

Corso di recupero di Fisica 2017/2018

Dario Madeo

Lezione del 13/04/2018

**Slides disponibili all'indirizzo
<http://www.dii.unisi.it/~madeo/crf/crf1718.html>**

In Fisica, trovano numerose applicazioni gli integrali doppi e tripli.

- Calcolo di masse
- Calcolo di cariche
- Calcolo dei CM
- Calcolo dei momenti di inerzia

Distribuzione di massa (o di carica)

2D $\sigma(x, y)$ $\left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^2} \right]$ $\left[\frac{\text{C}}{\text{m}^2} \right]$

3D $\rho(x, y, z)$ $\left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right]$ $\left[\frac{\text{C}}{\text{m}^3} \right]$



→ ~~con~~ massa e carica infinitesime.

$$M = \int dm$$

$$Q = \int dq$$

$\overset{2D}{dm} = \sigma(x, y) dx dy$
(dq)

$\overset{3D}{dm} = \rho(x, y, z) dx dy dz$
(dq)

2D

$$\sigma(x, y) dx dy$$



$$\int \sigma(r, \theta) r dr d\theta$$

Polar

$$\boxed{\sigma(r, \theta) r dr d\theta}$$

3D

$$\rho(x, y, z) dx dy dz$$



$$\int \rho(r, \theta, z) r dr d\theta dz$$

Cilindriche

$$\boxed{\rho(r, \theta, z) r dr d\theta dz}$$

Spesso abbiamo simmetria radiale
o cilindrica

$$2D \quad \sigma(r, \theta) = \sigma(r)$$

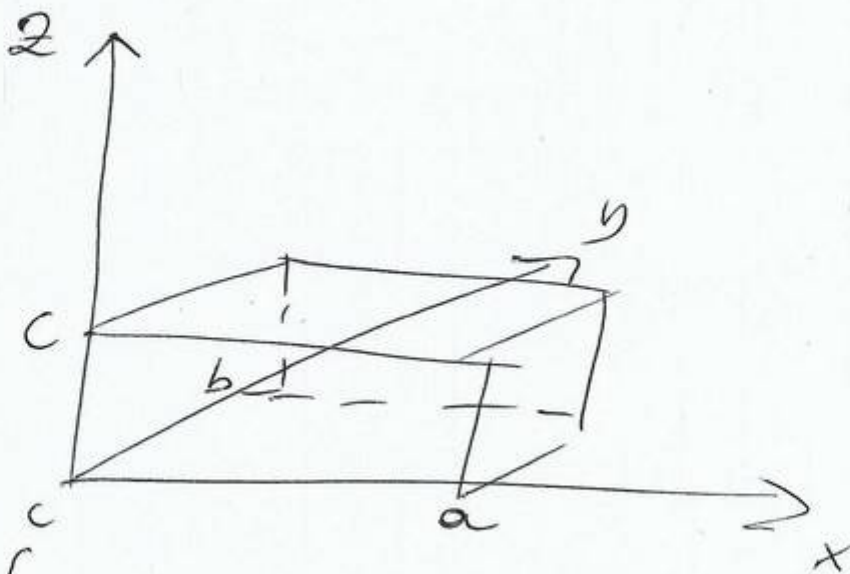
$$3D \quad \rho(r, \theta, z) = \rho(r)$$

NB Se $\sigma \equiv \text{costante}$

o $\rho \equiv \text{costante}$, allora ho simmetria radiale.

Per altri esempio sul calcolo del momento di inerzia, leggere le slides delle lezioni 4, 5, e 6 del CRF 2016/2017.

3D



$$M = \int_0^a \int_0^b \int_0^c \rho(x, y, z) dx dy dz$$

$(x) \quad (y) \quad (z)$

Cosa si fa per oggetti curvi?

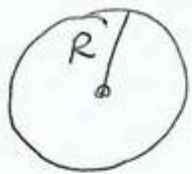
- Coordinate polari (2D)
- Coordinate cilindriche (3D)
- Coordinate sferiche (3D)

Polari

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

$$r \in I \subseteq [0; +\infty)$$

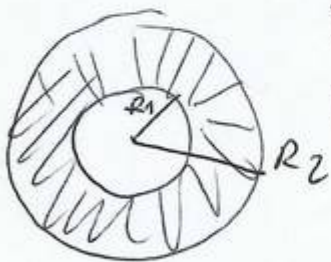
$$\theta \in J \subseteq [0; 2\pi]$$



$$\begin{aligned} r &\in [0; R] \\ \theta &\in [0; 2\pi] \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} r &\in [0; R] \\ \theta &\in [0; \alpha] \end{aligned}$$

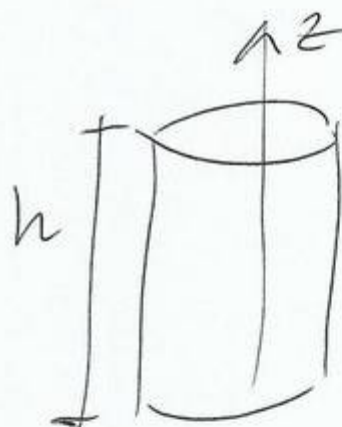


$$\begin{aligned} r &\in [R_1; R_2] \\ \theta &\in [0; 2\pi] \end{aligned}$$

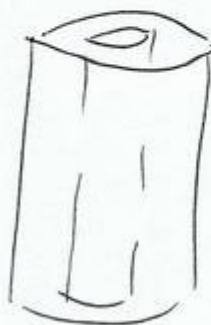
Cilindriche

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{cases}$$

$$r \in K$$



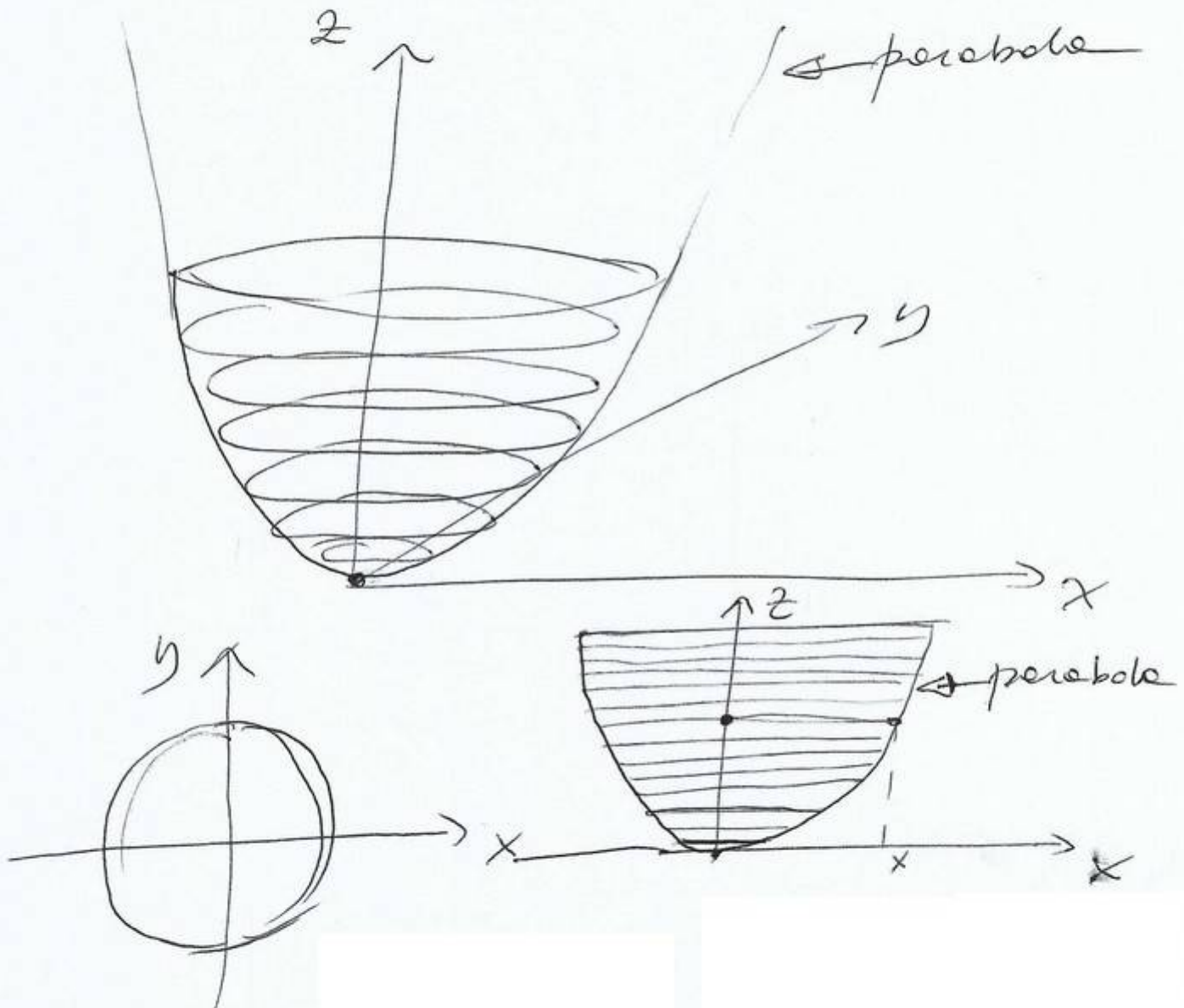
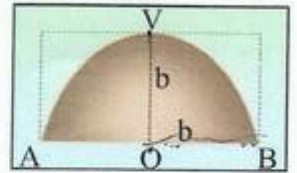
$$z \in [0; h]$$



Esercizio estratto dall'esame di Fisica 1 del 26 Gennaio 2018

Esercizio 2

La figura mostra un corpo di materiale omogeneo di densità ρ avente la forma di paraboloide di rotazione intorno a un asse verticale. V è il vertice del paraboloide e O è un punto dell'asse distante b da V . La sezione del paraboloide con il piano orizzontale passante da O è un cerchio di raggio b . Il paraboloide viene messo in rotazione intorno all'asse verticale OV mediante l'applicazione di un momento torcente dipendente dal tempo secondo la relazione $\tau(t) = \tau_0 (t/T)^2$ applicato nell'intervallo temporale fra 0 e T . Dopo aver calcolato la massa del corpo ed il suo momento d'inerzia I rispetto all'asse OV , stabilire quanto è il lavoro svolto complessivamente da chi esercita il momento τ .



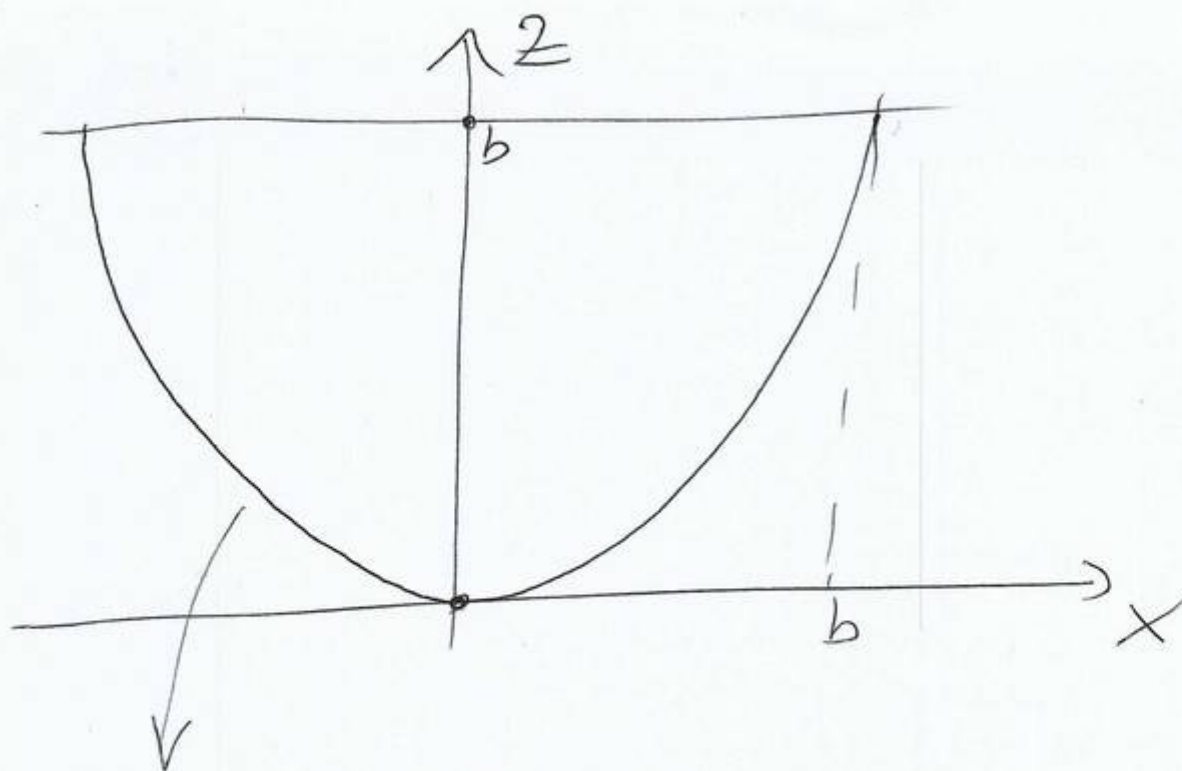
$$\begin{cases} x = r(z) \cos \theta \\ y = r(z) \sin \theta \\ z = z \end{cases}$$

NOTA BENE

In questo caso specifico, il raggio r dipende dalla quota z .

Coordinate cilindriche

Come trovo la relazione tra raggio e quota? Devo trovare l'equazione della parabola che genera il solido di rotazione!



$$z(x) = Ax^2 + Bx + C$$

$$z(0) = 0 \Rightarrow C = 0$$

$$\Rightarrow z(x) = Ax^2 + Bx$$

(la parabola passa per l'origine)

$$z'(x) = 2Ax + B$$

$$z'(0) = B = 0 \quad (\text{la derivata di una parabola nel suo vertice fa } 0)$$

$$\Rightarrow z(x) = Ax^2$$

(la parabola passa per il punto (b,b))

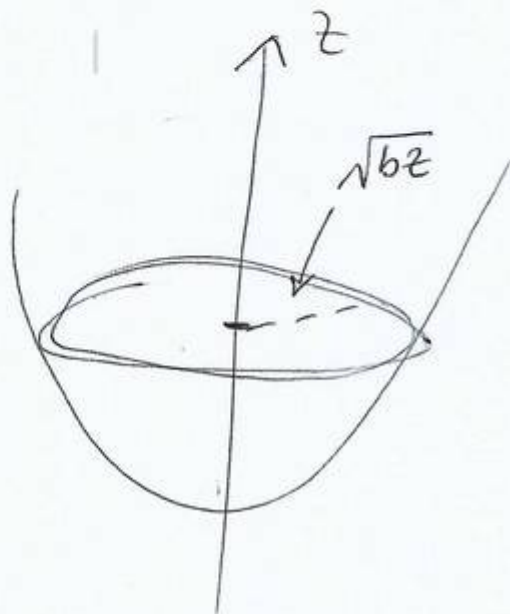
$$z(b) = b \Rightarrow Ab^2 = b \Rightarrow A = \frac{1}{b}$$

Da cui: $z(x) = \frac{x^2}{b}$

$$g(r) = \frac{r^2}{b}$$

$$\left| r = \pm \sqrt{bz} \right| \Rightarrow r_{\text{MAX}} = +\sqrt{bz}$$

Fissata la quota z , la circonferenza corrispondente ha raggio r_{max} . Per cui la variabile r va integrata da 0 ad r_{max} .



$$r \in [0; \sqrt{bz}]$$

$$\theta \in [0; 2\pi]$$

$$z \in [0; b]$$

$$M = \int dm = \iiint \rho(x, y, z) dx dy dz$$

$$= \iiint \rho(r, \theta, z) r dr d\theta dz$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^b \int_0^{\sqrt{bz}} \rho r dr dz d\theta$$

$\int_0^{2\pi} (\theta) \quad \int_0^b (z) \quad \int_0^{\sqrt{bz}} (r)$

$$= \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) \left(\int_0^b \int_0^{\sqrt{bz}} \rho r dr dz \right)$$

$$= 2\pi \int_0^b \int_0^{\sqrt{bz}} \rho r dr dz$$

$$= 2\pi \rho \int_0^b \int_0^{\sqrt{bz}} r dr dz$$

$$= 2\pi \rho \int_0^b \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^{\sqrt{bz}} dz$$

$$= 2\pi \rho \int_0^b \frac{bz}{2} dz = \pi \rho b \int_0^b z dz =$$

$$= \pi \rho b \left[\frac{z^2}{2} \right]_0^b = \boxed{\frac{\pi \rho b^3}{2}}$$

Centro di massa

$$x_{\text{CDM}} = \frac{1}{M} \iiint x \, dm (= 0)$$

$$y_{\text{CDM}} = \frac{1}{M} \iiint y \, dm (= 0)$$

$$z_{\text{CDM}} = \frac{1}{M} \iiint z \, dm$$

$$x \, dm =$$

$$= (z \cos \theta) (\rho r \, dr \, dz \, d\theta)$$

$$y \, dm =$$

$$= (z \sin \theta) (\rho r \, dr \, dz \, d\theta)$$

$$z \, dm =$$

$$= z (\rho r \, dr \, dz \, d\theta)$$

Il calcolo di x_{CDM} e di y_{CDM} sono lasciati per esercizio.

Tuttavia, per simmetria, si può dire che il centro di massa giace sull'asse z , e dunque $x_{\text{CDM}} = y_{\text{CDM}} = 0$.

$$z_{\text{COM}} = \frac{1}{M} \int_0^{2\pi} \int_0^b \int_0^{\sqrt{bz}} 2\rho z \, dz \, dz \, d\theta$$

$$= \frac{1}{M} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^b \int_0^{\sqrt{bz}} \rho z \, dz \, dz =$$

$$= \frac{2\pi\rho}{M} \int_0^b \int_0^{\sqrt{bz}} z \, dz \, dz =$$

$$= \frac{2\pi\rho}{M} \int_0^b z \left[\frac{z^2}{2} \right]_0^{\sqrt{bz}} dz$$

$$= \frac{2\pi\rho}{M} \int_0^b \frac{z b z}{2} dz$$

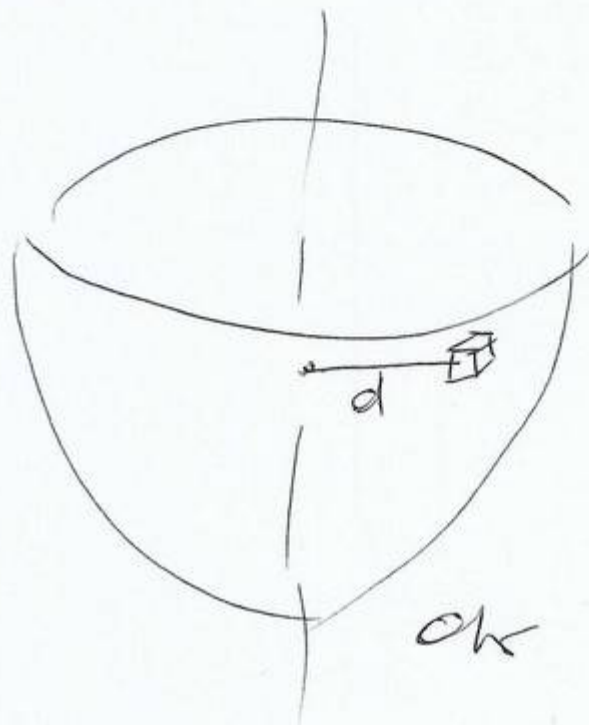
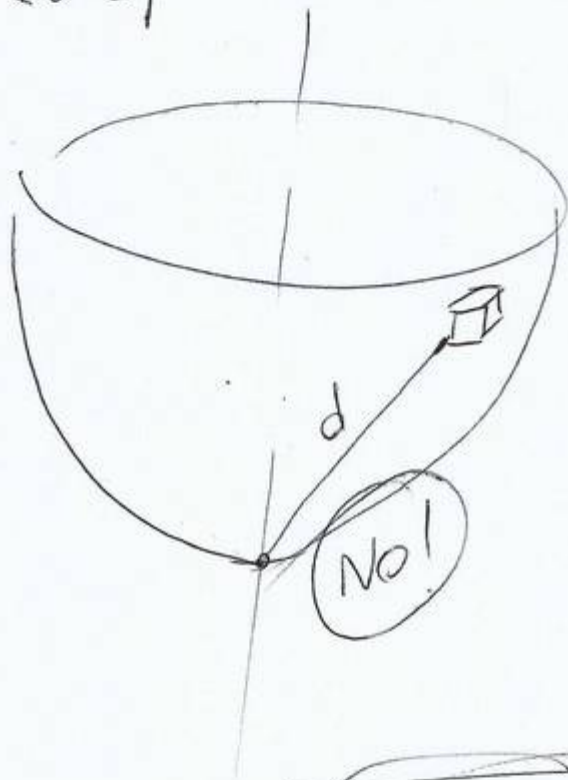
$$= \frac{\pi\rho b}{M} \int_0^b z^2 dz = \frac{\pi\rho b}{M} \left[\frac{z^3}{3} \right]_0^b =$$

$$= \frac{\pi\rho b^4}{3M}$$

Momento di inerzia

$$I = \int d^2 dm$$

d : distanza di una generica massa dm rispetto all'asse di rotazione -



$$d = r$$

↑
simmetrie cilindriche



$$I = \int_0^{2\pi} \int_0^b \int_0^{\sqrt{bz}} z^2 \rho r dr dz d\theta$$

$$= \rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^b \int_0^{\sqrt{bz}} z^3 dr dz$$

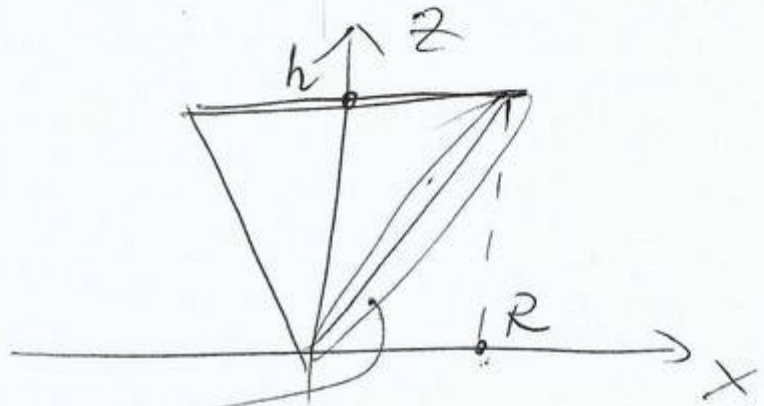
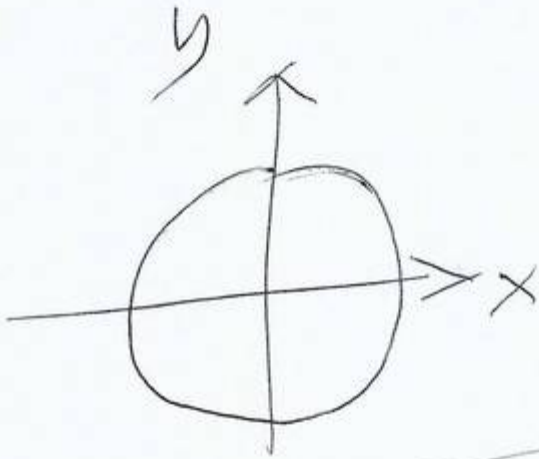
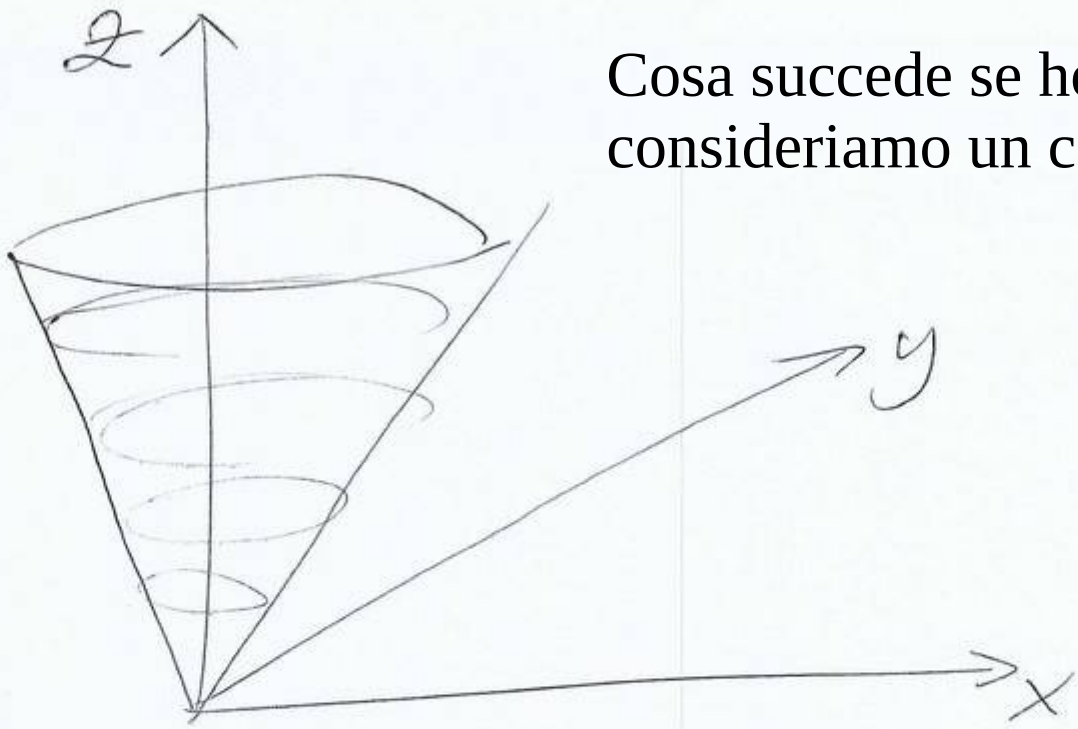
$$= \cancel{\rho 2\pi} \int_0^b \int_0^{\sqrt{bz}} z^3 dr dz$$

$$= \rho 2\pi \int_0^b \left[\frac{z^4}{4} \right]_0^{\sqrt{bz}} dz$$

$$= \rho 2\pi \int_0^b \frac{b^2 z^2}{4} dz = \frac{\rho \pi b^2}{2} \int_0^b z^2 dz =$$

$$= \frac{\rho \pi b^2}{2} \left[\frac{z^3}{3} \right]_0^b = \frac{\rho \pi b^5}{6}$$

Cosa succede se ho
consideriamo un cono?



$$z(x) = mx + q$$

La retta passa per l'origine $\Rightarrow q=0$

$$z(R) = h \quad (\text{la retta passa per il punto } (R, h))$$

$$Rm + h \Rightarrow m = \frac{h}{R}$$

$$z(x) = \frac{hx}{R} \Rightarrow \boxed{z(x) = \frac{hx}{R}}$$

26 gennaio 2018

I

$$\tau(t) = \tau_0 \frac{t^2}{T^2}$$

Questo momento torcente viene applicato sul corpo per $t \in [0; T]$

Calcolare il lavoro

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

$$\boxed{W = \int \vec{\tau} \cdot d\vec{\theta}}$$

$$W = \int \tau d\theta$$

$$\tau_{\max} = \frac{Rz}{h} \quad \Leftarrow \text{ho calcolato } \tau_{\max} \text{ in funzione di } z.$$

$$\tau \in \left[0; \frac{R}{h} z\right]$$

$$z \in [0; h]$$

$$\theta \in [0; 2\pi]$$

$$\boxed{\rho(\tau) = \rho_0 \tau^3}$$

Per esercizio, verificare che:

$$\bullet \quad M = \frac{\pi \rho_0 R h^5}{15}$$

$$\bullet \quad I = \frac{\pi \rho_0 R h^7}{28}$$

$$\bullet \quad x_{CDM} = 0$$

$$\bullet \quad y_{CDM} = 0$$

$$\bullet \quad z_{CDM} = \frac{6}{7}h$$

Calcolare il lavoro compiuto dal momento torcente $\tau(t) = \tau_0 \frac{t^2}{T^2}$ applicato al paraboloide per $t \in [0, T]$. Il paraboloide inizialmente è fermo.

Possiamo calcolare il lavoro calcolando la variazione di energia cinetica del paraboloide nell'intervallo di tempo $[0, T]$. Infatti, se W è il lavoro e $K(t)$ è l'energia cinetica all'istante t , allora:

$$W = K(T) - K(0).$$

Per calcolare l'energia cinetica ad ogni istante t , si deve risolvere la seguente equazione differenziale:

$$I \frac{d\omega(t)}{dt} = \tau(t) \Rightarrow \frac{d\omega(t)}{dt} = \frac{1}{I} \tau(t),$$

con condizione iniziale $\omega(0) = 0$.

Ricordando che:

$$\frac{df(x)}{dx} = g(x) \Rightarrow f(x) = \int_0^x g(s)ds + f(0),$$

si ha che:

$$\omega(t) = \frac{1}{I} \int_0^t \tau(s)ds + \omega(0) = \frac{\tau_0}{IT^2} \int_0^t s^2 ds + 0 = \frac{\tau_0 t^3}{3IT^2}.$$

Da cui si ricava che:

$$\omega(T) = \frac{\tau_0 T}{3I},$$

e

$$K(T) = \frac{1}{2} I \omega^2(T) = \frac{\tau_0^2 T^2}{18I}.$$

In conclusione:

$$W = K(T) - K(0) = \frac{\tau_0^2 T^2}{18I}.$$

Esercizio estratto dall'esame di Fisica 1 del 18 Aprile 2008

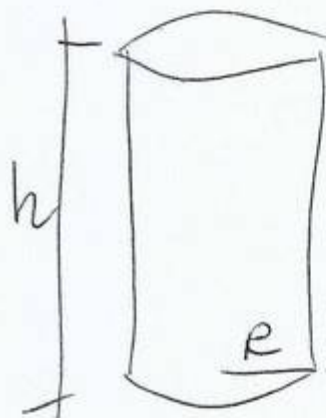
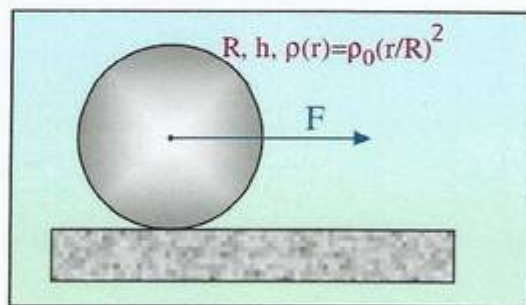
Esercizio 2

Un cilindro di raggio R e altezza h ha una densità che dipende dalla distanza dall'asse r secondo la legge $\rho(r) = \rho_0(r/R)$. Calcolare:

- a) la massa del cilindro e b) il momento d'inerzia del cilindro.

Tale cilindro è inizialmente fermo su un piano orizzontale ed è sottoposto a una forza costante F parallela al piano e perpendicolare all'asse del cilindro, la quale è applicata a tale asse. Indicando eventualmente con M e con I le grandezze richieste nei punti precedenti, determinare:

- c) lo spazio percorso in un tempo Δt nell'ipotesi che strisci senza rotolare;
 d) lo spazio percorso dal cilindro in un tempo Δt nell'ipotesi che esso rotoli senza strisciare;
 e) la quantità di moto del cilindro quando il suo centro di massa si è spostato di Δs , nelle due ipotesi.



$$\begin{aligned} r &\in [0; R] \\ \theta &\in [0; 2\pi] \\ z &\in [0; h] \end{aligned}$$

A differenza dei casi visti in precedenza, stavolta l'intervallo per r non dipende dalla quota z .

$$M = \int_0^{2\pi} \int_0^h \int_0^R \rho_0 \frac{r^2}{R^2} r \, dr \, dz \, d\theta$$

$$= \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) \left(\int_0^h dz \right) \left(\int_0^R \rho_0 \frac{r^3}{R^2} dr \right)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{2\pi h \rho_0}{R^2} \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^R = \frac{\pi h \rho_0 R^4}{2 R^2} = \\ &= \left[\frac{\pi h \rho_0 R^2}{2} \right] \end{aligned}$$

Per esercizio, verificare che:

- $I = \frac{\pi \rho_0 R^4 h}{3}$

- $x_{CDM} = 0$

- $y_{CDM} = 0$

- $z_{CDM} = \frac{1}{2}h$