A > 0 \qquad \text{(verificato prima)}$$

$$v_1 > 0$$

$$A - 2\sqrt{v_1 A} > 0$$

$$A > 2\sqrt{v_1 A}$$

$$\sqrt{A} > 2\sqrt{v_1}$$

$$A > 4v_1$$

$$v_0 - v_1 > 4v_1$$

$$v_0 > 5v_1$$

$$\frac{v_1}{v_0} < \frac{1}{5} \quad \Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{v_1}{v_0} = \frac{1}{5}}$$