

Corso di recupero di Fisica 2017/2018

Dario Madeo

Lezione del 16/03/2018

**Slides disponibili all'indirizzo
<http://www.dii.unisi.it/~madeo/crf/crf1718.html>**

Prodotto vettoriale

Si lavora in $\boxed{\mathbb{R}^3}$

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} \quad \vec{w} = \begin{bmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{bmatrix}$$

$$\vec{q} = \vec{v} \wedge \vec{w}$$
$$\vec{v} \times \vec{w}$$

Calcolo con un modo "improprio"

$$\vec{q} = \det \begin{bmatrix} \vec{x} & \vec{y} & \vec{z} & \vec{x} & \vec{y} \\ v_x & v_y & v_z & v_x & v_y \\ w_x & w_y & w_z & w_x & w_y \end{bmatrix}$$

$$= \vec{x}(v_y w_z) + \vec{y}(v_z w_x) + \vec{z}(v_x w_y)$$

$$- \vec{z}(v_y w_x) - \vec{x}(v_z w_y) - \vec{y}(v_x w_z)$$

$$= \vec{x}(v_y w_z - v_z w_y) + \vec{y}(v_z w_x - v_x w_z) \\ + \vec{z}(v_x w_y - v_y w_x)$$

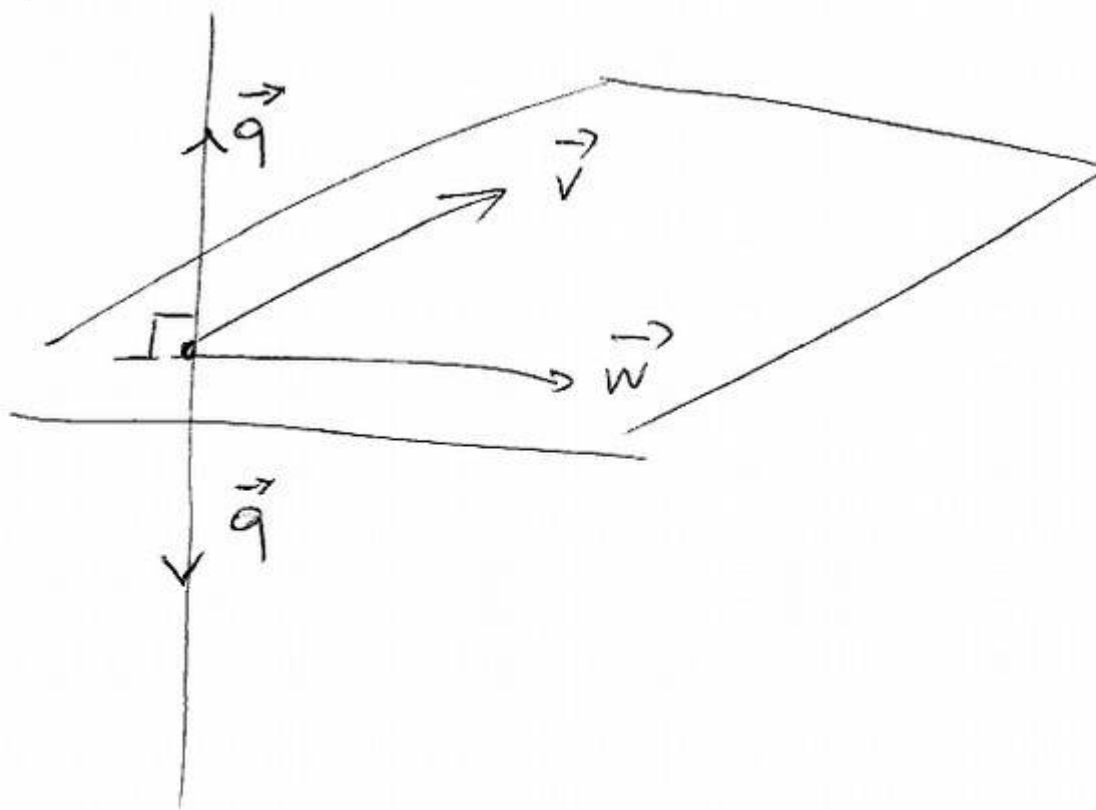
Da notare che $\vec{x}$, $\vec{y}$ e $\vec{z}$ sono i versori dello spazio. Dunque, le quantità tra parentesi rappresentano le componenti x , y e z del vettore $\vec{q}$.

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \vec{y} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \vec{z} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{q} = \begin{bmatrix} v_y w_z - v_z w_y \\ v_z w_x - v_x w_z \\ v_x w_y - v_y w_x \end{bmatrix}$$

Risultati

$$1) \vec{q} \perp \vec{v}, \quad \vec{q} \perp \vec{w}$$



Dati due vettori $\vec{v}$ e $\vec{w}$, non nulli e non paralleli tra loro ($\nexists k \in \mathbb{R} : \vec{v} = k\vec{w}$), essi individuano univocamente un piano su cui entrambi giacciono. Il vettore $\vec{q} = \vec{v} \times \vec{w}$ ha la proprietà di essere ortogonale a tutti i vettori di suddetto piano, e dunque è ortogonale agli stessi $\vec{v}$ e $\vec{w}$.

2) Se $\vec{v}$ e $\vec{w}$ sono paralleli

$$(\vec{v} = k\vec{w}, k \in \mathbb{R})$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{q} = \vec{0}}$$

$$\vec{q} = \det \begin{bmatrix} \vec{x} & \vec{y} & \vec{z} \\ kw_x & kw_y & kw_z \\ w_x & w_y & w_z \end{bmatrix} = 0$$

È infatti noto che il determinante di una matrice che ha 2 righe linearmente dipendenti è nullo.

$$3) |\vec{q}| = |\vec{v}| |\vec{w}| \sin \alpha$$

Questa relazione lega il modulo del vettore $\vec{q}$ a quello dei vettori $\vec{v}$ e $\vec{w}$, e all'angolo fra essi compreso ($\alpha \in [0, \pi]$).

È chiaro che, se $\vec{v} = k\vec{w}$ (sono paralleli), allora l'angolo α è pari a 0 o a π , e pertanto il modulo di $\vec{q}$ è nullo (vedi punto 2). Invece, tale modulo è massimo quando $\vec{v}$ e $\vec{w}$ sono ortogonali fra loro ($\alpha = \pi/2$).

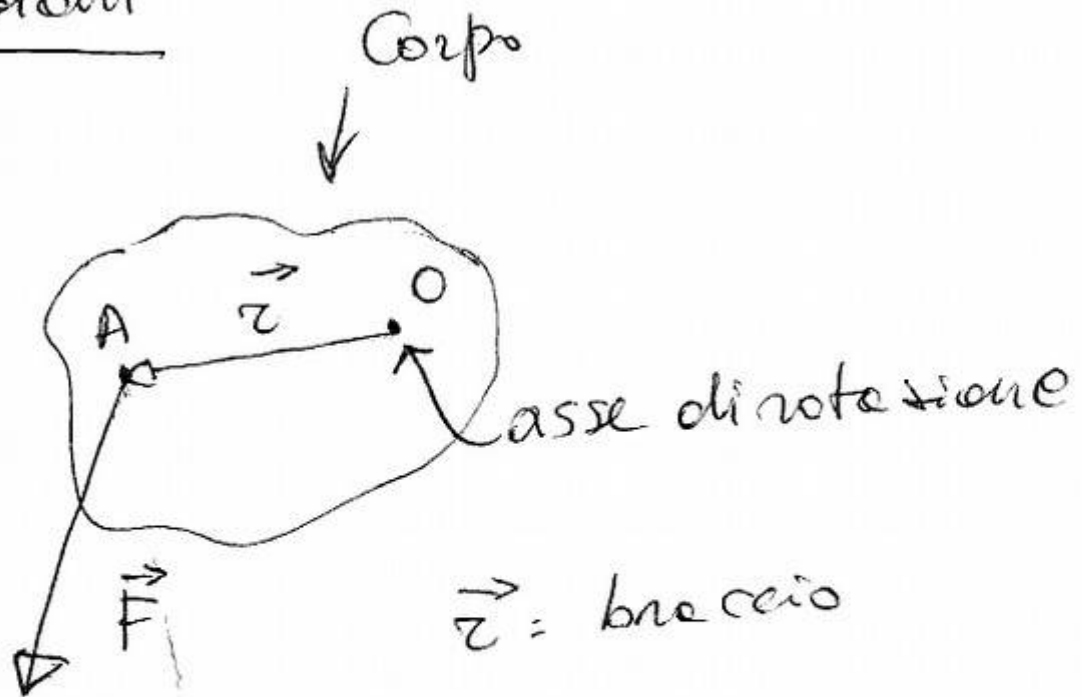
4) Dati 3 vettori $\vec{v}$, $\vec{w}$ ed $\vec{u}$, allora:

$$\vec{v} \times (\vec{w} + \vec{u}) = (\vec{v} \times \vec{w}) + (\vec{v} \times \vec{u})$$

$$5) \vec{v} \times (a\vec{w}) = a(\vec{v} \times \vec{w}), \text{ dove } a \in \mathbb{R}.$$

$$6) \vec{v} \times \vec{w} = -\vec{w} \times \vec{v}$$

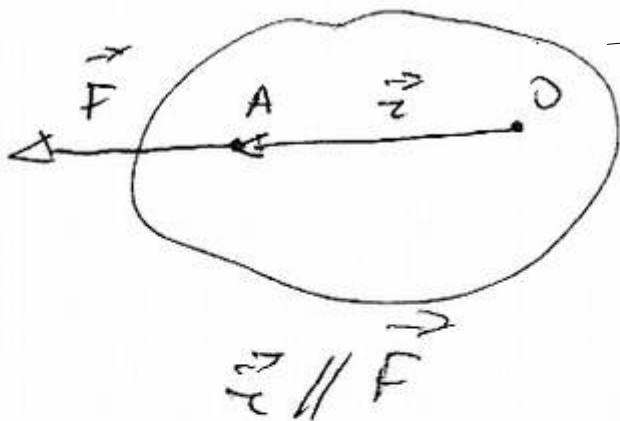
Rotazioni



Momento torcente

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Due casi notevoli



Quando $\vec{r}$ è parallelo a $\vec{F}$,
il momento torcente è nullo.

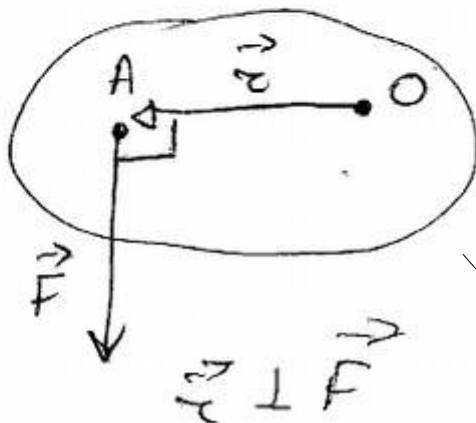
Consideriamo una generica forza $\vec{F}$. È possibile scomporla in due componenti: una parallela a $\vec{r}$, indicata da $\vec{F}_{\parallel}$, ed una ortogonale a $\vec{r}$, indicata da $\vec{F}_{\perp}$. Da cui:

$$\vec{F} = \vec{F}_{\parallel} + \vec{F}_{\perp}.$$

Il momento torcente è:

$$\begin{aligned}\vec{\tau} &= \vec{r} \times \vec{F} = \\ &= \vec{r} \times (\vec{F}_{\parallel} + \vec{F}_{\perp}) = \\ &= \vec{r} \times \vec{F}_{\parallel} + \vec{r} \times \vec{F}_{\perp} \\ &= \vec{0} + \vec{r} \times \vec{F}_{\perp}.\end{aligned}$$

Dunque, la rotazione è provocata solo dalla componente della forza ortogonale al braccio.



Quando $\vec{r}$ è ortogonale a $\vec{F}$,
il momento torcente è massimo.

Nella maggiorparte degli esercizi di Fisica in cui si parla di forze che producono rotazioni, si ha che:

- $\vec{F}$ ed $\vec{r}$ giacciono su un piano "standard", come xy , o yz , o zx .
- L'asse di rotazione è z se il piano precedente è xy , x se il piano precedente è yz , oppure y se il piano precedente è zx .

Per questi casi notevoli, il momento torcente può essere calcolato velocemente...

1) $\vec{F}$ ed $\vec{r}$ giacciono sul piano xy .

$$\vec{F} = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ 0 \end{bmatrix}$$

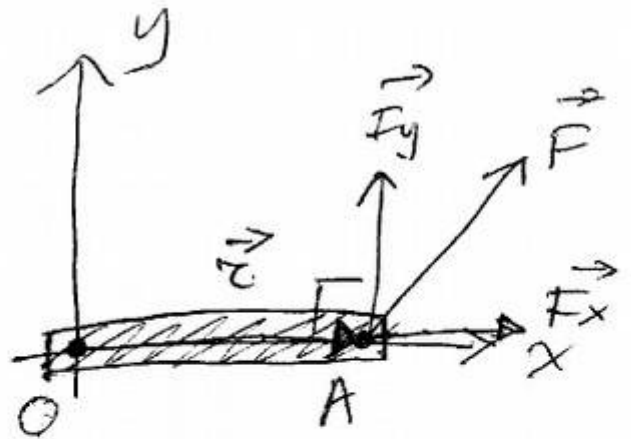
$$\vec{\tau} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ r_x F_y - r_y F_x \end{bmatrix}$$

2) $\vec{r} \parallel \vec{x}$

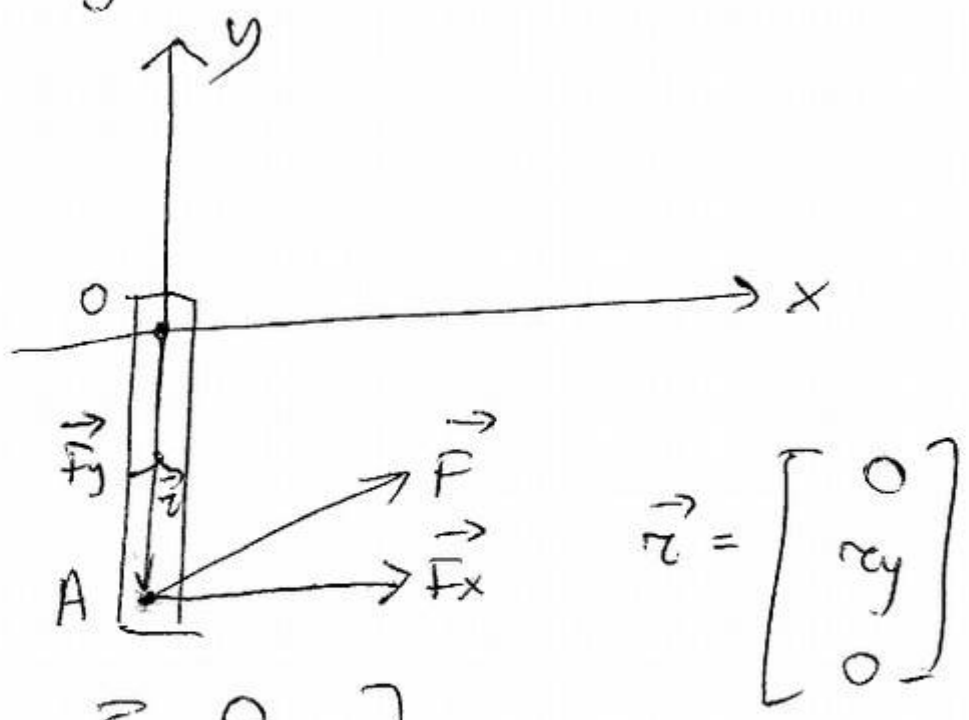
$$\vec{r} = \begin{bmatrix} r_x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{\tau} =$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ r_x F_y \end{bmatrix}$$



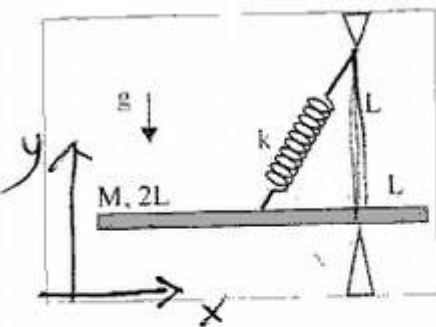
3) $\vec{r} \parallel \vec{y}$



$$\vec{\tau} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -r_y F_x \end{bmatrix}$$

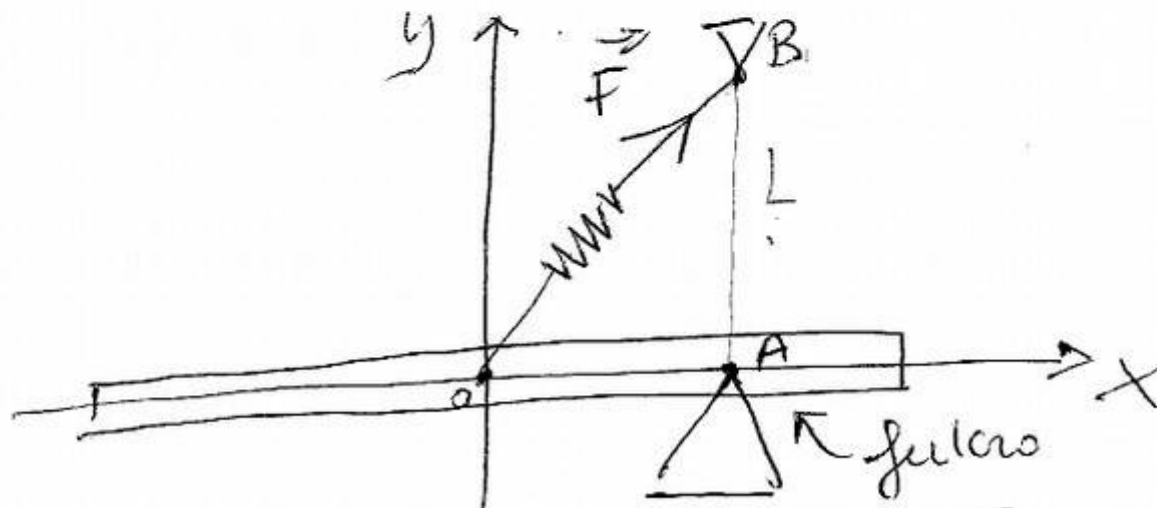
Per esercizio, generalizzare gli esempi precedenti, considerando $\vec{F}$ ed $\vec{r}$ appartenenti ai piani yz e zx .

Estratto dall'esame di Fisica 1 del 26 Gennaio 2018



Esercizio 1

Una sbarretta sottile omogenea di massa M e lunghezza $2L$ poggia su un cavalletto. Una molla di lunghezza a riposo L e costante elastica k , ha un estremo attaccato a distanza L sopra al cavalletto e con l'altro estremo è connessa al centro della sbarretta. Quali e quante sono le posizioni x del centro della sbarretta per le quali la sbarretta stessa sta orizzontale in condizioni di equilibrio? Cosa si può dire del coefficiente d'attrito statico fra sbarretta e cavalletto?



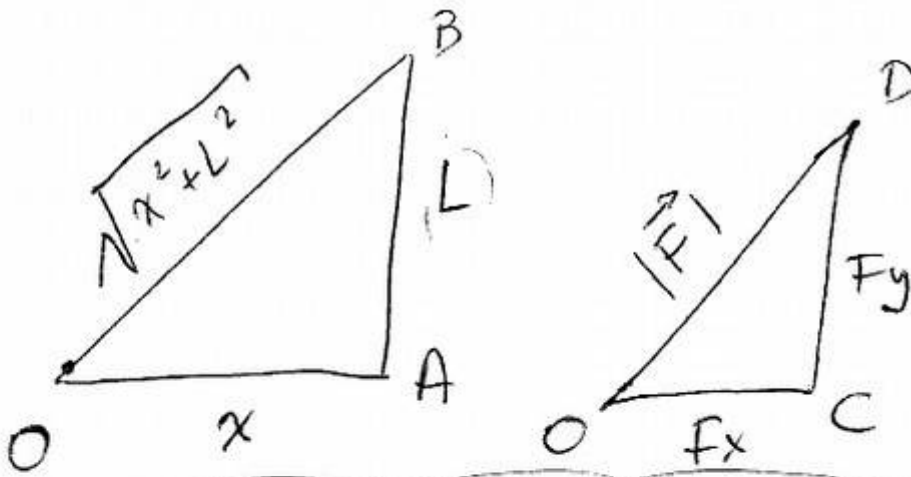
$$\vec{A} = \begin{bmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{B} = \begin{bmatrix} x \\ L \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{F} = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ 0 \end{bmatrix}$$

In questo caso, $\vec{F}$ ed $\vec{r}$ giacciono sul piano xy e l'asse di rotazione è parallelo all'asse z . Poichè siamo sul piano xy , le componenti z dei vari vettori presi in esame è pari a 0.

Per determinare le componenti della forza di richiamo della molla, ragioniamo su dei triangoli rettangoli simili...



$$x : F_x = L : F_y = \sqrt{x^2 + L^2} : |\vec{F}|$$

$$\frac{x}{F_x} = \frac{L}{F_y} \Rightarrow F_x = \frac{x}{L} F_y$$

$$\frac{L}{F_y} = \frac{\sqrt{x^2 + L^2}}{|\vec{F}|} \Rightarrow F_y = \frac{L}{\sqrt{x^2 + L^2}} |\vec{F}|$$

$$F_x = \frac{x}{L} \cdot \frac{L}{\sqrt{x^2 + L^2}} |\vec{F}| = \frac{x}{\sqrt{x^2 + L^2}} |\vec{F}|$$

$$F_y = \frac{L}{\sqrt{x^2 + L^2}} |\vec{F}|$$

$$F_x = |\vec{F}| \cos \alpha$$

$$F_y = |\vec{F}| \sin \alpha$$

Usare le proprietà dei triangoli rettangoli simili è importante quando gli angoli non sono noti.

$$\vec{F} = \begin{bmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+L^2}} |\vec{F}| \\ \frac{L}{\sqrt{x^2+L^2}} |\vec{F}| \\ 0 \end{bmatrix}$$

Legge di Hooke (e)

$$|\vec{F}| = k \left| \text{lung. della molla} - \underset{\substack{\uparrow \\ \text{lung. di riposo} \\ \text{(dato)}}}{L} \right|$$

lung. della molla : $\sqrt{x^2+L^2} > L$

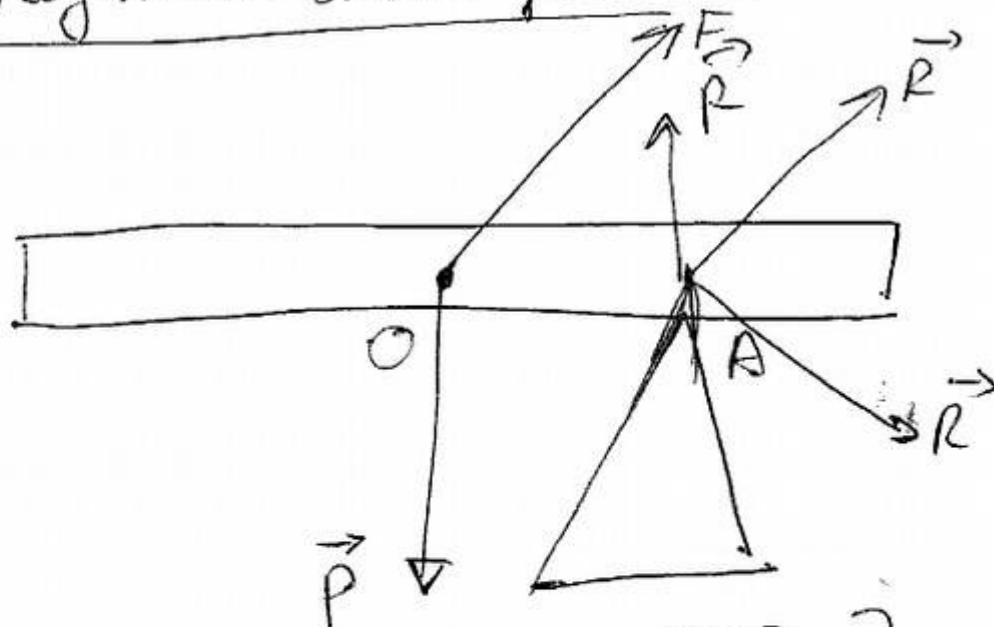
$$\begin{aligned} \sqrt{x^2+L^2} &= \sqrt{L^2 \left(\frac{x^2}{L^2} + 1 \right)} = \\ &= L \sqrt{1 + \left(\frac{x}{L} \right)^2} > L \cdot 1 \end{aligned}$$

~~$|\vec{F}| = k (\sqrt{x^2+L^2} - L)$~~

$$|\vec{F}| = k (\sqrt{x^2+L^2} - L)$$

$$\vec{F} = K(\sqrt{x^2 + L^2} - L) \begin{bmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2 + L^2}} \\ \frac{L}{\sqrt{x^2 + L^2}} \\ 0 \end{bmatrix} .$$

Diagramma delle forze →



$\vec{R}?$

Sul punto di contatto c'è una forza di reazione vincolare. Ma non conosciamo modulo, direzione e verso... Sono incognite!!!

$$\vec{F} = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{P} = \begin{bmatrix} 0 \\ -Mg \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{R} = \begin{bmatrix} R_x \\ R_y \\ 0 \end{bmatrix}$$

incognite

Statica

$$1) \sum_i \vec{F}_i = \vec{0}$$

$$\begin{cases} F_x + 0 + R_x = 0 \\ F_y - Mg + R_y = 0 \end{cases}$$

N.B.

L'equazione per la statica lungo z è inutile scriverla...

NB F_x, F_y si conoscono!

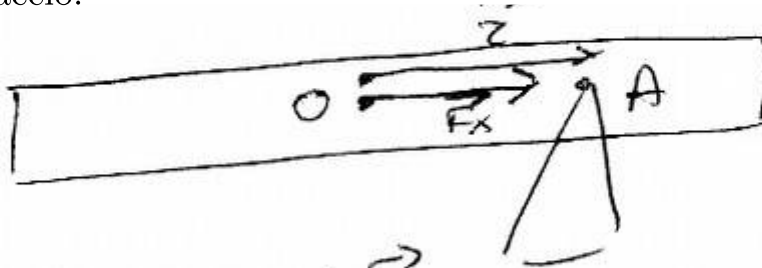
$$R_x = -F_x$$

$$R_y = Mg - F_y$$

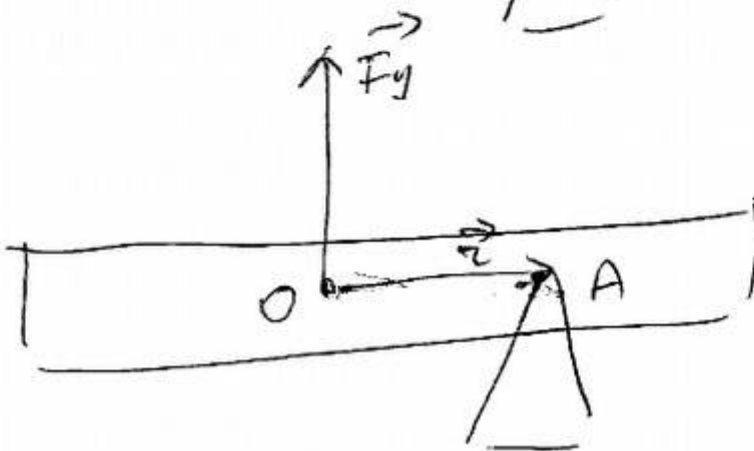
$$2) \sum_i \vec{\tau}_i = \vec{0}$$

$$\vec{F} = \vec{F}_x + \vec{F}_y$$

Per i ragionamenti fatti in precedenza, scomponiamo $\vec{F}$ ed $\vec{R}$ in due componenti. La componente con pedice x è parallela al braccio $\vec{r}$, mentre la componente con pedice y è ortogonale al braccio.



$$\Rightarrow \vec{\tau} = 0$$



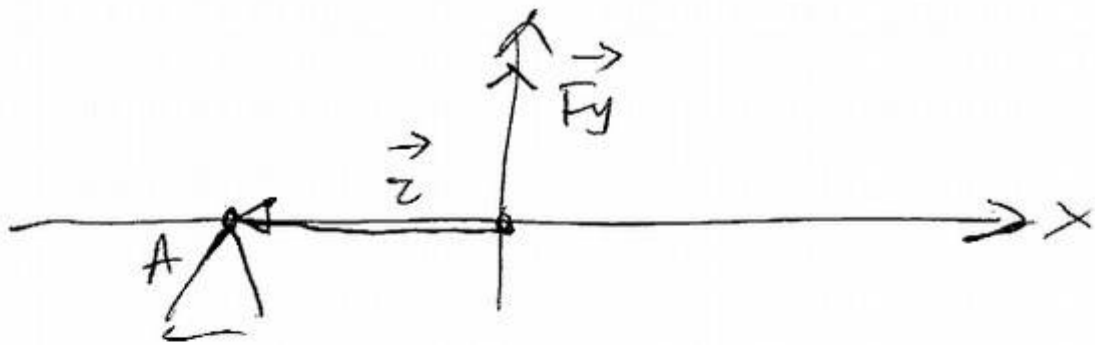
$$\Rightarrow \vec{\tau} =$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ r \times F_y \end{bmatrix} e_z$$

$$\vec{\tau} = \begin{bmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \tau_z = x F_y$$

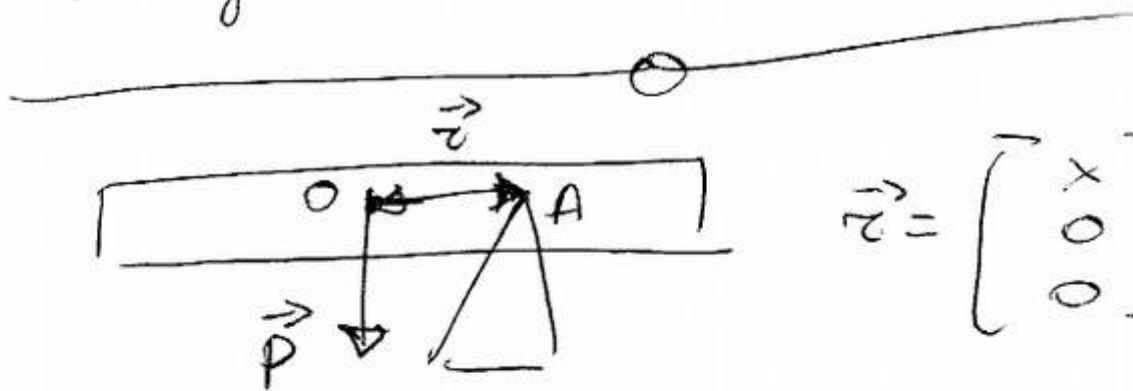
Mentre tutti i vettori in gioco hanno componente z pari a 0, il momento torcente ha componente non nulla solo in z ! Infatti, la rotazione avviene lungo un asse parallelo all'asse z .



$$\vec{r} = \begin{bmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \vec{\tau} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ x F_y \end{bmatrix}$$

$x F_y < 0$ perché $x < 0$

In generale $x \in [-L, L]$

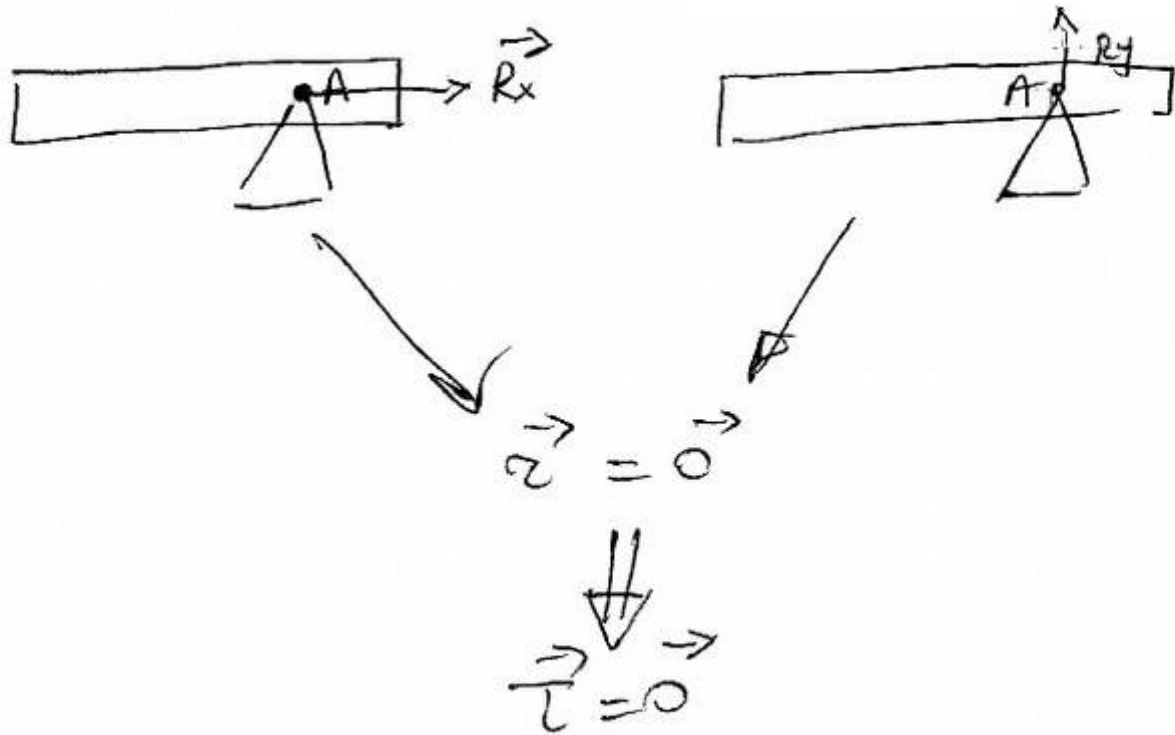


$$\vec{r} = \begin{bmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{\tau} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -x M g \end{bmatrix} \Rightarrow \tau_z = -x M g.$$

Non è invece necessario scomporre $\vec{P}$. Infatti, P è parallela ad y ed è ortogonale al braccio $\vec{r}$.

Per quanto riguarda la reazione vincolare, il braccio è nullo. In generale, tutte le forze applicate in punti che giacciono sull'asse di rotazione hanno braccio nullo, e dunque non producono alcun momento torcente.



Nell'equazione della statica, compaiono solo le componenti z dei momenti!!!

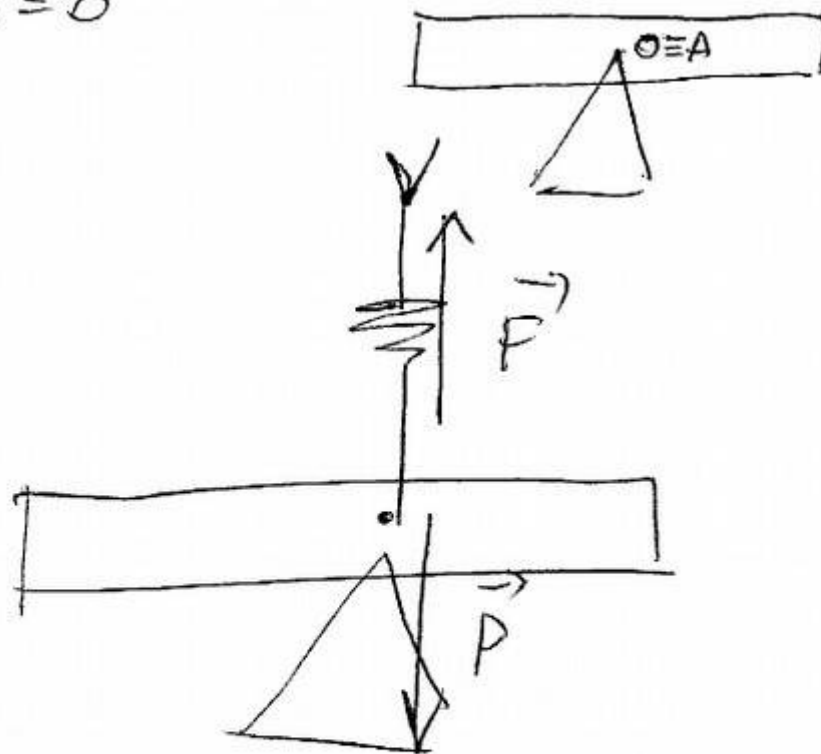
$$\sum_i \vec{\tau}_i = 0 \Rightarrow \boxed{x F_y + (-x M g) = 0}$$

Riassunto, per trovare le x di equilibrio, dobbiamo risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} F_x + R_x = 0 \\ F_y - M g + R_y = 0 \\ \boxed{x (F_y - M g) = 0} \end{cases}$$

Poichè le componenti della reazione vincolare sono incognite, allora l'unica equazione da risolvere è l'ultima!

Ipotesi $x=0$



$x=0$ $\bar{x}$ in equilibrio

Ipotesi $F_y = Mg$

$$\frac{K(\sqrt{x^2 + L^2} - L)L}{\sqrt{x^2 + L^2}} = Mg$$

$$K(\sqrt{x^2 + L^2} - L) = Mg \sqrt{x^2 + L^2}$$

$$\sqrt{x^2 + L^2} (KL - Mg) = KL^2$$

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$
 > 0 $< 0, > 0$ > 0

Condizione importante $KL - Mg > 0$

$$\Rightarrow \boxed{KL > Mg}$$

$$(x^2 + L^2) = \frac{K^2 L^4}{(KL - Mg)^2}$$

$$x^2 = \frac{K^2 L^4 - L^2 (KL - Mg)^2}{(KL - Mg)^2}$$

$$x^2 = \frac{Mg L^2 (2KL - Mg)}{(KL - Mg)^2}$$

$\swarrow$ $\swarrow$ $\rightarrow$ Lo voglio positivo!
 > 0 > 0

$$\boxed{2KL - Mg > 0}$$

$$\boxed{KL > \frac{Mg}{2}}$$

$$X = \pm \frac{L}{kL - Mg} \sqrt{2kL - Mg}$$

A patto che

$$kL > Mg$$