Corso di recupero di Fisica 2017/2018

Dario Madeo

Lezione del 23/03/2018

Slides disponibili all'indirizzo
http://www.dii.unisi.it/~madeo/crf/crf1718.html

Momento di inerzia

$I \quad [kg \cdot m^2]$

$$\boxed{\tau = I \alpha}$$

$[N \cdot m]$

$\left[\frac{1}{s^2}\right]$

Dipende dalla massa e dalla geometria del corpo, nonché anche dalla posizione del fulcro.

Alcune considerazioni

Come già discusso nella precedente lezione, il momento torcente è un vettore $\vec{\tau} \in \mathbb{R}^3$. Ogni componente si riferisce al momento torcente applicato intorno ad uno degli assi coordinati.

Similmente, anche l'accelerazione angolare è un vettore $\vec{\alpha} \in \mathbb{R}^3$. Ogni componente si riferisce all'accelerazione angolare intorno ad uno degli assi coordinati.

L'equazione che lega momento torcente ed accelerazione angolare è dunque un'equazione vettoriale:

$$\vec{\tau} = \mathbf{I}\vec{\alpha},$$

dove $\mathbf{I} \in \mathbb{R}^{3\times3}$ è una matrice chiamata **tensore d'inerzia**. Tale matrice contiene informazioni su come il corpo si oppone alla rotazione rispetto a tutti gli assi coordinati.

Tuttavia, nel 99.99% degli esercizi da risolvere per superare gli esami di Fisica 1 e Fisica 2, le rotazioni avvengono **solo** lungo un asse coordinato. Dunque, è sufficiente conoscere il momento di inerzia di quel corpo rispetto all'asse di rotazione previsto dall'esercizio. In questo caso, il momento di inerzia da considerarsi è un elemento del tensore di inerzia, ovvero è uno scalare (chiamiamolo I). Pertanto, considerando solo la componente del momento torcente relativa all'asse di rotazione (chiamiamola τ), e la componente dell'accelerazione angolare relativa allo stesso asse (chiamiamola α), è possibile semplificare l'equazione vettoriale, considerando solo la componente di interesse, ottenendo dunque:

$$\tau = I\alpha.$$

Centro di massa - caso discreto

Il centro di massa o baricentro di un sistema è il punto geometrico corrispondente al valor medio della distribuzione della massa del sistema nello spazio.

Prima di calcolare il centro di massa, è necessario distinguere tra **sistemi discreti** e **sistemi continui**. I primi sono costituiti da un numero finito di masse, i secondi invece sono formati da un'infinità di masse infinitesime. Da notare che il caso discreto ammette la presenza, tra il gruppo finito di masse prese in considerazione, anche masse che a loro volta sono sistemi continui.

Il calcolo del centro di massa per sistemi continui richiede l'uso di integrali, e sarà oggetto di prossime lezioni. Per quanto riguarda il caso discreto, consideriamo innanzitutto N corpi **puntiformi** (vedremo che questa assunzione può essere rilassata), indicizzati con $i = \{1, 2, \ldots, N\}$. Ogni corpo i è caratterizzato da:

- la massa m_i;
- la posizione nello spazio

  $$\vec{p}_i = \begin{bmatrix} p_{i,x} \\ p_{i,y} \\ p_{i,z} \end{bmatrix},$$

  dove $p_{i,x}$, $p_{i,y}$ e $p_{i,z}$ rappresentano le coordinate s.

Il centro di massa del sistema di corpi è un vettore

$$\vec{c} = \begin{bmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{bmatrix},$$

le cui componenti sono le seguenti:

$$c_x = \frac{\sum\limits_{i=1}^{N} m_i p_{i,x}}{\sum\limits_{i=1}^{N} m_i}, c_y = \frac{\sum\limits_{i=1}^{N} m_i p_{i,y}}{\sum\limits_{i=1}^{N} m_i}, c_z = \frac{\sum\limits_{i=1}^{N} m_i p_{i,z}}{\sum\limits_{i=1}^{N} m_i}.$$

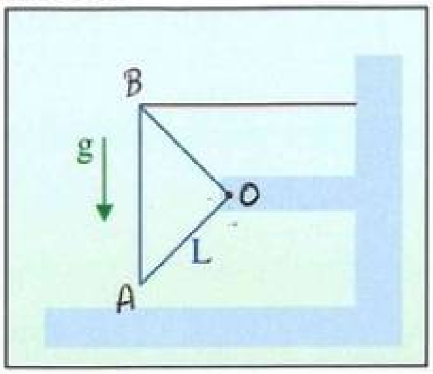
Se si considera un sistema di N corpi non assimilabili a punti materiali (si veda ad esempio la cornice a forma di triangolo, oggetto dell'esercizio risolto nelle slides successive), la situazione non cambia. Anche in questo caso è possibile calcolare il centro di massa utilizzando le equazioni riportate in precedenza, a patto di considerare il vettore $\vec{p}_i$ pari al centro di massa del corpo i-esimo.

Importanza del centro di massa

Se si considera il sistema di N corpi come un oggetto unico, ed ogni corpo è soggetto ad una o più forze esterne, allora il centro di massa $\vec{c}$ ha lo stesso moto di un singolo punto materiale in cui viene concentrata tutta la massa del sistema, e su cui agisce la risultante delle sole forze esterne agenti sul sistema.

Esercizio estratto dall'esame di Fisica 1 del 21 Luglio 2010

Esercizio 1



Si ha una cornice a forma di triangolo rettangolo isoscele. I lati uguali hanno lunghezza L, e tutti i lati hanno densità lineare di massa λ. La cornice è imperniata sull'angolo retto ad un asse orizzontale. Perciò essa ruoterebbe su un piano verticale, se non fosse tenuta in posizione da una corda ideale (inestensibile e di massa trascurabile) applicata come in figura e disposta orizzontalmente.

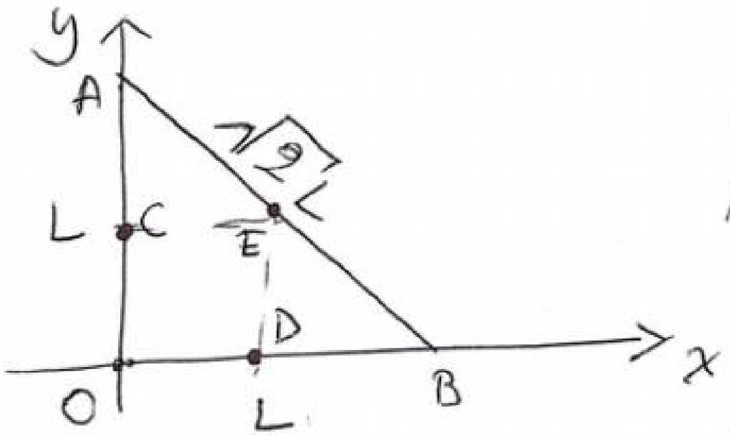
a) Calcolare la massa totale M della cornice e la distanza D fra baricentro e perno, nonché il suo momento d'inerzia I rispetto all'asse del perno.

b) La tensione della corda;

Utilizzando i simboli M, D, I definiti al punto a) esprimere

c) l'accelerazione angolare α che avrebbe la cornice quando, essendosi rotta la corda, avesse iniziato a ruotare e avesse raggiunto la posizione in cui un cateto è orizzontale e l'altro verticale (si chiede α all'istante in cui passa da tale configurazione);

d) la velocità angolare massima raggiunta dalla cornice, dopo la rottura della corda.



$$m_{OA} = \lambda L$$

$$m_{OB} = \lambda L$$

$$m_{AB} = \lambda\sqrt{2}\,L$$

$$\Downarrow$$

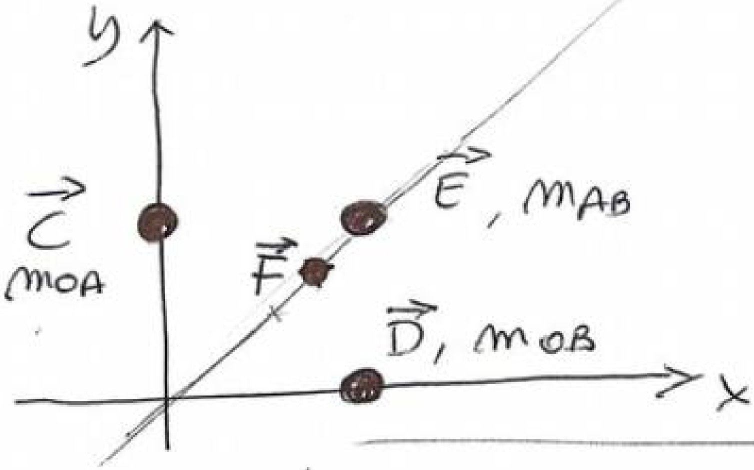
$$M = m_{OA} + m_{OB} + m_{AB}$$

$$\boxed{M = \lambda L (2+\sqrt{2})}$$

Il CDM del triangolo lo posso calcolare come il CDM di un oggetto composto da 3 corpi (≡ i 3 lati del triangolo).

Per fare ciò, devo conoscere il CDM di ognuno di questi 3 corpi.

$$\vec{C} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{L}{2} \end{bmatrix} \quad \vec{D} = \begin{bmatrix} \frac{L}{2} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \vec{E} = \begin{bmatrix} \frac{L}{2} \\ \frac{L}{2} \end{bmatrix}$$



$\vec{C}$, $\vec{D}$ e $\vec{E}$ sono i centri di massa dei 3 lati del triangolo. Posso considerare i 3 lati come se fossero 3 corpi puntiformi, la cui massa è concentrata nel loro centro di massa.

Poichè i 3 lati sono omogenei (sono caratterizzati da una densità di massa lineare costante), allora i loro centri di massa corrispondono con i punti medi dei lati stessi.

$\vec{F}$ è il centro di massa di tutta la cornice.

$$\vec{F} = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \end{bmatrix}$$

$$F_x = \frac{m_{OA} \cdot C_x + m_{OB} \cdot D_x + m_{AB} \cdot E_x}{m_{OA} + m_{OB} + m_{AB}}$$

$$F_y = \frac{m_{OA} \cdot C_y + m_{OB} D_y + m_{AB} E_y}{m_{OA} + m_{OB} + m_{AB}}$$

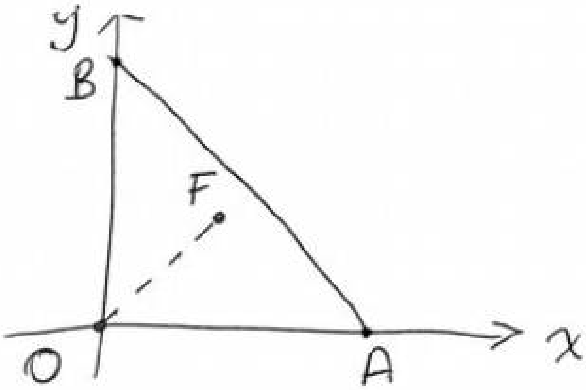
$$\vec{F} = \begin{bmatrix} \frac{L(1+\sqrt{2})}{2(2+\sqrt{2})} \\ \frac{L(1+\sqrt{2})}{2(2+\sqrt{2})} \end{bmatrix}$$

Nota che

$$\frac{L}{2}\frac{(1+\sqrt{2})}{(2+\sqrt{2})} = \frac{L}{2}\frac{(1+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})} =$$

$$= \frac{L}{2}\frac{2-\sqrt{2}+2\sqrt{2}-2}{4-2} = \frac{L}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{L}{4}\sqrt{2}.$$

$$\vec{F} = \begin{bmatrix} \frac{L}{4}\sqrt{2} \\ \frac{L}{4}\sqrt{2} \end{bmatrix}$$



$\overline{OF}$: distanza tra fulcro e CDM

$$\overline{OF} = \sqrt{(O_x - F_x)^2 + (O_y - F_y)^2} = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{L}{4}\sqrt{2}\right)^2 + \left(\frac{L}{4}\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{2\,\frac{L^2}{16}\cdot 2} =$$

$$= \frac{L}{2}.$$

Momento di inerzia - Alcune considerazioni

Come detto in precedenza, il momento di inerzia di un corpo misura l'inerzia del corpo stesso al variare della sua velocità angolare, in riferimento ad un certo asse di rotazione. Il calcolo esplicito sarà oggetto delle prossime lezioni, e risulta molto utile quando si deve calcolare il momento di inerzia di corpi "particolari" (ad esempio paraboloidi, o corpi non omogenei).

Invece, il valore dei momenti di inerzia di alcuni corpi "standard" sono risultati da imparare a memoria o da riportare sul formulario ammesso durante l'esame. Ad esempio, per l'esercizio svolto, è utile sapere che:

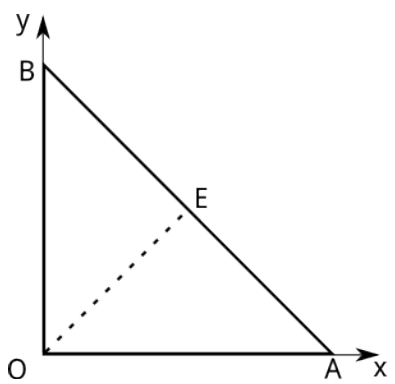
- il momento di inerzia di una sbarretta omogenea di massa M e lunghezza L intorno ad un asse parallelo alla sbarretta e passante per il suo centro di massa è:

$$I = \frac{1}{12} M L^2. \tag{1}$$

- il momento di inerzia di una sbarretta omogenea di massa M e lunghezza L intorno ad un asse parallelo alla sbarretta e passante per uno dei suoi estremi è:

$$I = \frac{1}{3} M L^2. \tag{2}$$

La cornice triangolare oggetto dell'esercizio svolto (vedi figura sotto), è composta da 3 sbarrette omogenee di diversa massa e lunghezza.



Essa può ruotare intorno ad un asse di rotazione parallelo all'asse z (perpendicolare al foglio) e passante per il punto O.

Il momento di inerzia dei due cateti (lati OA ed OB) rispetto a questo asse di rotazione si ricava utilizzando la formula (1):

$$I_{cateto,O} = \frac{1}{3} M_{cateto,O} L^2_{cateto,O} = \frac{1}{3} \lambda L L^2 = \frac{\lambda L^3}{3}.$$

Invece, per quanto riguarda l'ipotenusa, non abbiamo a disposizione formule "immediate" per calcolare il momento di inerzia rispetto a quell'asse di rotazione. Infatti, tale asse non passa nè per il centro di massa E, nè per un estremo dell'ipotenusa.

Perchè vogliamo calcolare il momento di inerzia rispetto a quell'asse di rotazione? Perchè per trovare il momento di inerzia della cornice, è possibile sommare i momenti di inerzia delle delle 3 sbarrette, **a patto che tutti i momenti di inerzia siano riferiti allo stesso asse di rotazione passante per lo stesso punto!** Sommare momenti di inerzia di diversi corpi calcolati per assi di rotazione diversi, o passanti per punti distinti, è un errore!

Come possiamo calcolare il momento di inerzia dell'ipotenusa rispetto a quell'asse di rotazione? Per questo calcolo ci viene in aiuto il **teorema di Huygens-Steiner**.

Prima calcoliamo il momento di inerzia dell'ipotenusa (lato AB) rispetto ad un asse di rotazione parallelo all'asse z (e quindi, parallelo alla sbarretta stessa) e passante per il suo centro di massa (punto E):

$$I_{ipotenusa,CDM} = \frac{1}{12} M_{ipotenusa} L^2_{ipotenusa} = \frac{1}{12}\lambda\sqrt{2}L(\sqrt{2}L)^2 = \frac{\lambda\sqrt{2}L^3}{6}.$$

Il teorema di Huygens-Steiner mi permette di ricavare il momento di inerzia del corpo rispetto ad un asse di rotazione parallelo al precedente, ma passante per un punto diverso dal centro di massa (in questo caso, il punto O):

$$I_{ipotenusa,O} = I_{ipotenusa,CDM} + d(O,E)^2 M_{ipotenusa},$$

dove $d(O,E)$ è pari alla distanza tra il punto O ed il centro di massa E dell'ipotenusa. Ricordando che le coordinate del punto E sono $E_x = E_y = \frac{L}{2}$, si ha che:

$$\begin{aligned} d(O,E) &= \sqrt{(O_x - E_x)^2 + (O_y - E_y)^2} \\ &= \sqrt{\left(0 - \frac{L}{2}\right)^2 + \left(0 - \frac{L}{2}\right)^2} \\ &= L\frac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

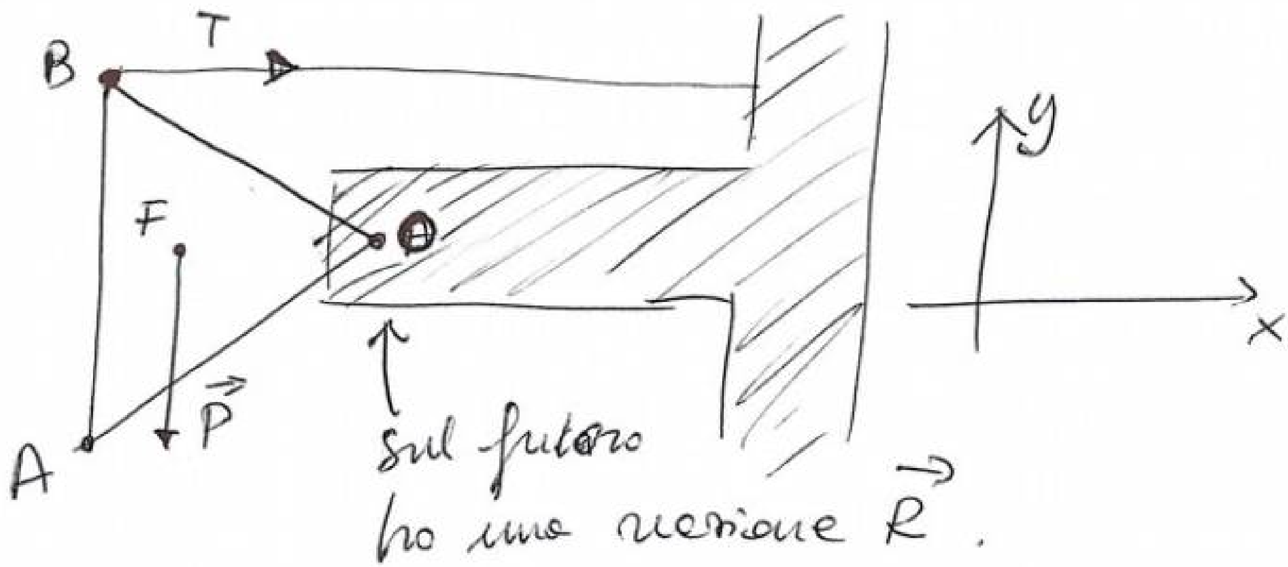
Si ottiene quindi che:

$$\begin{aligned} I_{ipotenusa,O} &= \frac{\lambda\sqrt{2}L^3}{6} + \left(L\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \lambda\sqrt{2}L \\ &= \frac{\lambda\sqrt{2}L^3}{6} + \frac{\lambda\sqrt{2}L^3}{2} \\ &= \frac{\lambda 2\sqrt{2}L^3}{3}. \end{aligned}$$

A questo punto, possiamo calcolare la somma del momento di inerzia totale del triangolo rispetto all'asse passante per il punto O:

$$I = I_{cateto,O} + I_{cateto,O} + I_{ipotenusa,O} = \frac{\lambda 2L^3}{3}(1 + \sqrt{2})$$

Diagramma delle forze



$$\vec{T} = \begin{bmatrix} T_x \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \vec{P} = \begin{bmatrix} 0 \\ -Mg \end{bmatrix} \qquad \vec{R} = \begin{bmatrix} R_x \\ R_y \end{bmatrix}$$

Statica

La somma delle forze deve fare 0.

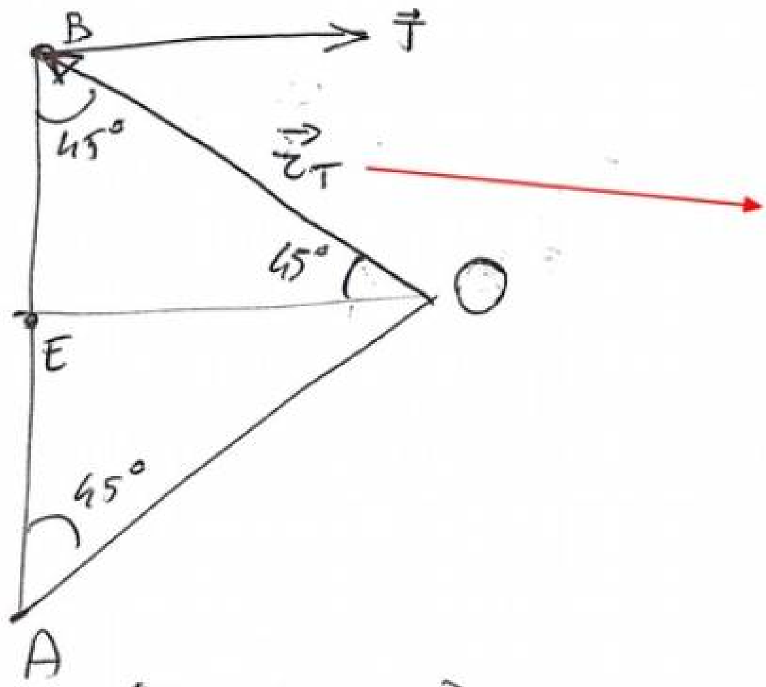
$$\vec{T} + \vec{P} + \vec{R} = \vec{0}$$

$$\begin{cases} T_x + R_x = 0 \\ -Mg + R_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R_x = -T_x \\ R_y = Mg \end{cases}$$

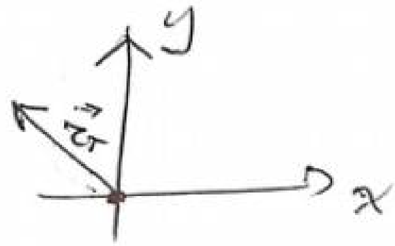
La somma dei momenti delle forze rispetto all'asse di rotazione de fare 0.

$$\sum_i \vec{\tau}_i = \vec{0}$$

Momento torcente provocato dalla tensione sul filo



Raggio vettore:



$$\vec{r}_T = L \begin{bmatrix} -\cos 45° \\ +\sin 45° \end{bmatrix} = L \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

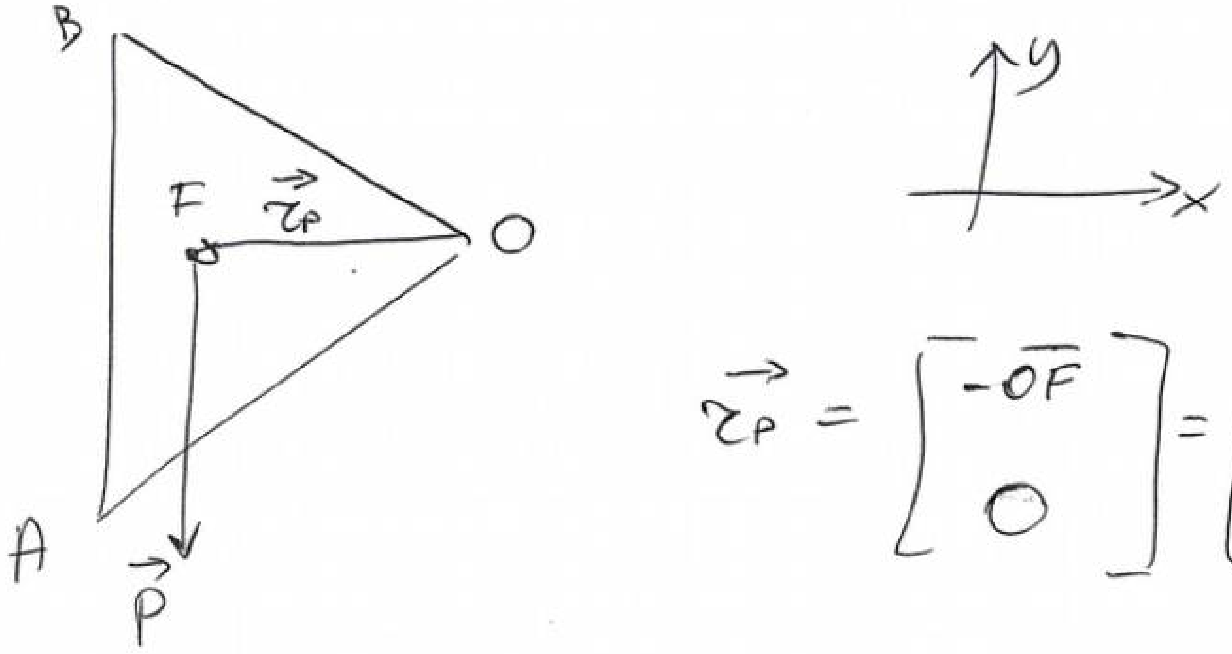
$$\vec{\tau} = \vec{r}_T \times \vec{T}$$

$\Downarrow$

la componente $z = \underbrace{\cancel{r_x T_y}}_{0} - r_y T_x$

$$= -L \frac{\sqrt{2}}{2} T_x < 0$$

Momento torcente provocato dalla forza peso



$$\vec{r}_P = \begin{bmatrix} -\overline{OF} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{L}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\tau_z = \left(-\frac{L}{2}\right)\left(-Mg\right) = \frac{MgL}{2} > 0$$

Statica

$$-L\frac{\sqrt{2}}{2}T_x + \frac{MgL}{2} = 0 \implies$$

$$\frac{Mg\cancel{L}}{\cancel{2}} = \cancel{L}\frac{\sqrt{2}T_x}{\cancel{2}}$$

$$\boxed{T_x = \frac{Mg}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}\,Mg}{2}.}$$

Soluzione alla domanda
b dell'esercizio

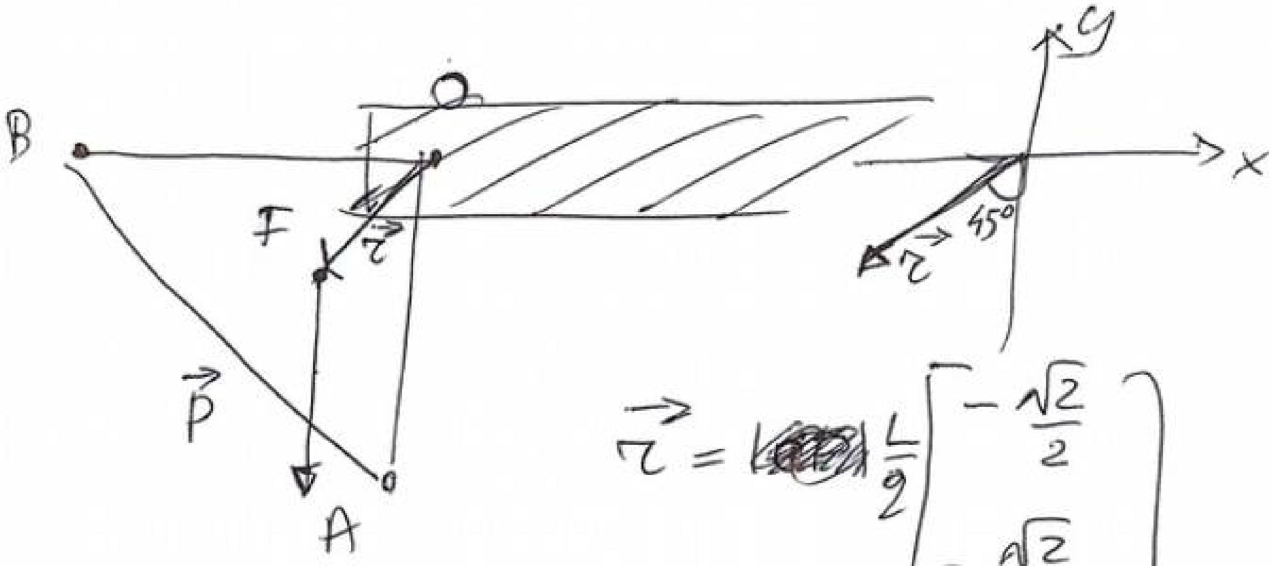
Punto c dell'esercizio

La fune si è rotta, e dunque non è più presente la tensione. Rimangono solo la forza peso e la reazione vincolare sul fulcro.

Il testo del punto c ci dice che il corpo si sta muovendo, e dunque non si ha a che fare con un esercizio di statica.

In particolare, il corpo ruota. L'unica forza che può provocare un momento torcente (e dunque una rotazione) è la forza peso. La forza di reazione vincolare invece ha braccio nullo.

Da notare che, mentra la forza peso punta sempre nella stessa direzione, il braccio ha cambiato orientamento... non possiamo usare l'espressione del momento torcente causato dalla forza peso calcolato in precedenza!



$$\vec{\tau} = \frac{L}{2}\begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\tau_z = \tau_x P_y - \tau_y P_x$$

$$= -\frac{L}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}(-Mg) = \frac{L\sqrt{2}Mg}{4}.$$

A questo punto, possiamo calcolare l'accelerazione angolare...

$$\alpha = \frac{I}{\tau_z} = \ldots$$

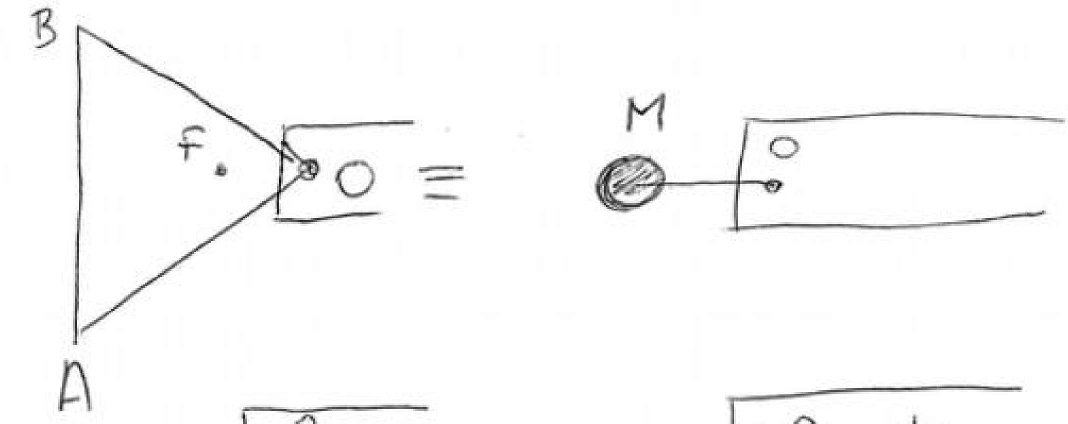
Punto d

Come detto in precedenza, la rotazione del triangolo è causata solo dalla forza peso. Poichè questa forza è conservativa, è possibile sfruttare la conservazione dell'energia meccanica per stabilire la velocità angolare massima.

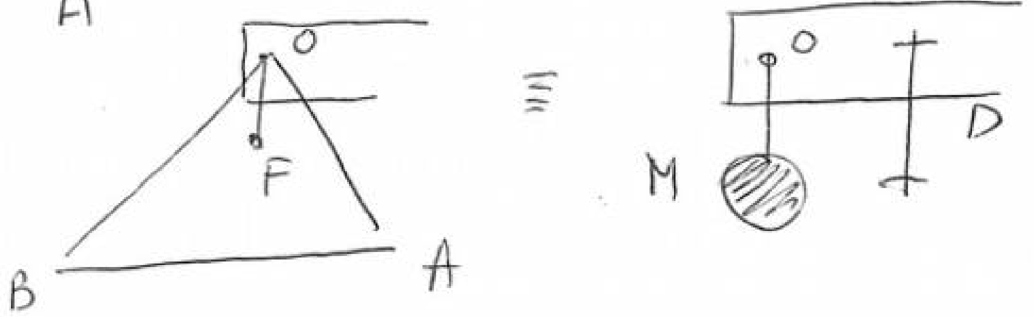
Per quanto riguarda l'energia potenziale, è sufficiente determinare il calo di quota del centro di massa F che si osserva tra la configurazione iniziale (0) e quella finale (1).

Indichiamo con M la massa totale del triangolo...

Energia potenziale



$$U_0 = 0$$



$$U_1 = -MgD$$

Energia cinetica

$$K_0 = \frac{1}{2} I \omega_0^2 = 0 \qquad (\omega_0 = 0)$$

$$K_1 = \frac{1}{2} I \omega_1^2 \qquad \Rightarrow \omega_1 = max$$

$$\boxed{U_0 + K_0 = U_1 + K_1}$$ Conservazione dell'energia meccanica

$$0 + 0 = -MgD + \frac{1}{2} I \omega_1^2$$

$$\Rightarrow \frac{I\omega_1^2}{2} = MgD$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{2MgD}{I}}.$$

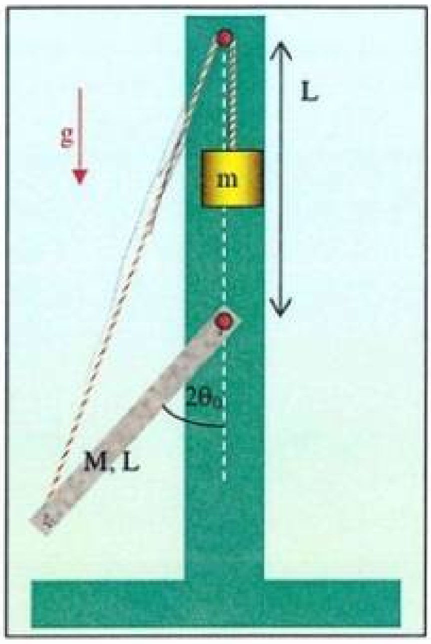
Esercizio estratto dall'esame di Fisica 1 del 2 Settembre 2009

Esercizio 1

La figura rappresenta una sbarretta omogenea di massa M e lunghezza L. Essa è imperniata ad un estremo, così da poter ruotare su un piano verticale. La sbarretta viene sostenuta con una corda di massa trascurabile che, rinviata da una piccola carrucola posta sopra al fulcro a distanza L da esso, mantiene sospeso con l'altro estremo un corpo di massa m.

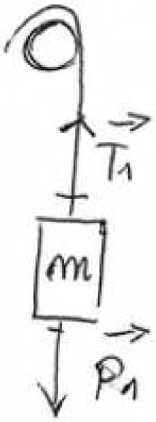
a) Qual è l'angolo $2\theta_0$ fra la sbarretta e la verticale nella posizione d'equilibrio?
b) Qual è il modulo della reazione del perno nella configurazione d'equilibrio?

Ad un certo istante, la corda si rompe. In termini di θ_0, esprimere
c) l'accelerazione angolare iniziale della sbarretta;
d) la massima velocità angolare che essa raggiunge.



Punto a

Diagramma delle forze agenti sulla massa sospesa



Sul corpo agiscono la forza peso e la tensione sulla fune.

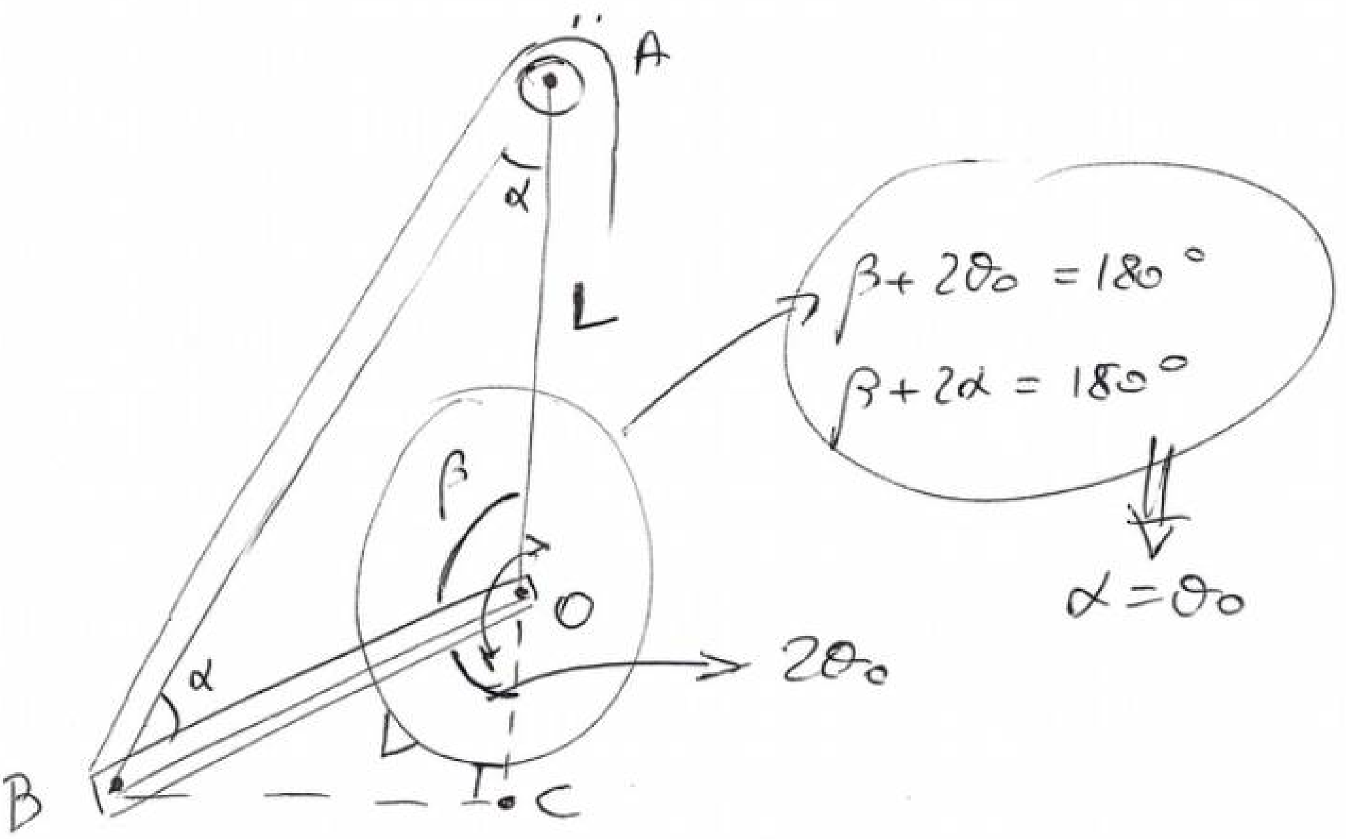
$$\vec{P}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -mg \end{bmatrix} \qquad \vec{T}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ T_{1y} \end{bmatrix}$$

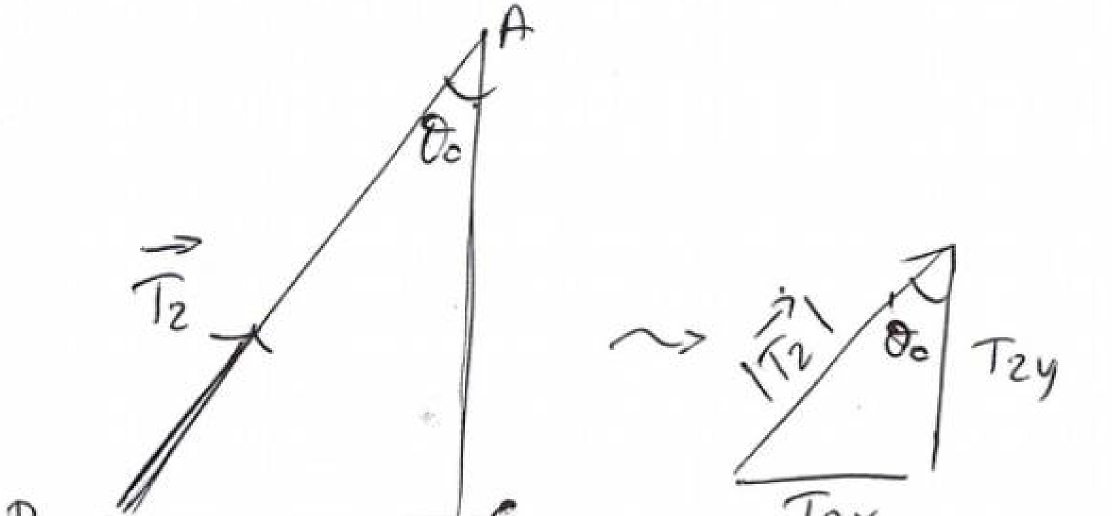
Statica

$$T_{1y} - mg = 0$$

$$\boxed{T_{1y} = mg}$$

Per quanto riguarda la sbarretta, è necessario un approccio geometrico per scoprire l'orientamento delle forze in gioco.





$$\vec{T}_2 = |\vec{T}_2| \begin{bmatrix} \sin\theta_0 \\ \cos\theta_0 \end{bmatrix}$$

$\vec{T}_2$ è la tensione sulla fune obliqua.
Il fatto di aver chiamato con due nomi diversi le tensioni sui due lembi della fune ($\vec{T}_1$ e $\vec{T}_2$) non è un caso...

Notare che

$$\vec{T_1} \neq \vec{T_2} \qquad \vec{T_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ mg \end{bmatrix}$$

$$\vec{T_2} = |\vec{T_2}| \begin{bmatrix} \sin\theta_0 \\ \cos\theta_0 \end{bmatrix}$$

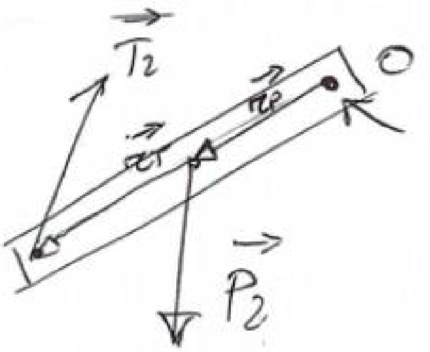
Ma ... $\boxed{|\vec{T_1}| = |\vec{T_2}|}$

Le tensioni sui due lembi di una stessa fune hanno lo stesso modulo!

$$|\vec{T_1}| = mg \Rightarrow |\vec{T_2}| = mg$$

$$\vec{T_2} = mg \begin{bmatrix} \sin\theta_0 \\ \cos\theta_0 \end{bmatrix}$$

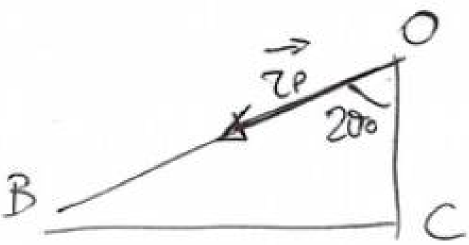
Diagramma delle forze agenti sulla sbarretta:



Nel fulcro ho reazione $\vec{R_F}$

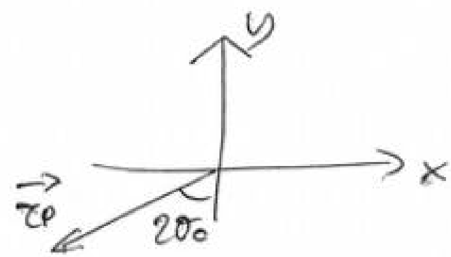
La reazione vincolare non produce momento torcente.

La tensione e la forza peso producono momento.



Il raggio vettore della tensione è parallelo a quello della forza peso!

$$\vec{r_T} = 2\,\vec{r_P} \qquad \vec{r_P} = \frac{L}{2} \begin{bmatrix} -\sin 2\theta_0 \\ -\cos 2\theta_0 \end{bmatrix}$$



$$\vec{\tau} = \vec{\tau}_P \times \vec{P}_2$$

Momento torcente dovuto alla forza peso

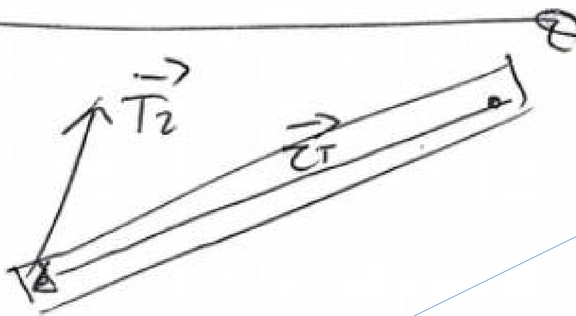
$$\downarrow$$

$$\tau_z = \tau_x P_y - \cancelto{0}{\tau_y P_x}$$

$$= -\frac{L}{2} \sin 2\theta_0 \, (-Mg) = \frac{LMg}{2} \sin 2\theta_0 > 0$$

$$\boxed{\begin{aligned} \sin 2\theta_0 &= 2 \sin\theta_0 \cos\theta_0 \\ \cos 2\theta_0 &= \cos^2\theta_0 - \sin^2\theta_0 \end{aligned}}$$

$$\tau_z = LMg \sin\theta_0 \cos\theta_0 .$$



$$\vec{\tau}_T = 2\vec{\tau}_P = L \begin{bmatrix} -\sin 2\theta_0 \\ -\cos 2\theta_0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{T}_2 = mg \begin{bmatrix} \sin\theta_0 \\ \cos\theta_0 \end{bmatrix}$$

Momento torcente dovuto alla tensione

$$\tau_z = \tau_x T_y - \tau_y T_x =$$

$$= -L \sin 2\theta_0 \, mg \cos\theta_0 + L \cos 2\theta_0 \, mg \sin\theta_0$$

$$= -L\, 2 \sin\theta_0 \cos\theta_0 \, mg \cos\theta_0$$
$$+ L(\cos^2\theta_0 - \sin^2\theta_0)\, mg \sin\theta_0$$

$$= -Lmg\sin\theta_0 \left(2\cos^2\theta_0 - \cos^2\theta_0 + \sin^2\theta_0\right)$$

$$= -Lmg\sin\theta_0 \left(\cos^2\theta_0 + \sin^2\theta_0\right)$$

$$= -Lmg\sin\theta_0 .$$

Statica del corpo 2

$$\vec{T}_2 + \vec{P}_2 + \vec{R}_F = \vec{0}$$

$$\boxed{\begin{cases} mg\sin\theta_0 + R_x = 0 \\ mg\cos\theta_0 - Mg + R_y = 0 \end{cases}}$$ ← Forze

Momenti lungo z

$$\boxed{-Lmg\sin\theta_0 + MgL\sin\theta_0\cos\theta_0 = 0}$$

$$gL\sin\theta_0\left(-m + M\cos\theta_0\right) = 0$$

$$-m + M\cos\theta_0 = 0$$

$$\cos\theta_0 = \frac{m}{M} \qquad \boxed{m < M}$$

$$\Rightarrow \boxed{\theta_0 = \arccos\frac{m}{M}}$$

$$\begin{cases} R_x = -mg\sin\theta_0 \\ R_y = Mg - \underline{mg\cos\theta_0} \end{cases}$$

Nota teorica

$$\cos\arccos\frac{m}{M} = \frac{m}{M}$$

$$\sin\arccos\frac{m}{M} =$$

$$= \cos\arcsin\frac{m}{M} = \sqrt{1 - \left(\frac{m}{M}\right)^2}$$

Nota teorica

$$\sin \arccos x = \cos \arcsin x = \sqrt{1-x^2}$$

$$\cos(\arccos x) = x$$

$$\sin(\arccos x) = \sqrt{1-\cos^2(\arccos(x))} =$$

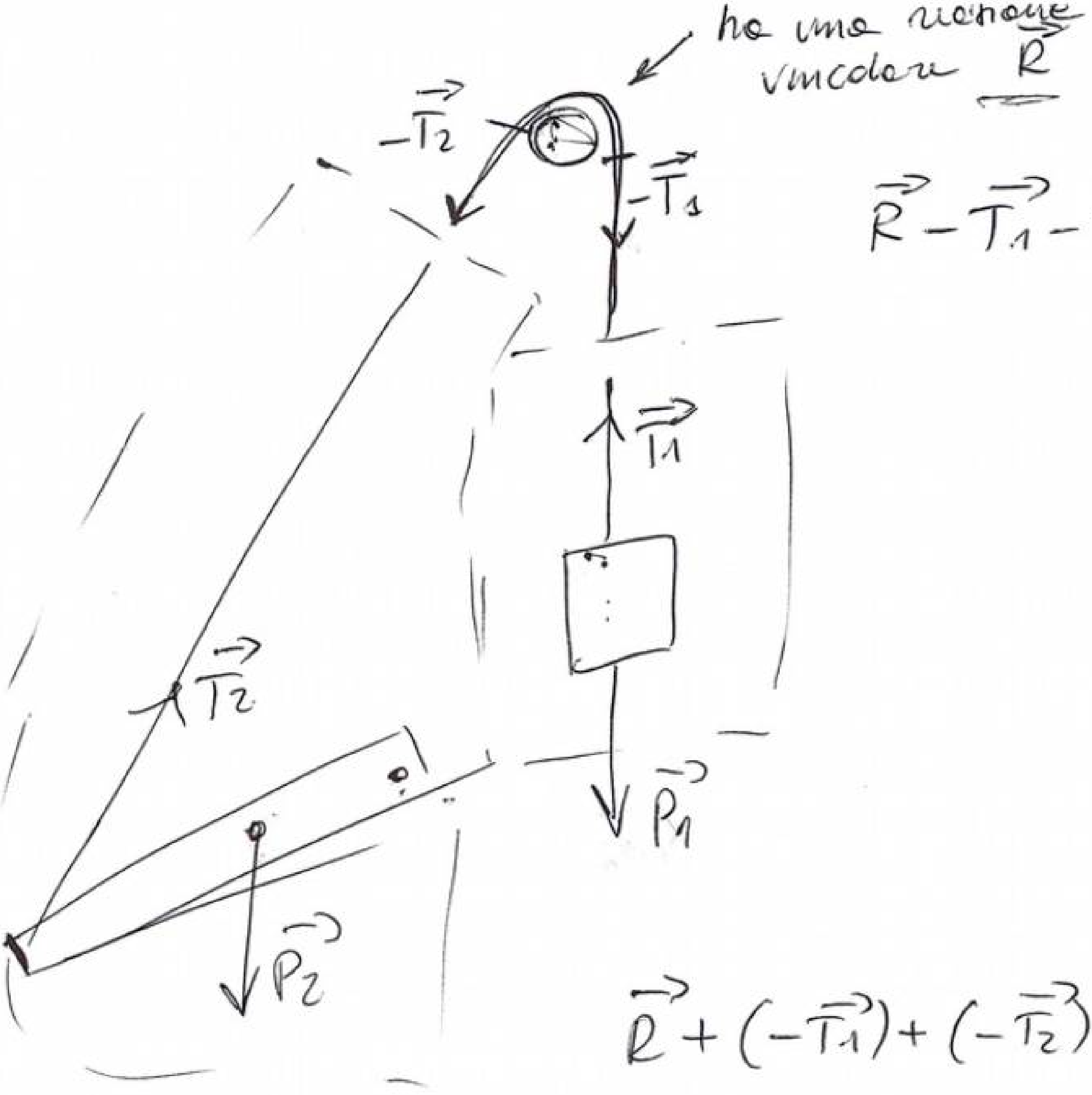
$$\boxed{\cos^2(\cdot) + \sin^2(\cdot) = 1}$$

$$= \sqrt{1-x^2}$$

Tornando all'esercizio, si ha che:

$$\boxed{\begin{aligned} R_x &= -mg\sqrt{1-\left(\frac{m}{M}\right)^2} \\ R_y &= Mg - mg\left(\frac{m}{M}\right) \end{aligned}}$$

Abbiamo esaminato in dettaglio cosa succede alle due masse. Cosa succede invice alla carrucola?
Essa è soggetta ad una reazione vincolare, ed alle due tensioni presenti sui due lembi della fune... cambiate di segno in virtù del terzo principio della dinamica!



$$\vec{R} - \vec{T_1} - \vec{T_2} = \vec{0}$$

$$\vec{R} + (-\vec{T_1}) + (-\vec{T_2}) = \vec{0}$$

Punto c

$\vec{T_2} = \vec{0}$ istantaneamente.

Gioca solo $\vec{P_2}$!

$$\tau = MgL \sin\theta_0 \cos\theta_0$$

$$= \cancel{M} gL \sqrt{1 - \frac{m^2}{M^2}} \cdot \frac{m}{\cancel{M}} =$$

$$= \frac{mgL}{M} \sqrt{M^2 - m^2}.$$

<u>Momento di inerzia</u>

$$I = \frac{ML^2}{3}$$

$$\alpha = \frac{\tau}{I} = \frac{mg\cancel{L}}{M} \frac{\sqrt{M^2 - m^2}}{ML^{\cancel{2}}} \cdot 3$$

$$= \frac{3mg\sqrt{M^2 - m^2}}{M^2 L}.$$

Punto D

$$\overline{OE} = \frac{L}{2}\cos 2\theta_0 = \frac{L}{2}\left(\cos^2\theta_0 - \sin^2\theta_0\right) =$$

$$= \frac{L}{2}\left(\left(\frac{m}{M}\right)^2 - \left(\sqrt{1-\left(\frac{m}{M}\right)^2}\right)^2\right) =$$

$$= \frac{L}{2}\left(\left(\frac{m}{M}\right)^2 - 1 + \left(\frac{m}{M}\right)^2\right) =$$

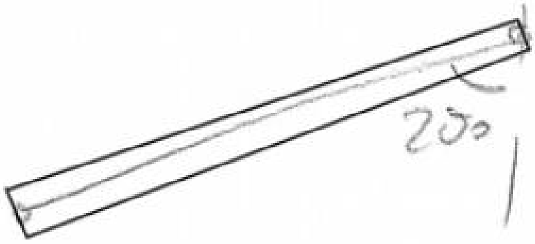
$$= \frac{L}{2}\left(2\left(\frac{m}{M}\right)^2 - 1\right)$$

$$\overline{ED} = \overline{OD'} - \overline{OE} = \frac{L}{2} - \frac{L}{2}\left(2\left(\frac{m}{M}\right)^2 - 1\right)$$

$$= -L\left(\frac{m}{M}\right)^2.$$

Anche in questo, poichè la rotazione è provocata solo dalla forza peso, possiamo sfruttare la conservazione dell'energia meccanica...

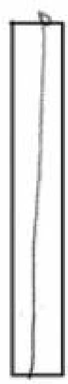
Configurazione iniziale



$$U_0 = 0$$

$$K_0 = 0$$

Configurazione finale



$$U_1 = -MgL\left(\frac{m}{M}\right)^2$$

$$K_1 = \frac{1}{2} I \omega_1^2$$

$$0 = -\cancel{M}gL\frac{m^2}{M} + \frac{1}{2} I \omega_1^2$$

$$\omega_1^2 = \frac{2gL\frac{m^2}{M}}{I} = \frac{2gLm^2 3}{M \cdot ML^2} =$$

$$= \frac{6g}{L}\frac{m^2}{M^2}.$$