Corso di recupero di Fisica 2017/2018

Dario Madeo

Lezione del 04/05/2018

Slides disponibili all'indirizzo
http://www.dii.unisi.it/~madeo/crf/crf1718.html

2^a legge di Newton (lungo una direzione)

$$ma = F \leftarrow \text{forza netta agente}$$

(caso rotatorio rispetto ad un asse)

$$I\alpha = \tau \leftarrow \text{momento netto agente}$$

Forze tipiche

- gravità Mg
- molla $-k(x-L)$

Conservative — dipendenza da x

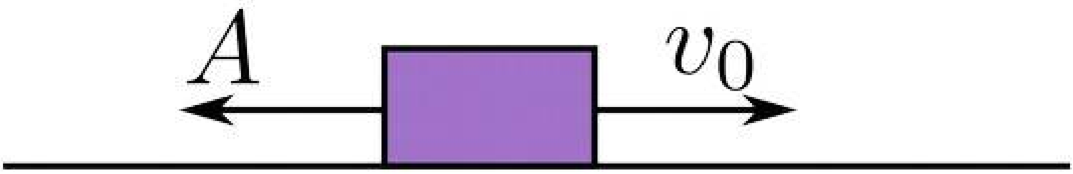
- attrito dinamico : $-A_D$
- attrito viscoso : $-\beta v$

Non conservative — dipendono da v

$\boxed{\bullet \text{ attrito statico : } -A_S}$

Attrito dinamico

L'attrito dinamico dipende dalla velocità. Consideriamo un corpo che si muove inizialmente con velocità v_0:



L'equazione del moto e le condizioni iniziali sono le seguenti:

$$m\ddot{x} = -A$$
$$x(0) = x_0$$
$$\dot{x}(0) = v_0 > 0$$

Il termine A rappresenta la forza di attrito dinamico. Essa agisce finchè il corpo ha velocità.
In altri termini:

$$A = \begin{cases} \mu_D mg & \text{se } \dot{x} > 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Conclusione: il termine A è implicitamente dipendente dalla velocità del corpo, e dunque tale forza è dissipativa.

- Se F non contiene termini che non dipendono da t esplicitamente, si parla di sistema dinamico $\boxed{\text{autonomo}}$

- Se F non ha componenti costanti (escludo gravità e attrito dinamico), allora il sistema si dice $\boxed{\text{omogeneo}}$

- le forze $-Kx$ e $-\beta v$ sono lineari, quindi il sys. dinamico è $\boxed{\text{lineare}}$

OMOGENEO + LINEARE

$$ma = -Kx - \beta v \qquad \begin{array}{l} m > 0 \\ K, \beta \geq 0 \end{array}$$

1) $K = 0$

$$ma = -\beta v \Rightarrow m\dot{v} = -\beta v$$

ODE
tempo invariante
1° ordine

Problema di Cauchy

$$\begin{cases} m\dot{v} = -\beta v \\ v(0) = v_0 \end{cases}$$

Polinomio caratteristico

$v \rightarrow 1 \quad (D^0)$

$\dot{v} \rightarrow D \quad (D^1) \qquad D \in \mathbb{C}$

$\ddot{v} \rightarrow D^2 \quad (D^2)$

$$m\dot{v} = -\beta v \xrightarrow{P.C} mD = -\beta$$

Cerco gli zeri del PC.

$$mD + \beta = 0 \Rightarrow \boxed{D = -\frac{\beta}{m}}$$

$$v(t) = Ae^{Dt} \quad , \quad A \in \mathbb{R}$$

$$= Ae^{-\frac{\beta}{m}t}$$

$$v(0) = Ae^{-\frac{\beta}{m}0} = A = v_0$$

$$\Rightarrow \boxed{v(t) = v_0 e^{-\frac{\beta}{m}t}}$$

$\left.\begin{array}{l} v(0) = v_0 \\ v(\infty) = 0 \end{array}\right] \Rightarrow$ È stata bruciata l'energia cinetica a causa della forza non conservativa

$$m \dot{v} = -\beta v$$

$$\Downarrow$$

$$m \ddot{x} = -\beta \dot{x}$$

ODE t. inv. lineare
2° ordine

PC

$$m D^2 = -\beta D$$

$$m D^2 + \beta D = 0$$

$$D_1 = 0$$

$$D_2 = -\frac{\beta}{m}$$

$$x(t) = A e^{D_1 t} + B e^{D_2 t}$$

$$= A + B e^{-\frac{\beta}{m} t} \quad , A, B \in \mathbb{R}$$

$$x(0) = x_0$$

$$v(0) = v_0$$

$$x(0) = A + B e^{-\frac{\beta}{m} \cdot 0} = A + B = x_0$$

$$v(t) = -B \frac{\beta}{m} e^{-\frac{\beta}{m} t}$$

$$v(0) = -B \frac{\beta}{m} = v_0$$

$$\begin{cases} A+B = x_0 \\ -B\frac{\beta}{m} = v_0 \end{cases} \quad \begin{cases} A = x_0 + \frac{v_0 m}{\beta} \\ B = -\frac{v_0 m}{\beta} \end{cases}$$

$$x(t) = x_0 + \frac{v_0 m}{\beta} - \frac{v_0 m}{\beta} e^{-\frac{\beta}{m}t}$$

$$\boxed{v(t) = v_0 \, e^{-\frac{\beta}{m}t}}$$

$$\left.\begin{aligned} x(0) &= x_0 \\ x(\infty) &= x_0 + \frac{v_0 m}{\beta} \end{aligned}\right]$$

Il corpo si è spostato di $\frac{v_0 m}{\beta}$ prima di fermarsi del tutto.

Da notare che:

- Risolvendo $m\dot{v} = -\beta v$, ottengo la <u>legge oraria</u> della <u>velocità</u>
- Risolvendo $m\ddot{x} = -\beta\dot{x}$, ottengo <u>due</u> leggi orarie: quella della <u>velocità</u> (che deve essere uguale a quella calcolata in precedenza) e quella della <u>posizione</u>.

$\beta = 0$ $\quad ma = -kx$

$m\ddot{x} = -kx$ ⇐ In questo caso il sistema è necessariamente del secondo ordine!

PC $\quad mD^2 + k = 0$

$$D_{1,2} = \pm\sqrt{-\frac{k}{m}} = \pm i \underbrace{\sqrt{\frac{k}{m}}}_{\omega}$$

$\frac{k}{m} > 0$

$$x(t) = a e^{D_1 t} + b e^{D_2 t}$$
$$= a e^{i\omega t} + b e^{-i\omega t}$$

$$e^{i\omega t} = \cos\omega t + i \sin\omega t$$
$$e^{-i\omega t} = \cos\omega t - i \sin\omega t$$

Nota teorica

$$x(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t$$
$$v(t) = -A\omega\sin\omega t + B\omega\cos\omega t$$

leggi orarie

$A, B \in \mathbb{R}$

$x(0)=x_0 \qquad v(0)=v_0$

$$x(t)= x_0 \cos\omega t + \frac{v_0}{\omega}\sin\omega t$$

$$v(t) = v_0 \cos\omega t - x_0\omega \sin\omega t$$

2 CASI FREQUENTI

$\boxed{\begin{array}{l} x(0)=0 \\ v(0)=v_0 \end{array}}$

$x(t) = \frac{v_0}{\omega}\sin\omega t$

$v(t)= v_0\cos\omega t$

Molla a riposo ma con vel. iniziale

$\boxed{\begin{array}{l} x(0)=x_0 \\ v(0)=0 \end{array}}$

$x(t)= x_0\cos\omega t$

$v(t)=-x_0\omega\sin\omega t$

Molla "carica" e corpo fermo

NB $(x=0, v=0)$ è il punto di equilibrio del sistema.

Esercizio Cosa succede se risolvo la ODE e impongo che $x(0)=v(0)=0$ (ovvero se assumo che il sistema è in condizioni di equilibrio)?

$\beta \neq 0, \ K \neq 0$

$$m\ddot{x} = -\beta\dot{x} - Kx$$

PC $\quad mD^2 + \beta D + K = 0$

$$D_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4mK}}{2m}$$

1) $\beta^2 - 4mK > 0$ $\qquad D_1 \in \mathbb{R}$, $D_2 \in \mathbb{R}$, $D_1 \neq D_2$

$\hookrightarrow x(t) = Ae^{D_1 t} + Be^{D_2 t}$

2) $\beta^2 - 4mK < 0$ $\qquad D_1 \in \mathbb{C}$, $D_2 \in \mathbb{C}$

$D_1 = \lambda + i\omega$

$D_2 = \lambda - i\omega$

$$\lambda = -\frac{\beta}{2m}$$

$$\omega = \frac{\sqrt{4mK - \beta^2}}{2m}$$

$\hookrightarrow x(t) = Ae^{\lambda t}\cos\omega t + Be^{\lambda t}\sin\omega t$

3) $\beta^2 - 4mK = 0$

$$D_1 = D_2 = -\frac{\beta}{2m}$$

$$x(t) = A e^{D_1 t} + B t e^{D_1 t}$$

A causa della soluzione doppia, devo aggiungere t.

Se la soluzione fosse stata tripla, avrei dovuto aggiungere t e t^2...

$\beta = 0 \quad k = 0$

$$\boxed{m\mathring{a} = 0}$$

$$m\ddot{x} = 0$$

PC $\quad mD^2 = 0 \qquad D_1 = D_2 = 0$

$$x(t) = Ae^{D_1 t} + Bte^{D_1 t}$$
$$= A + Bt$$

$$v(t) = B$$

$x(0) = x_0$

$v(0) = v_0$

$$\Longrightarrow \boxed{\begin{aligned} x(t) &= x_0 + v_0 t \\ v(t) &= v_0 \end{aligned}}$$

$$\Downarrow$$

Moto rettilineo uniforme

1° principio della dinamica

- Se la somma delle forze è nulla ... (infatti $ma = 0$)
- allora il corpo in quiete rimarrà fermo ... (infatti se $v_0 = 0$, allora $v(t) = 0$)
- mentre un corpo in moto continuerà a muoversi di moto rett. uniforme (vedi caso $v_0 \neq 0$).

Caso non omogeneo

$$ma = -\beta v - kx + \underbrace{F}, \quad \underline{F \text{ cost}}$$

1) PC omo $\quad mD^2 + \beta D + k = 0$

2) Cerco le soluzioni $\boxed{D_1 \text{ e } D_2}$

3) Il termine F "aggiunge" un'ulteriore soluzione

$$\boxed{D_3 = 0}$$

$$x(t) = Ae^{D_1 t} + Be^{D_2 t} + Ce^{D_3 t}, \quad D_3 = 0$$

$$= Ae^{D_1 t} + Be^{D_2 t} + C$$

Schema generale

NB Attenzione alle soluzioni multiple!

$\underline{K=0}$

$$m\ddot{x} = -\beta\dot{x} + F$$

$D_1 = 0$

$D_2 = -\frac{\beta}{m}$ $\Rightarrow x(t) = Ae^{0t} + Bte^{0t} + Ce^{-\frac{\beta}{m}t}$

$D_3 = 0$

$$= A + Bt + Ce^{-\frac{\beta}{m}t}$$

$x(0) = x_0$

$v(0) = v_0$

$$x(0) = A + B\cdot 0 + Ce^{-\frac{\beta}{m}0} = A + C = x_0$$

$$v(t) = B - C\frac{\beta}{m}e^{-\frac{\beta}{m}t}$$

$$v(0) = B - C\frac{\beta}{m} = v_0$$

$$\begin{cases} A + C = x_0 \\ B - C\frac{\beta}{m} = v_0 \end{cases}$$

$$a(t) = C\frac{\beta^2}{m^2} e^{-\frac{\beta}{m}t}$$

Sostituisco $a(t)$, $v(t)$ e $x(t)$ nella <u>ODE</u>

$$ma = -\beta v + F$$

$$m \underbrace{C\frac{\beta^2}{m^2} e^{-\frac{\beta}{m}t}}_{a} = -\beta \Big(\underbrace{B - C\frac{\beta}{m} e^{-\frac{\beta}{m}t}}_{v}\Big) + F$$

$$m\, C\frac{\beta^2}{m^2} e^{-\frac{\beta}{m}t} + \beta B - C\frac{\beta^2}{m} e^{-\frac{\beta}{m}t} - F = 0$$

$$e^{-\frac{\beta}{m}t}\underbrace{\left(\frac{mC\beta^2}{m^2} - \frac{C\beta^2}{m}\right)}_{0} + \beta B - F = 0$$

$$\boxed{\beta B - F = 0}$$ 3ª eqz mancante!

$$\begin{cases} A + C = x_0 \\ B - C\frac{\beta}{m} = v_0 \\ \beta B - F = 0 \end{cases}$$

$\boxed{A, B, C \mid \text{inc.}}$

incognite

Esercizio: determinare A, B e C

$k=0 \quad m=0$

$$m\ddot{x} = F$$

$$m\ddot{x} = mg \quad \leftarrow F = mg$$

$$\ddot{x} = g$$

PC omo $\quad D^2 = 0 \quad D_1 = D_2 = 0$

g "mi regala" $\quad D_3 = 0$

$$x(t) = Ae^{0t} + Bte^{0t} + Ct^2e^{0t}$$

$$= A + Bt + Ct^2$$

Esercizio: determinare A, B e C

$x(0) = x_0$

$v(0) = v_0$

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} g t^2$$

$$v(t) = v_0 + gt$$

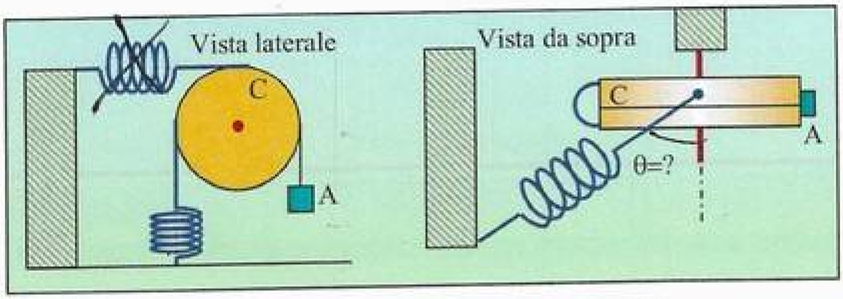
Soluzione

$\Downarrow$

Moto uniformemente accelerato

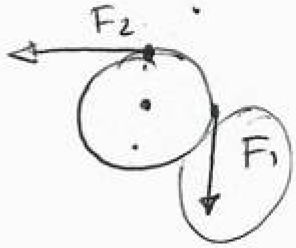
A di massa M che inizialmente dista R

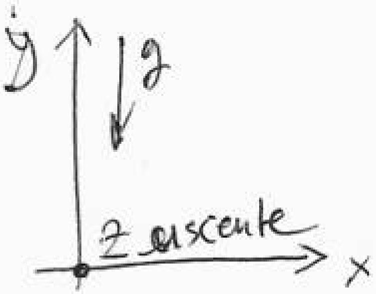
Esercizio estratto dall'esame di Fisica1 del 12 Febbraio 2018

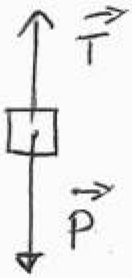


Esercizio 2
La figura mostra in prospetto e in pianta un sistema con una carrucola cilindrica di raggio R e massa 6M che può ruotare intorno ad un asse orizzontale fisso. Alla carrucola è appeso un corpo puntiforme A di massa M che inizialmente dista R dal terreno. Inoltre alla carrucola sono connesse due molle identiche di costante elastica k. Una molla è orizzontale ed è disposta a formare un angolo θ (incognito) con l'asse della carrucola ed è allungata di un tratto R essa connette il punto superiore della carrucola a un supporto fisso. L'altra molla invece è verticale, agganciata al terreno e al filo che sostiene A. Inizialmente, quando tutto il sistema è fermo all'equilibrio, tale molla è a riposo. A t=0 si sgancia la molla orizzontale ed il corpo A scende fino ad arrivare con velocità nulla a toccare il terreno. Determinare: a) il valore di θ; b) la massima velocità angolare della carrucola; c) l'istante al quale A tocca il terreno.

Punto a - Esercizio di statica

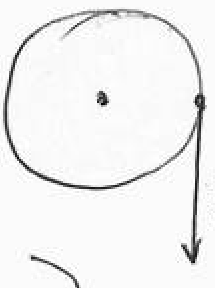






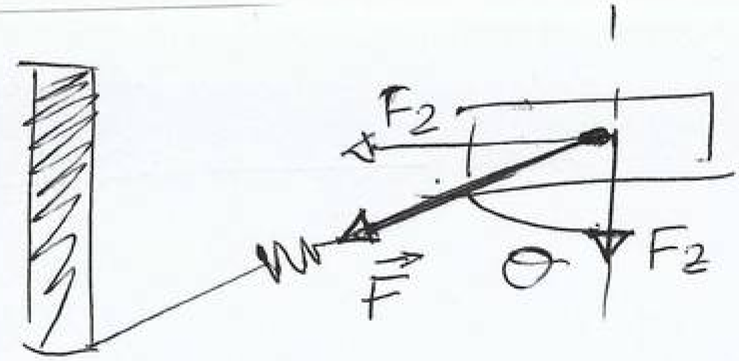
$$\vec{P} = \begin{bmatrix} 0 \\ -Mg \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \vec{T} = \begin{bmatrix} 0 \\ T \\ 0 \end{bmatrix}$$

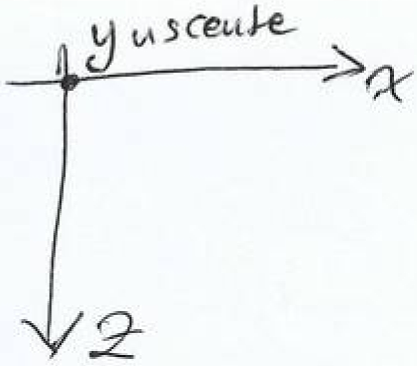
$$\vec{P} + \vec{T} = \vec{0} \implies \boxed{T = Mg}$$



$$\vec{F_1} = -\vec{T}$$

$$\vec{F_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ -Mg \\ 0 \end{bmatrix}$$



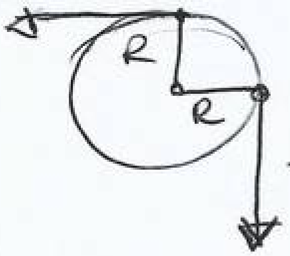


$$|\vec{F}| = KR$$

$$F_z = -KR\sin\theta$$

$$-KR\sin\theta \longrightarrow \tau = KR^2\sin\theta$$

$$+$$



$$-Mg \longrightarrow \tau = -MgR$$

$$KR^2\sin\theta - MgR = 0$$

$$\boxed{\sin\theta = \frac{Mg}{KR}}$$

Dopo aver staccato la molla superiore, il corpo di massa M si mette in moto.
Su di esso agiscono solo forza conservative.
E' dunque possibile sfruttare la conservazione dell'energia meccanica totale:

Energia potenziale della molla

Energia potenziale gravitazionale

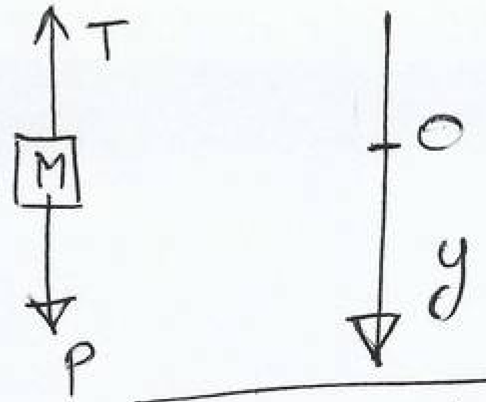
Energia cinetica

			gravità molla	
$t=0$	$\boxed{M}$	$K=0$	$U = MgR + 0$	
				R
$t=T$	$\boxed{M}$	$K=0$	$U = 0 + \frac{1}{2}kR^2$	

$$MgR = \frac{1}{2}kR^2 \Rightarrow \frac{Mg}{kR} = \frac{1}{2}$$

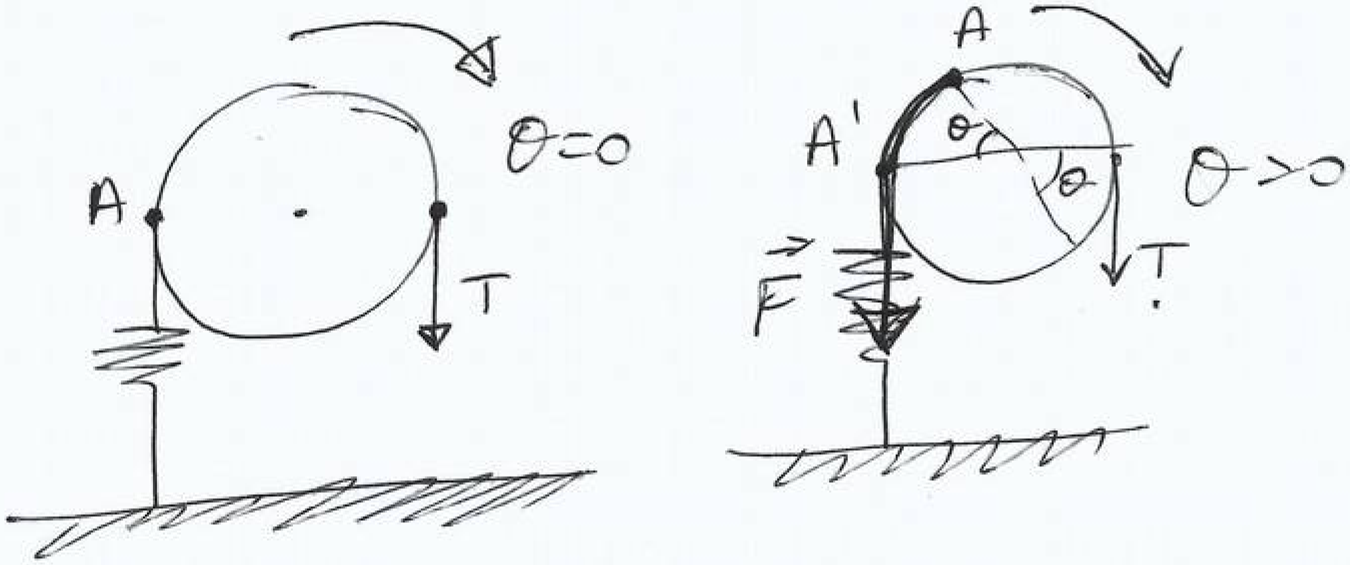
$$\sin\theta = \frac{Mg}{kR} \Rightarrow \sin\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{\theta = \frac{\pi}{6}}$$

Punti b e c - Problemi di dinamica



Legge del moto della massa M →

$$\boxed{M\ddot{y} = Mg - T}$$



$\overline{A'A} \equiv$ all. della molla

$\overline{A'A} = R\theta$

$|\vec{F}| = K\underline{R\theta}$

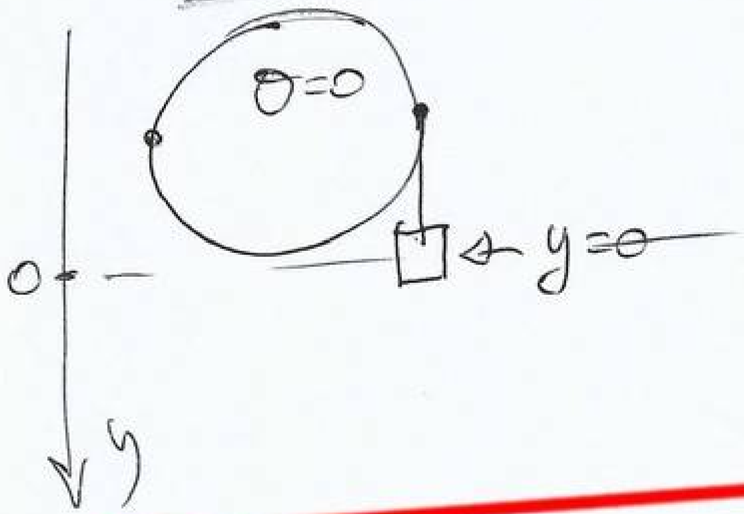
Legge del moto del disco

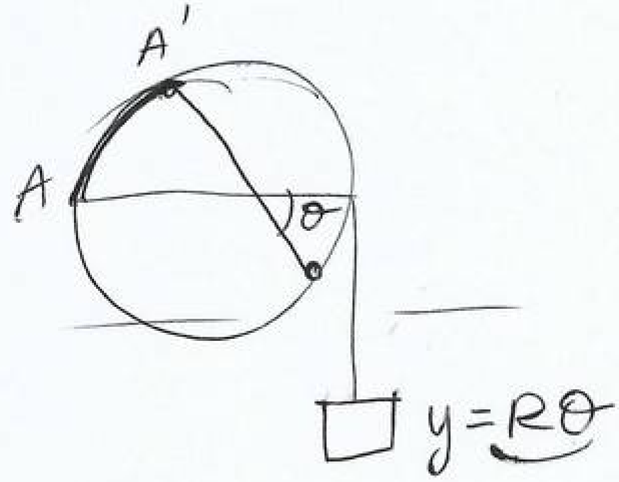
$$\boxed{I\ddot{\theta} = \underline{TR} - \underline{R}\,\underline{KR\theta}}$$

$$I = \frac{6MR^2}{2} = 3MR^2$$

$$M\ddot{y} = Mg - T$$

$$I\ddot{\theta} = TR - KR^2\theta$$





$$\boxed{y = R\theta \Rightarrow \ddot{y} = R\ddot{\theta}}$$

Dalla geometria del problema, si evince che esiste un legame tra la quota y della massa M e l'angolo θ del disco.

$$M\ddot{y} = Mg - T \Rightarrow MR\ddot{\theta} = Mg - T$$

$$\Rightarrow T = Mg - MR\ddot{\theta}$$

$$I\ddot{\theta} = R(Mg - MR\ddot{\theta}) - KR^2\theta$$

$$\boxed{(I + MR^2)\ddot{\theta} = -KR^2\theta + RMg}$$

$$4MR^2\ddot{\theta} = -KR^2\theta + RMg$$

$$\boxed{\ddot{\theta} = -\frac{K}{4M}\theta + \frac{g}{4R}}$$

Grazie al legame tra y e θ riesco a scrivere un'unica legge del moto!

$$\Omega = \sqrt{\frac{K}{4M}}$$

$$\ddot{\theta} = -\Omega^2 \theta + \frac{g}{4R}$$

PC $D^2 + \Omega^2 = 0$ $\Rightarrow D_{1,2} = \pm i\Omega$

$\rightarrow D_3 = 0$

$$\theta(t) = A\cos\Omega t + B\sin\Omega t + C$$

$$\theta(0) = 0$$

$$\omega(0) = 0$$

$$\omega(t) = \dot{\theta}(t) = -A\Omega \sin\Omega t + B\Omega\cos\Omega t$$

Det. A, B e C

$$\theta(t) = -\frac{Mg}{RK}\cos\Omega t + \frac{Mg}{RK}$$

$$\omega(t) = \frac{Mg}{RK}\Omega \sin\Omega t$$

$$\frac{Mg}{RK} = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \theta(t) &= -\frac{1}{2}\cos\Omega t + \frac{1}{2} \\ \omega(t) &= \frac{1}{2}\Omega \sin\Omega t \end{aligned}}$$

Equilibrio $\boxed{\theta = \frac{1}{2} \qquad \omega = 0}$

$$\square \leftarrow \theta = 0 \qquad \omega = 0 \qquad y = 0$$

$$\square \leftarrow \theta = \frac{1}{2} \qquad \omega = ? \qquad y = \frac{R}{2}$$

$$\square \leftarrow \theta = 1 \qquad \omega = 0 \qquad y = R$$

Quanto tempo ci mette a scendere?

$$\theta(t) = -\frac{1}{2}\cos\Omega t + \frac{1}{2} = 1$$

$$-\frac{1}{2}\cos\Omega t = +\frac{1}{2}$$

$$\cos\Omega t = -1$$

$$\Omega t = \pi \quad \Rightarrow \quad \boxed{t = \frac{\pi}{\Omega}}$$

Qual'è la velocità max?

$$\omega(t) = \frac{1}{2}\Omega \sin \Omega t$$

$$\boxed{\omega_{MAX} = \frac{1}{2}\Omega}$$

$x(t) = x_0 \cos\omega t$

$v(t) = -x_0\omega \sin\omega t$

$\Rightarrow$

$x = x_0, \quad \underline{v = 0}$

$x = 0, \quad v = -x_0\omega$

$x = -x_0, \quad \underline{v = 0}$

$x(t) = \frac{v_0}{\omega} \sin\omega t$

$v(t) = v_0 \cos\omega t$

$\Rightarrow$

$x = 0, \quad v = v_0$

$x = \frac{v_0}{\omega}, \quad v = 0$

$x = -\frac{v_0}{\omega}, \quad v = 0$

$\theta(t) = -\frac{1}{2} \cos\Omega t + \frac{1}{2}$

$\omega(t) = \frac{1}{2}\Omega \sin\Omega t$

$\theta = 0, \; \omega = 0$ molla a riposo

$\theta = \frac{1}{2}, \; \omega = \frac{1}{2}\Omega$ molla espansa

$\theta = 1, \; \omega = 0$ molla max esp.