Corso di recupero di Fisica 2017/2018

Dario Madeo

Lezione del 20/04/2018

Slides disponibili all'indirizzo
http://www.dii.unisi.it/~madeo/crf/crf1718.html

Coordinate sferiche

Cilindriche

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}$$

$r \in [0, R]$

$\theta \in [0; 2\pi]$

$z \in [0; h]$

$dx\,dy\,dz = r\,dr\,d\theta\,dz$

Sferiche

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \sin\varphi \\ y = r\sin\theta \sin\varphi \\ z = r\cos\varphi \end{cases}$$

$r \in [0; R]$

$\theta \in [0; 2\pi]$

$\varphi \in [0; \pi]$

$dx\,dy\,dz = r^2 \sin\varphi\,dr\,d\varphi\,d\theta$

Cosa è cambiato rispetto alle coordinate cilindriche?

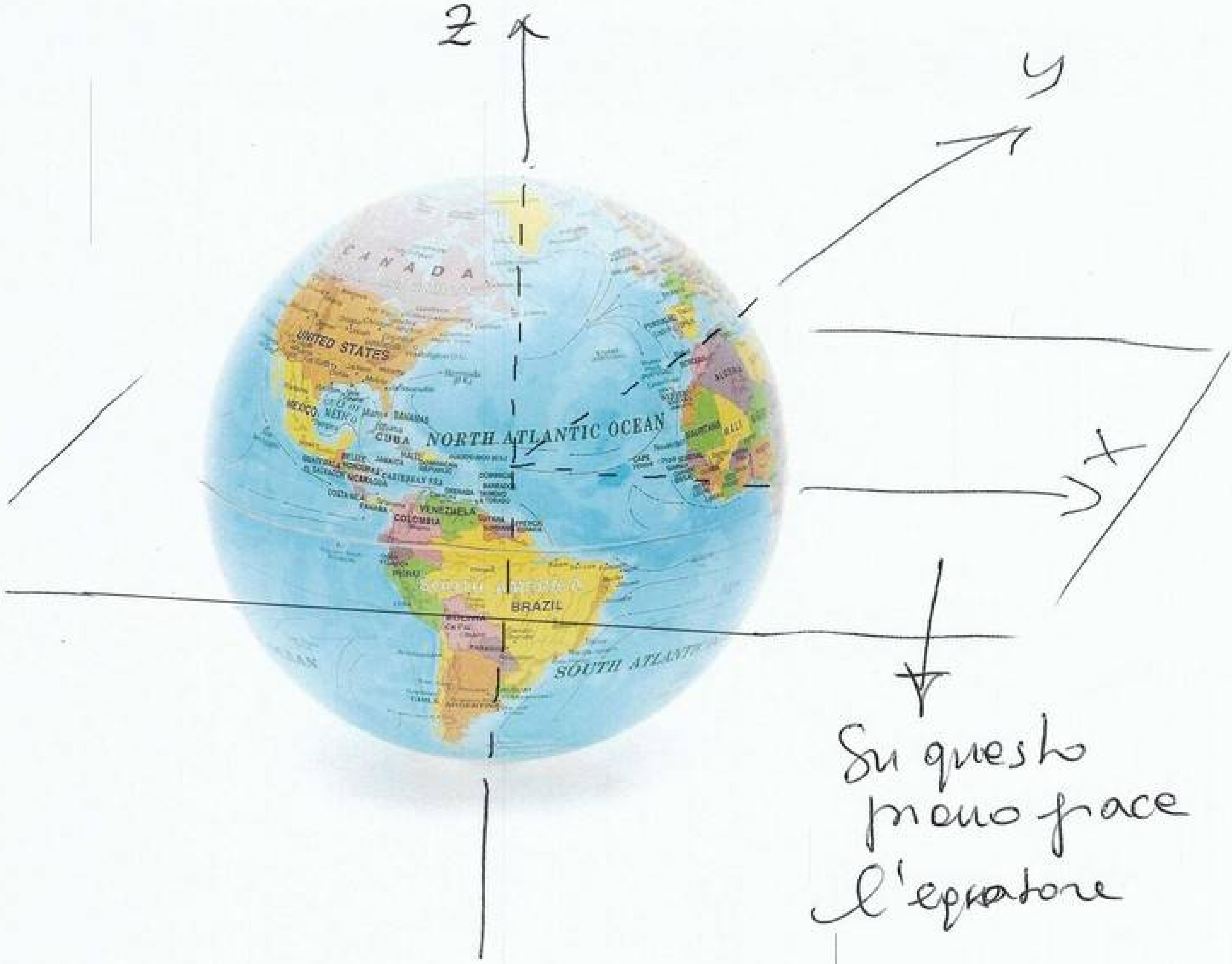
Intuitivamente, se immaginiamo di fissare la quota z e di estrarre la corrispondente "fetta" della sfera, otterremo una circonferenza il cui raggio **deve** dipendere dalla quota stessa.

La quota z è regolata dalla nuova variable ϕ. Ovvero, fissando ϕ, anche la quota viene fissata.

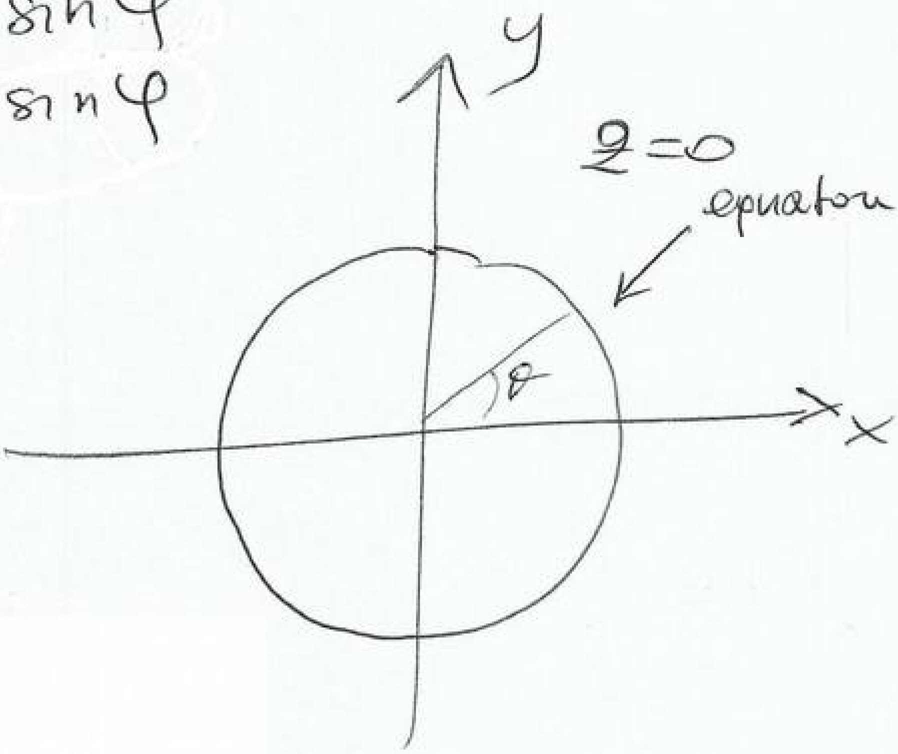
Se osserviamo più attentamente l'espressione di x ed y, notiamo che possiamo riscriverle come segue:

$$\begin{cases} x = (r\sin\phi)\cos\theta \\ x = (r\sin\phi)\sin\theta \end{cases}.$$

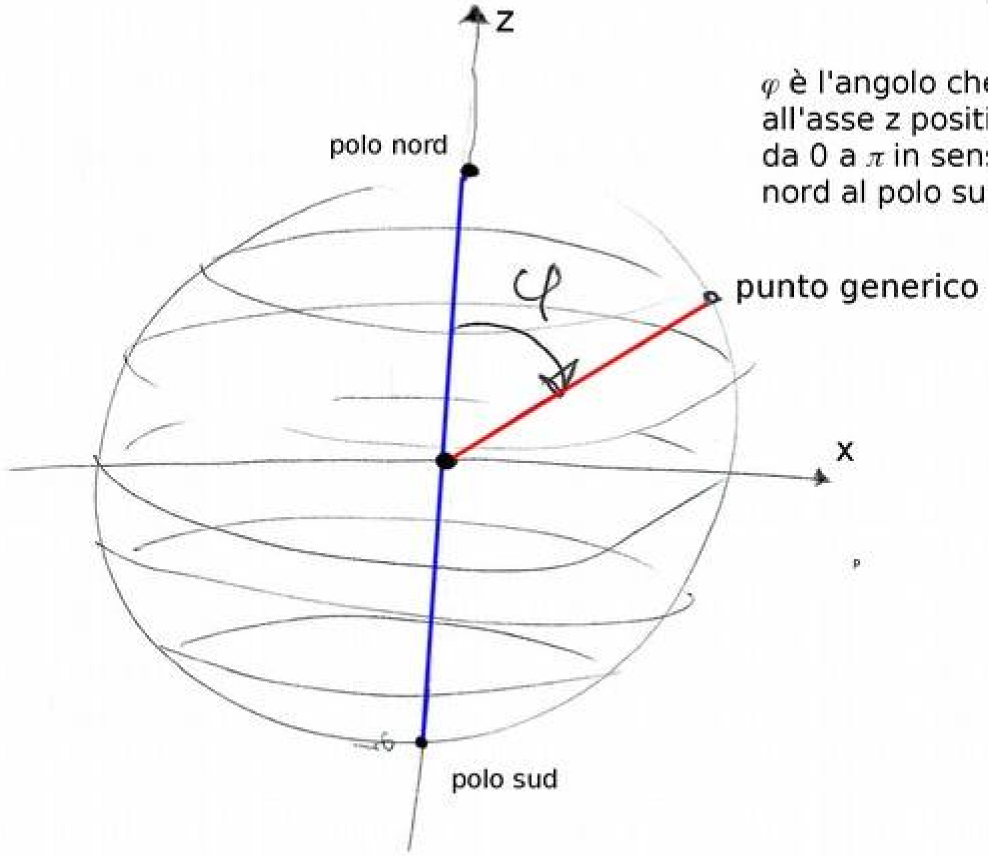
Si osserva quindi che "il raggio", ovvero la quantità che moltiplica le componenti "polari" $\cos\theta$ e $\sin\theta$, dipende anch'esso da ϕ, e dunque, dalla quota.



$$\begin{cases} x = r\cos\theta \sin\varphi \\ y = r\sin\theta \sin\varphi \\ z = r\cos\varphi \end{cases}$$



φ è l'angolo che si forma rispetto all'asse z positivo. L'angolo va da 0 a π in senso orario (dal polo nord al polo sud).



Casi notevoli:

$\varphi = 0 \Rightarrow$ raggio $= 0 \Rightarrow$ POLO NORD

$\varphi = \pi \Rightarrow$ raggio $= 0 \Rightarrow$ POLO SUD

$\varphi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow$ raggio massimo $\Rightarrow$ EQUATORE

Simmetria sferica

Praticamente in ogni esercizio in cui viene richiesto di effettuare calcoli in cui è necessario usare le coordinate sferiche, è presente anche la simmetria sferica.

La simmetria sferica, come quella cilindrica, implica che la densità di massa o di carica sia distribuita secondo una legge che dipende solo dalla variabile r:

$$\rho(x, y, z) = \rho(r, \theta, \phi) = \rho(r).$$

Massa di una sfera omogenea con densità $\rho(x,y,z) = \rho$

$$M = \int dm = \iiint \rho \, dx\,dy\,dz$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R} \rho \, \underline{r^2 \sin\varphi} \, dr\,d\varphi\,d\theta$$

$$= \underline{\left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)} \left(\int_0^{\pi} \underline{\sin\varphi\, d\varphi}\right) \left(\int_0^{R} \underline{\rho r^2 dr}\right)$$

$$= 2\pi \cdot 2 \, \rho \frac{R^3}{3} = \frac{4\pi}{3} \rho R^3$$

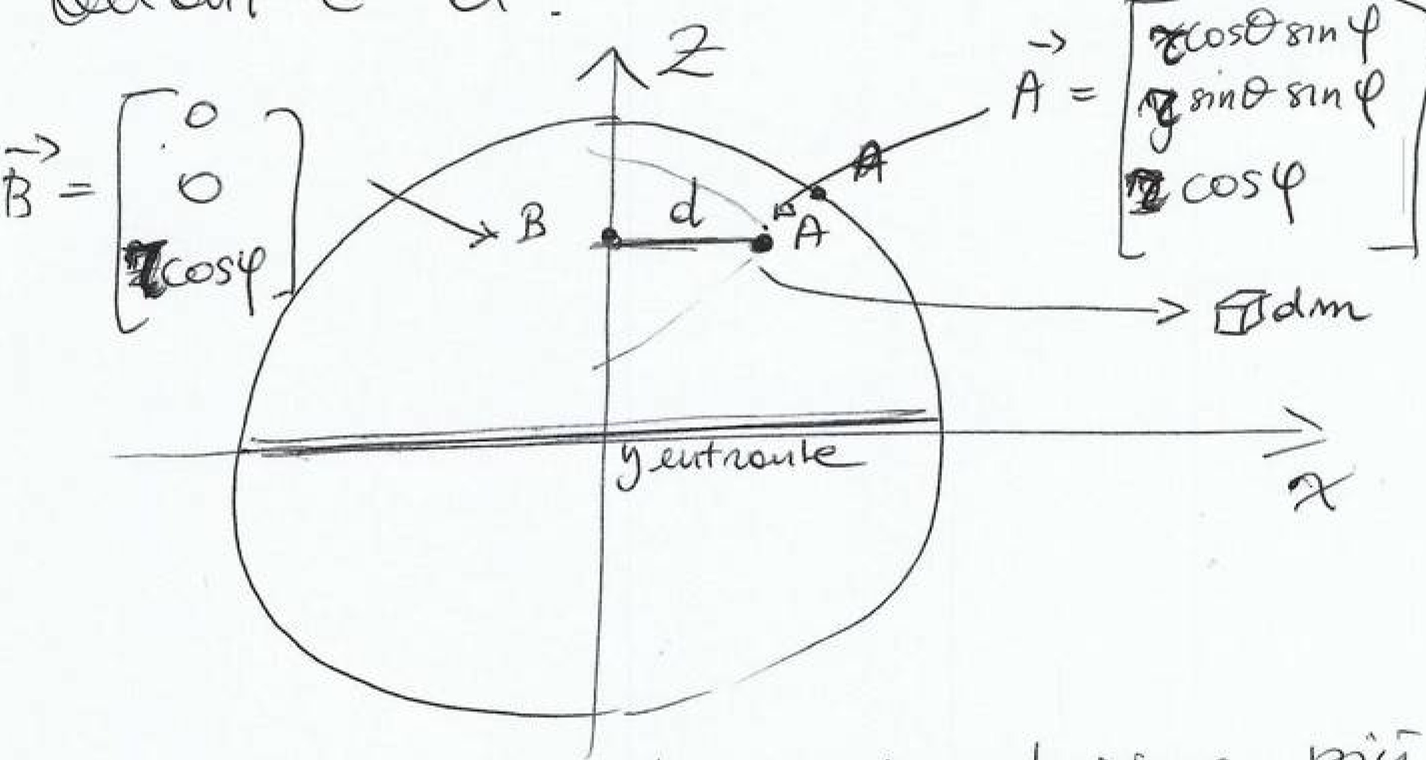
<u>Notare</u> $V = \frac{4\pi}{3} R^3$

Volume della sfera!

$$I = \int d^2\, dm$$ d: distanza tra l'asse di rotazione

(l'asse rotazione passa per il centro della sfera) e una massa dm

Quant'è d?



B è il punto sull'asse di rotazione più vicino ad A.

$$d = \overline{AB} = \sqrt{(r\cos\theta\sin\varphi - 0)^2 + (r\sin\theta\sin\varphi - 0)^2 + (r\cos\varphi - r\cos\varphi)^2}.$$

$$= \sqrt{r^2\cos^2\theta\,\sin^2\varphi + r^2\sin^2\theta\,\sin^2\varphi}$$

$$= \sqrt{r^2\sin^2\varphi\,(\cos^2\theta + \sin^2\theta)}$$

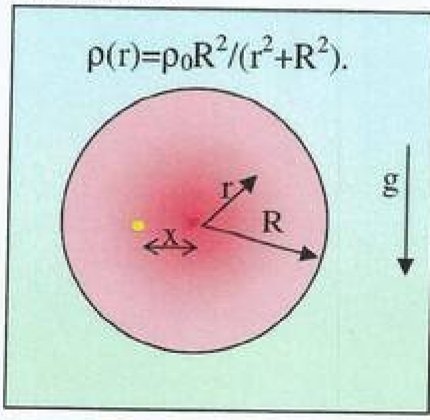
$$= \sqrt{r^2\sin^2\varphi} = r\sin\varphi.$$

$$\Rightarrow \boxed{d = \underbrace{r\sin\varphi}}$$

$$I = \iiint \rho \underbrace{r^2\sin^2\varphi}_{d^2}\, r^2\sin\varphi\, dr\, d\theta\, d\varphi$$

Esercizio estratto dall'esame di Fisica 1 del 22 Aprile 2009

Esercizio 2



Si ha ~~un cilindro~~ uno sfera non omogeneo di raggio R e altezza h la cui densità decresce con la distanza r dall'asse secondo la legge $\rho(r)=\cancel{\rho_0 R^2/(r^2+R^2)}$. $\rho_0 \frac{r}{R}$

a) Calcolare la massa ed il momento d'inerzia del cilindro rispetto all'asse di simmetria.

Indicando con M e I le quantità appena calcolate,

b) calcolare a quale distanza x dal centro si deve porre un fulcro (con asse orizzontale), affinché sia minimo il periodo di piccole oscillazioni del cilindro intorno a tale fulcro;

c) in funzione di M, I e x, determinare nelle sue componenti la reazione vincolare sul fulcro, in un istante in cui il cilindro ruota a velocità angolare Ω_0 ed ha il baricentro alla stessa altezza del fulcro.

$$\boxed{\rho(r) = \rho_0 \frac{r}{R}}$$ Simmetria sferica

Calcolo della massa della sfera:

$$M = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R} \rho_0 \frac{r}{R}\, r^2 \sin\varphi \, dr\, d\varphi\, d\theta$$

$$= \left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)\left(\int_0^{\pi} \sin\varphi\, d\varphi\right)\left(\int_0^{R} \frac{\rho_0}{R} r^3\, dr\right)$$

$$= 4\pi \frac{\rho_0}{\cancel{R}} \frac{R^{\cancel{4}\,3}}{\cancel{4}} = \boxed{\pi \rho_0 R^3}$$

Notare che:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \sin\phi\, d\phi\, d\theta = 4\pi.$$

È utile tenere a mente che, in presenza di simmetria sferica, se $r \in S$, $\theta \in [0, 2\pi]$ e $\phi \in [0, \pi]$, allora:

$$M = 4\pi \int_S \rho(r) r^2 dr.$$

Calcolo del momento di inerzia della sfera rispetto ad un'asse passante per il suo centro di massa (nel caso di simmetria sferica, il centro di massa coincide con il centro geometrico della sfera).

$$I = \int d^2 dm \qquad d = r \sin\varphi$$

$$I = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R} \underbrace{r^2 \sin^2\varphi}_{d^2} \cdot \underbrace{\rho_0 \frac{r}{R}}_{\rho(r)} r^2 \sin\varphi \, dr \, d\varphi \, d\theta$$

$$= \left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)\left(\int_0^{\pi} \sin^3\varphi \, d\varphi\right)\left(\int_0^{R} \frac{\rho_0}{R} r^5 dr\right)$$

$$\int_0^{\pi} \sin^3\varphi \, d\varphi = \int_0^{\pi} \sin\varphi \sin^2\varphi \, d\varphi$$

$$= \int_0^{\pi} \sin\varphi \,(1-\cos^2\varphi)\, d\varphi$$

$$= \underbrace{\int_0^{\pi} \sin\varphi \, d\varphi}_{} - \int_0^{\pi} \sin\varphi \cos^2\varphi \, d\varphi$$

$$= 2 + \int_0^{\pi} \underbrace{(-\sin\varphi)}_{f'} \underbrace{\cos^2\varphi}_{f^2} \, d\varphi$$

$$\boxed{\int f' f^n dx = \frac{f^{n+1}}{n+1} + c}$$

$$= 2 + \left(\frac{\cos^3\varphi}{3}\right)_0^{\pi} =$$

$$= 2 + \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\right) = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

$$I = 2\pi \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{\rho_0}{R} \frac{R^6}{6} =$$

$$\left(\frac{8\pi}{3}\right)$$

$$= \frac{\cancel{8\pi}^{4}}{3} \frac{\rho_0 R^5}{\cancel{6}_3} = \frac{4\pi \rho_0 R^5}{9}.$$

Riassumendo

$$M = \pi \rho_0 R^3$$

$$I = \frac{4\pi \rho_0 R^5}{9}$$

Notare che:

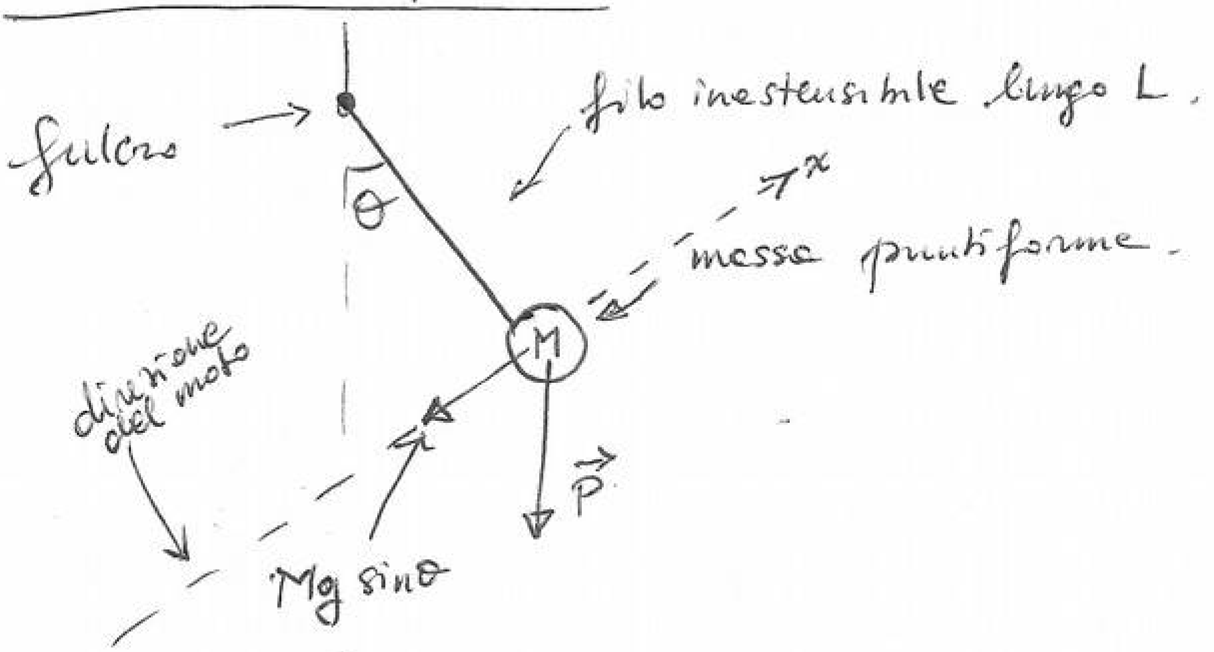
$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sin^3 \phi d\phi d\theta = \frac{8}{3}\pi.$$

È utile tenere a mente che, in presenza di simmetria sferica, se $r \in S$, $\theta \in [0, 2\pi]$ e $\phi \in [0, \pi]$, allora:

$$I = \frac{8}{3}\pi \int_S \rho(r) r^4 dr.$$

Prima di andare avanti con l'esercizio, facciamo un piccolo ripasso delle equazioni che regolano il moto di un pendolo...

Pendolo semplice



$$M\ddot{x} = -Mg\sin\theta$$

$\ddot{x}$ accelerazione $\Rightarrow$ $\frac{\ddot{x}}{L} = \ddot{\theta}$ accelerazione angolare

$$\left(\frac{1}{L}\right)M\ddot{x} = -Mg\sin\theta\left(\frac{1}{L}\right)$$

$$M\ddot{\theta} = -\frac{Mg\sin\theta}{L}$$

$$\boxed{\ddot{\theta} = -\frac{g}{L}\sin\theta}$$

Per piccoli angoli ($\theta \simeq 0$) $\rightarrow$

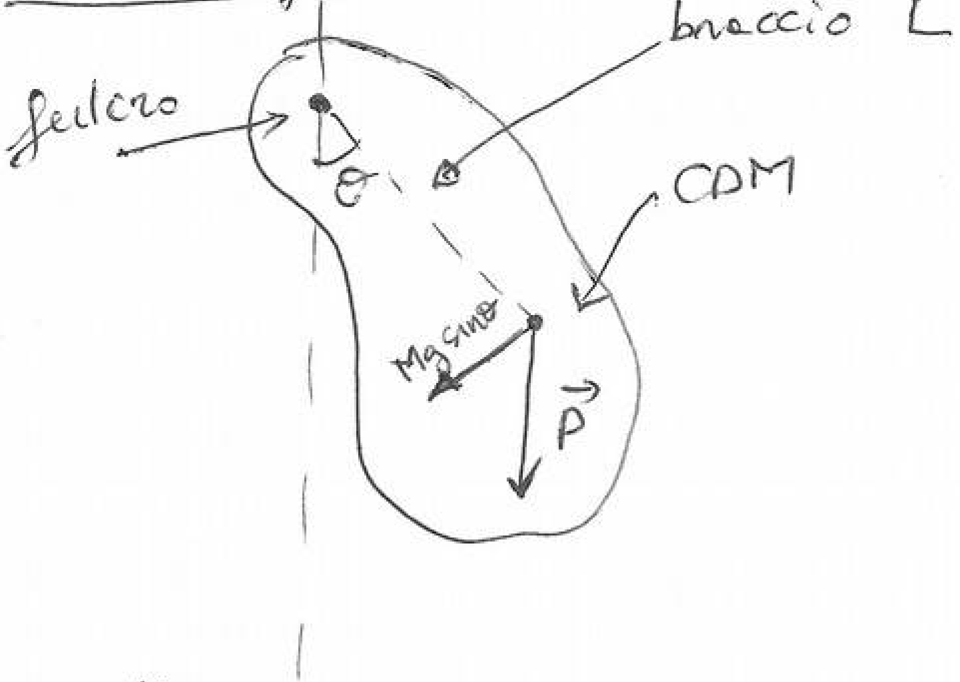
$\rightarrow \sin\theta \simeq \theta \rightarrow$

$$\rightarrow \ddot{\theta} = -\underbrace{\frac{g}{L}}_{\omega^2}\theta$$

dove ω, da non confondersi con la velocità angolare, è legata al periodo T delle oscillazioni:

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega}}$$

Pendolo fisico



$$I\ddot{\theta} = -MgL\sin\theta$$

(I è il momento di inerzia rispetto al fulcro)

Per piccoli angoli: ($\theta \simeq 0$, $\sin\theta \simeq \theta$)

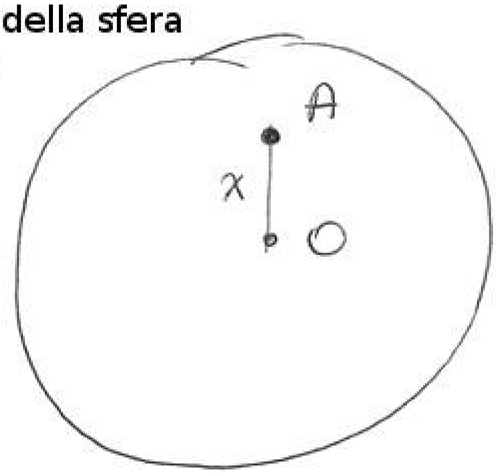
$$\ddot{\theta} = -\underbrace{\frac{MgL}{I}}_{\omega^2}\,\theta$$

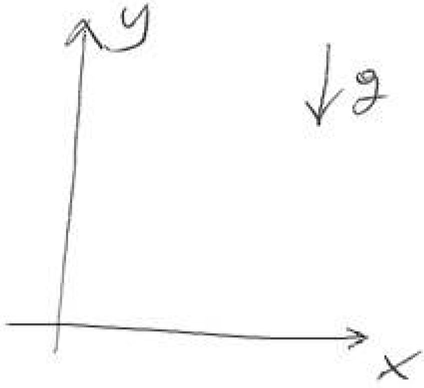
"Pendolo semplice" come caso particolare del pendolo fisico:

$$I = ML^2 \implies \omega^2 = \frac{\cancel{M}g\cancel{L}}{\cancel{M}L^{\cancel{2}}} = \frac{g}{L}$$

b) Calcolare a quale distanza x dal centro si deve porre un fulcro (con asse orizzontale), affinché sia minimo il periodo di piccole oscillazioni del cilindro intorno a tale fulcro.

O: CDM della sfera
A: fulcro

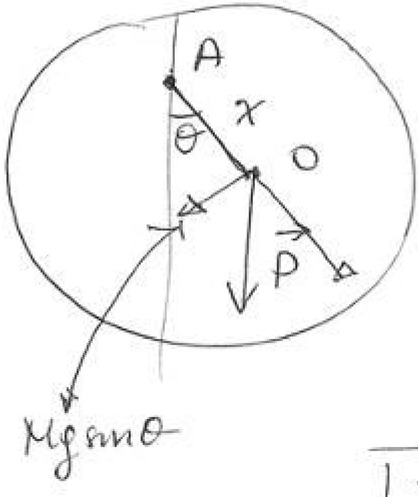




In precedenza abbiamo calcolato il momento di inerzia riferito ad un asse passante per O. Il nuovo asse non passa per O ma è parallelo all'asse precedente. Quindi:

$$I_A = I + Mx^2$$
$$= \frac{\pi \rho_0 R^3}{9}\left(4R^2 + 9x^2\right)$$

L'oggetto in esame è un pendolo fisico.



Seconda cardinale:

$$I_A \alpha = -Mg \sin\theta \, x$$

Piccole oscillazioni

$$\sin\theta \simeq \theta$$
$$\theta \simeq 0$$

$$\boxed{I_A \alpha = -Mgx\theta}$$

$$I\alpha = \ddot{\theta} \Rightarrow \boxed{\ddot{\theta} = -\underbrace{\frac{Mgx}{I_A}}_{=\omega^2}\theta}$$

Abbiamo trovato che:

$$\omega^2 = \frac{Mgx}{I_A} = \frac{9gx}{4R^2 + 9x^2}.$$

L'esercizio chiede di calcolare la distanza x tale per cui il periodo T è minimo. Per procedere alla risoluzione di questo problema, è utile fare alcune considerazioni preliminari.

1. ω è legata al periodo come segue:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

2. Poichè ω è inversamente proporzionale a T, allora:

$$\min_x T = \max_x \omega.$$

3. Poichè ω è una quantità positiva, allora:

$$\arg\max_x \omega = \arg\max_x \omega^2.$$

4. La distanza x appartiene all'intervallo $[0, R]$ per ovvie ragioni.
5. La funzione $\omega^2(x)$ è continua e derivabile nell'insieme chiuso $[0, R]$.
6. I massimi e minimi assoluti di una funzione continua e derivabile $f(x)$ nell'inseme $[a, b]$ possono essere i seguenti:
   - $x = a$
   - $x = b$
   - $x \in [a, b] : f'(x) = 0$

In base a quanto detto, possiamo calcolare il valore di x per cui il periodo T è minimo, cercando i massimi di ω^2. Per trovare tali massimi, possiamo evitare di scomodare il calcolo della derivata seconda. Infatti, basta trovare il valore di ω^2 per $x = 0$, per $x = R$ e per tutte le x tali per cui la sua derivata prima si annulla, e confrontare tali valori. Il valore più grande deve coincidere con il massimo assoluto sull'insieme $[0, R]$.

1) Calcolo $\omega^2(x=0) = 0$

2) Calcolo $\omega^2(x=R) = \dfrac{9g}{13R}$.

3) Calcolo $\dfrac{\partial \omega^2}{\partial x}$

$$\frac{\partial \omega^2}{\partial x} = \frac{9g(4R^2+9x^2) - 9gx \cdot 18x}{(4R^2+9x^2)^2}$$

$$= \frac{9g(4R^2+9x^2-18x^2)}{(4R^2+9x^2)^2}$$

$$= \frac{9g(4R^2-9x^2)}{(4R^2+9x^2)^2}.$$

$$\frac{\partial \omega^2}{\partial x} = 0 \Rightarrow 4R^2 - 9x^2 = 0$$

$$\Rightarrow x = \pm \frac{2R}{3} \Rightarrow x = \frac{2R}{3}.$$

$$\omega^2\left(x = \frac{2R}{3}\right) = \frac{3g}{4R}$$

x	ω^2
0	0
R	$\frac{9g}{13R}$
$\frac{2R}{3}$	$\frac{3g}{4R}$

$$\frac{3}{4} \overset{?}{>} \frac{9}{13}$$

$$3 \cdot 13 > 9 \cdot 4$$

$$39 > 36 \quad \text{ok}$$

$\Downarrow$

Per $x = \frac{2R}{3}$ ho
la massima ω e quindi
il minimo T.

$$T_{min} = \frac{4\pi}{3}\sqrt{\frac{3R}{g}} \qquad \left(T = \frac{2\pi}{\omega}\right)$$

c) In funzione di M, l e x, determinare nelle sue componenti la reazione vincolare sul fulcro, in un istante il cui la sfera ruota con una certa velocità angolare ed ha il baricentro alla stessa altezza del fulcro.

Prima di rispondere a quest'ultima domanda, è utile rinfrescare alcuni concetti relativi al moto circolare di un corpo.

Moto circolare

$$\vec{p} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \text{posizione}$$

$$\dot{\vec{p}} = \vec{v} \qquad \ddot{\vec{p}} = \dot{\vec{v}} = \vec{a}$$

$$\vec{p}(t) = R \begin{bmatrix} \cos \theta(t) \\ \sin \theta(t) \end{bmatrix}$$

Se $\theta(t) = \omega t$, si ha M. C. uniforme.

Se $\theta(t) \neq \omega t$, ho M. C. vario.

$$\dot{\vec{p}} = \vec{v} = R \begin{bmatrix} -\sin(\theta(t)) \cdot \theta'(t) \\ \cos(\theta(t)) \cdot \theta'(t) \end{bmatrix}$$

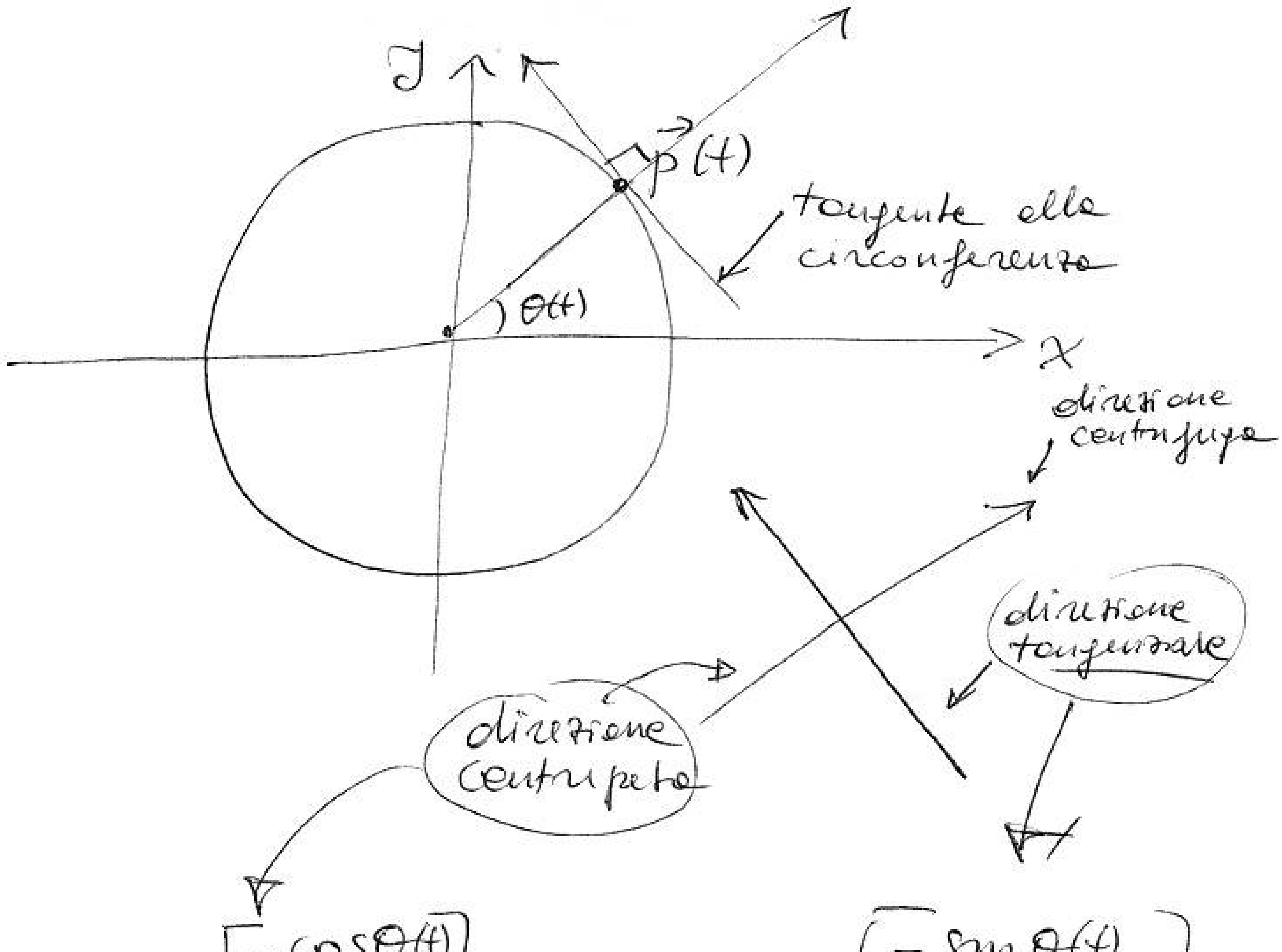
$$\ddot{\vec{p}} = \dot{\vec{v}} = \vec{a} = R \begin{bmatrix} -\cos(\theta(t))(\theta'(t))^2 - \sin(\theta(t))(\theta''(t)) \\ -\sin(\theta(t))(\theta'(t))^2 + \cos(\theta(t))\, \theta''(t) \end{bmatrix}$$

$$\vec{a} = -R(\theta'(t))^2 \begin{bmatrix} \cos\theta(t) \\ \sin\theta(t) \end{bmatrix} + R\theta''(t) \begin{bmatrix} -\sin\theta(t) \\ \cos\theta(t) \end{bmatrix}$$

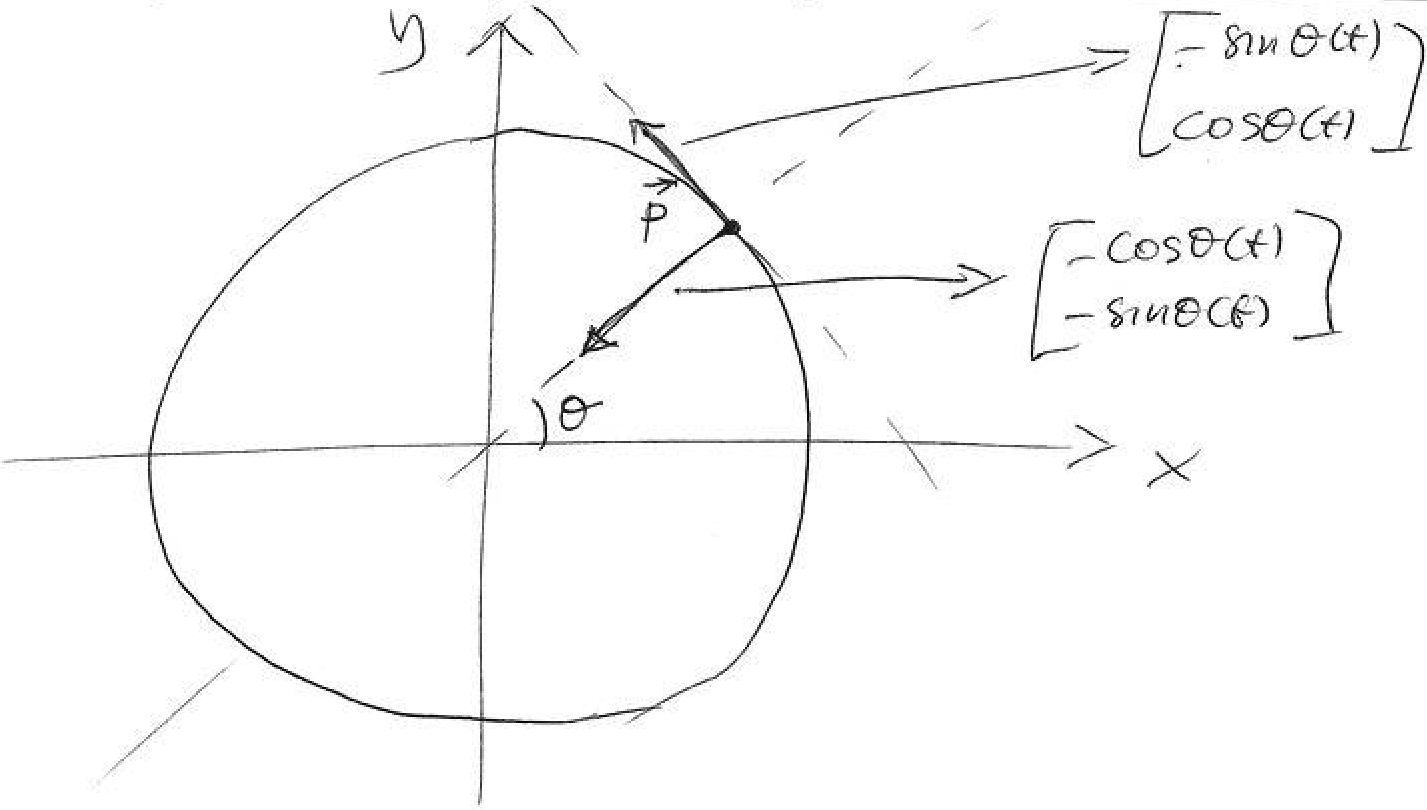
$$\omega(t) = \theta'(t)$$

$$\alpha(t) = \theta''(t)$$

$$\vec{a}(t) = -R\,\omega^2(t) \begin{bmatrix} \cos\theta(t) \\ \sin\theta(t) \end{bmatrix} + R\alpha(t) \begin{bmatrix} -\sin\theta(t) \\ \cos\theta(t) \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} -\cos\theta(t) \\ -\sin\theta(t) \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} -\sin\theta(t) \\ \cos\theta(t) \end{bmatrix}$$



$$\vec{a}(t) = \underbrace{R\omega^2(t)\begin{bmatrix} -\cos\theta(t) \\ -\sin\theta(t) \end{bmatrix}}_{\substack{\text{componente} \\ \text{centripeta}}} + \underbrace{R\alpha(t)\begin{bmatrix} -\sin\theta(t) \\ \cos\theta(t) \end{bmatrix}}_{\substack{\text{componente} \\ \text{tangenziale}}}.$$

$$\vec{a_C}(t) \quad + \quad \vec{a_T}(t)$$

Di conseguenza:

$$\boxed{\begin{aligned} |\vec{a_C}(t)| &= R\omega^2(t) \\ |\vec{a_T}(t)| &= R\alpha(t) \end{aligned}}$$

Acc. centripeta

Acc. tangenziale

NOTA - Se il moto è circolare ed uniforme, allora la velocità angolare ω è costante. Di conseguenza, l'accelerazione angolare α è nulla, e quindi anche l'accelerazione tangenziale lo è in base alla formula precedente! L'accelerazione centripeta invece è nulla solo negli istanti in cui la velocità angolare ω è nulla.
In conclusione, un moto circolare ha sempre accelerazione centripeta, e non necessariamente ha accelerazione tangenziale.
.

Alcune considerazioni

Consideriamo la prima cardinale per il centro di massa di un corpo:

$$M\vec{a} = \vec{F},$$

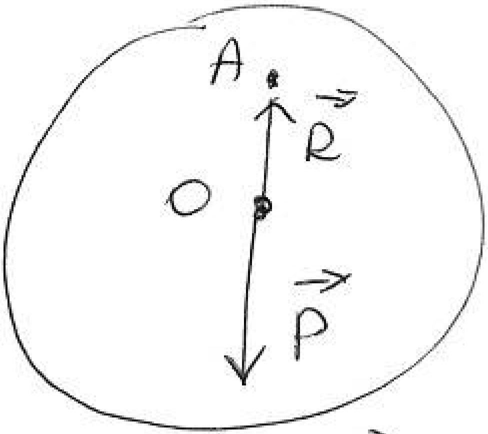
dove $\vec{F}$ rappresenta la somma di tutte le forze agenti sul centro di massa di un corpo. Se il centro di massa di tale corpo compie un moto circolare di raggio R, allora, in virtù dei risultati ottenuti in precedenza, si ha che:

$$M\vec{a}_C + M\vec{a}_T = \vec{F}.$$

Il termine $M\vec{a}_C$ viene chiamato "forza centripeta". Da notare che tale termine sta nella parte sinistra dell'equazione, non nella parte a destra! Ovvero, la forza centripeta non va considerata come una delle forze che agiscono sul centro di massa (cioè una delle forze che compongono $\vec{F}$). Essa invece è la componente in direzione centripeta della somma delle forze agenti $\vec{F}$.

Questa precisazione è fondamentale. Infatti, capita di dover risolvere problemi di statica (cioè problemi in cui $\vec{a} = 0$) che presentano una configurazione uguale a problemi in cui si assume che il corpo sia in moto circolare. Per questi ultimi, per quanto detto fin'ora, non è più vero che $\vec{a} = 0$, poichè è necessaria la presenza di una componente centripeta che garantisca il moto circolare.

Problema di statica.
Il corpo è fermo. Calcolare la reazione vincolare sul fulcro.



fermo $(\omega(t) \equiv 0)$

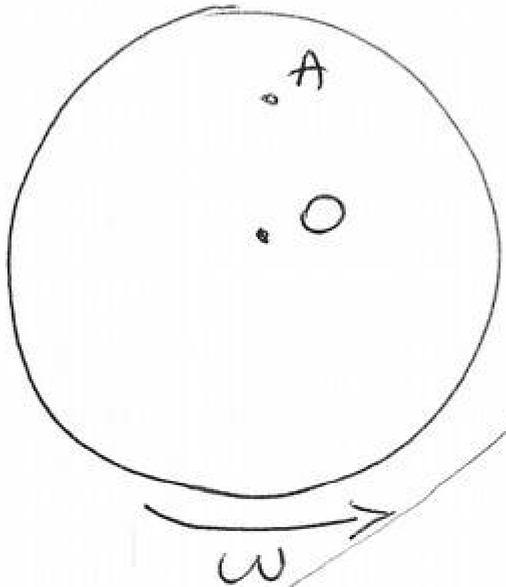
Trovare la reazione sul fulcro.

$$\vec{R} + \vec{P} = \vec{0} \quad \boxed{(\Leftarrow \vec{a} = \vec{0})}$$

$$\begin{bmatrix} R_x \\ R_y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -Mg \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} R_x = 0 \\ R_y = Mg \end{array}}$$

Manteniamo la stessa configurazione geometrica (cioè CDM allineato verticalmente al di sotto del fulcro) e supponiamo che il corpo sia in moto circolare.



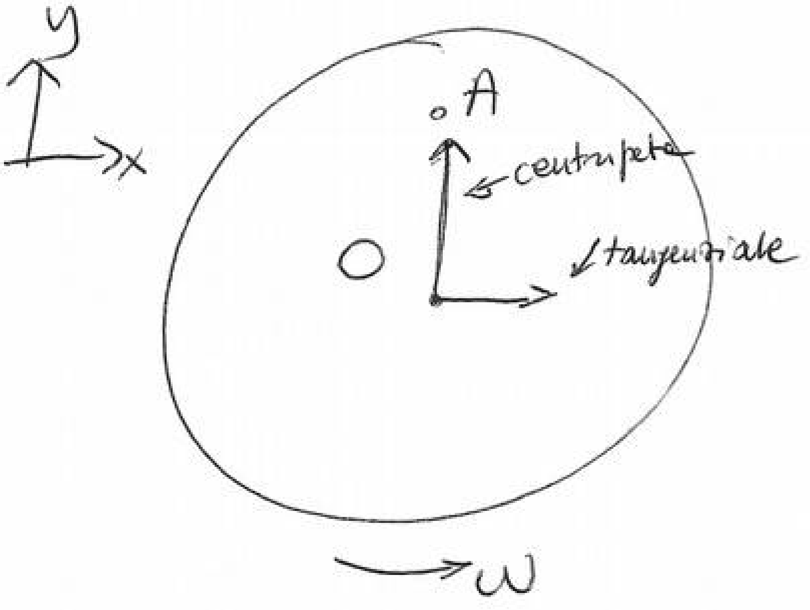
$$\omega(t) \neq 0$$

$$M\vec{a} = \vec{R} + \vec{P}$$

$$\vec{a} \neq 0$$

$$\vec{a} = \vec{a}_c + \vec{a}_T$$

$$M\vec{a} = M\vec{a}_c + M\vec{a}_T = \vec{R} + \vec{P}$$



Centripeta

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Tangenziale

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\cancel{M}\ \vec{a}_c \equiv \vec{a}_y$$

$$\vec{a}_T \equiv \vec{a}_x$$

$$|\vec{a_y}| = |\vec{a_c}| = R\omega^2$$

$$|\vec{a_x}| = |\vec{a_T}| = R\alpha$$

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} R\alpha \\ R\omega^2 \end{bmatrix}$$

$$M\vec{a} = \vec{P} + \vec{R}$$

$$\begin{bmatrix} MR\alpha \\ MR\omega^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -Mg \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_x \\ R_y \end{bmatrix}$$

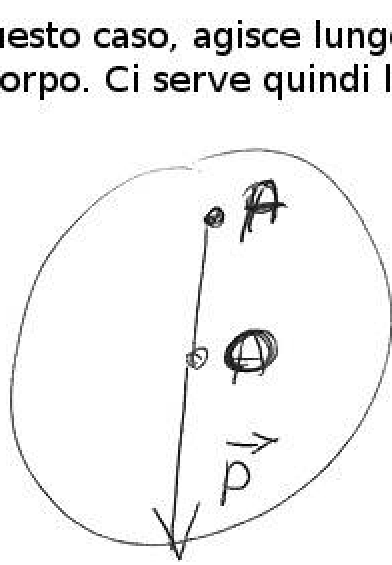
$$\boxed{\begin{cases} R_x = MR\alpha & \Rightarrow\ ?\alpha? \\ R_y = MR\omega^2 + Mg & \Rightarrow \text{OK} \end{cases}}$$

Per calcolare la componente tangenziale (che, in questo caso, agisce lungo x), è necessario conoscere l'accelerazione angolare del corpo. Ci serve quindi la seconda cardinale:

$$I\alpha = \tau$$

$$\Rightarrow I\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{R_x = 0}$$



Da notare che in questo caso nessuna forza produce momento!

Confrontiamo i risultati ottenuti nei due casi:

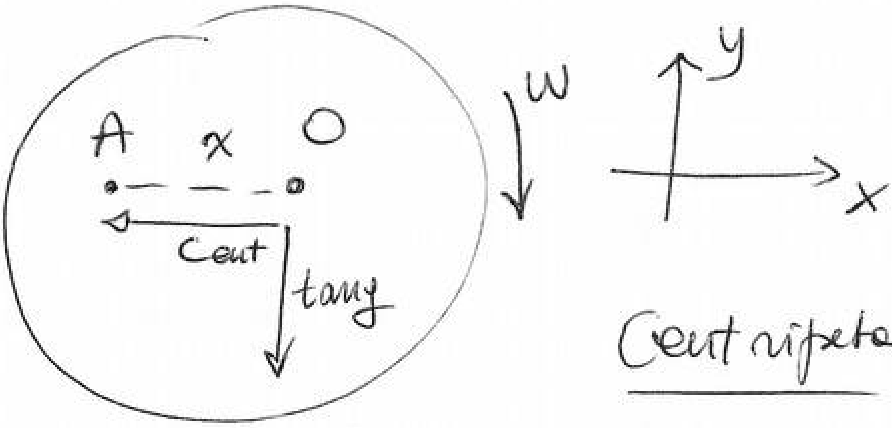
$$\vec{R} = \begin{bmatrix} 0 \\ MR\omega^2 + Mg \end{bmatrix} \qquad \vec{R} = \begin{bmatrix} 0 \\ Mg \end{bmatrix}$$

in rotazione   fermo.

La reazione vincolare è diversa! Essa ha "qualcosa" in più. Questo qualcosa serve a garantire la presenza di una forza centripeta, necessaria al moto circolare!

Da notare che se $\omega = 0$, le espressioni delle reazioni vincolari nei due casi corrispondono!!!

Consideriamo ora la configurazione prevista dal punto c del problema. Ovvero, si supponga che A ed O siano allineati orizzontalmente, e che il corpo sia in moto circolare.



Centripeta $\begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix}$

Tangenziale $\begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix}$

$$\vec{a} = \vec{a_c} + \vec{a_T}$$

$$\vec{a} = \begin{bmatrix}-|\vec{a_c}|\\ -|\vec{a_T}|\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-M\omega^2 x\\ -M\alpha x\end{bmatrix}$$

$$M\vec{a} = \vec{P} + \vec{R}$$

$$\begin{bmatrix}-M\omega^2 x\\ -M\alpha x\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ -Mg\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}R_x\\ R_y\end{bmatrix}$$

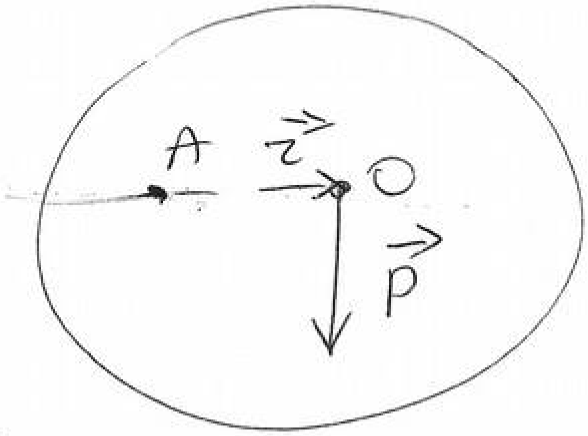
$$\boxed{R_x = -M\omega^2 x}$$

$$R_y = -M\alpha x + Mg$$

$?\alpha?$

Di nuovo, per calcolare la componente tangenziale, devo usare la seconda cardinale per trovare il valore dell'accelerazione angolare:

$$I_A \alpha = \tau$$



$$\tau = -Mgx$$

$$I_A \alpha = -Mgx$$

$$\alpha = -\frac{Mgx}{I_A}$$

$$\boxed{R_y = \frac{M^2 x^2 g}{I_A} + Mg}$$