Corso di recupero di Fisica 2017/2018

Dario Madeo

Lezione del 09/03/2018

Slides disponibili all'indirizzo
http://www.dii.unisi.it/~madeo/crf/crf1718.html

Vettori in $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$

Un vettore ha: modulo
direzione
verso
(punto di applicazione)

Modulo

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} \qquad \vec{v} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \qquad |\vec{v}| = \sqrt{v_x + x_y}$$

Versore: vettore di modulo unitario

$$\vec{v} \text{ è versore } \Leftrightarrow |\vec{v}| = 1$$

Se ho un vettore $\vec{v}$, la sua direzione è rappresentata dal versore

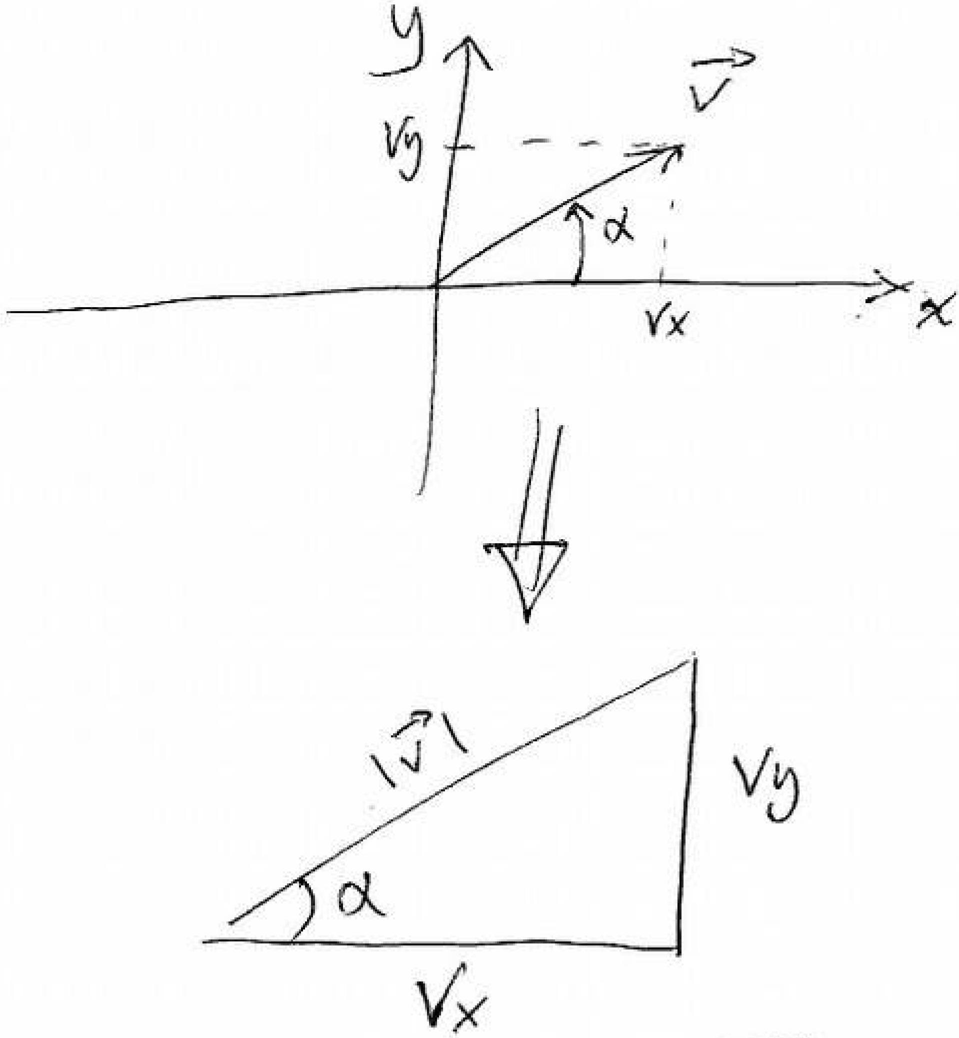
$$\boxed{\vec{u} = \frac{1}{|\vec{v}|}\vec{v}}$$

$$\Downarrow$$

$$|\vec{u}| = 1$$

Relazione tra vettori in R^2 e triangoli rettangoli

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} V_x \\ V_y \end{bmatrix} \qquad \begin{cases} V_x = |\vec{v}| \cos\alpha \\ V_y = |\vec{v}| \sin\alpha \end{cases}$$



$$\cos\alpha = \frac{|\vec{v}|}{V_x}$$

$$\sin\alpha = \frac{|\vec{v}|}{|V_y|}$$

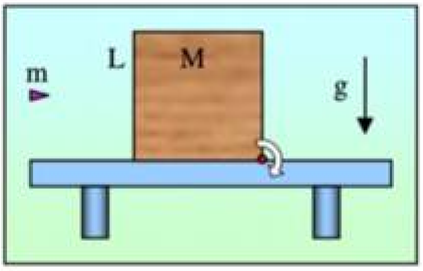
Teorema di Pitagora

$$|\vec{v}|^2 = V_x^2 + V_y^2$$

$$\Downarrow$$

$$1 = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha$$

Estratto dall'esame di Fisica 1 del 9 Settembre 2016

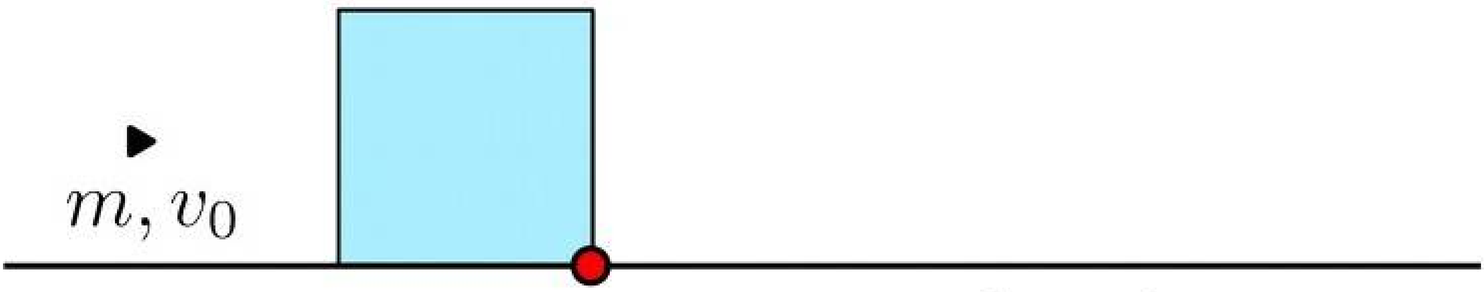


Esercizio 1

Un cubo omogeneo di massa M e lato L poggia con una faccia su un piano orizzontale ed è fermo. Esso può ruotare intorno a uno degli spigoli appoggiati sul piano, che è fisso. Un proiettile di massa m (con m<<M) giunge con velocità $\underline{\mathbf{v}}_0$ perpendicolare alla faccia opposta a quella soprastante il fulcro e si conficca nel suo centro.

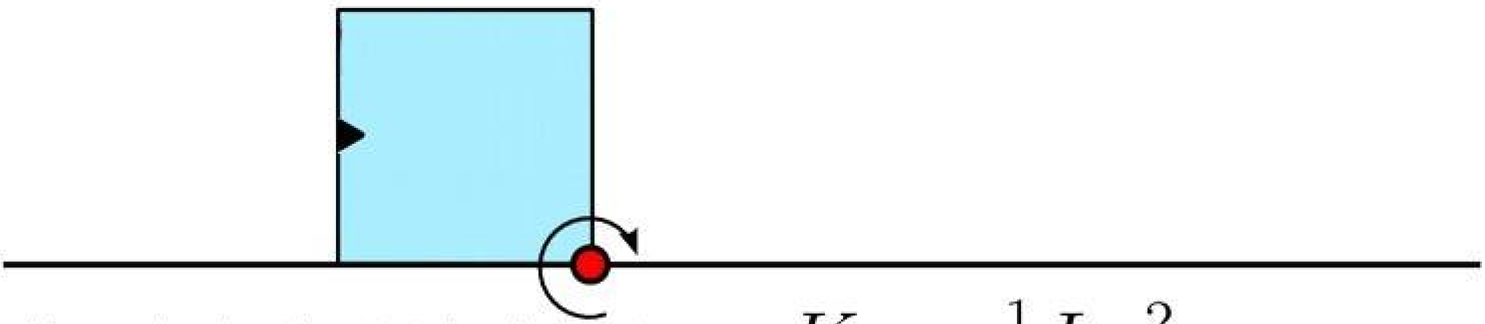
a) Discutere quali quantità si conservano durante l'urto e dopo l'urto.
b) Esprimere in termini di m, v_0, M, L e g l'energia persa nell'urto nel caso in cui il cubo si sollevi fino ad un angolo massimo pari a 15° (angolo tra faccia inferiore e piano).
c) Calcolare il momento d'inerzia I del cubo rispetto al fulcro.
d) Determinare per quali valori di v_0 si osserva un ribaltamento del cubo [stavolta si richiede di rispondere in termini di m, M, I, L, g].

Prima dell'urto



Energia cinetica totale del sistema: $K = \frac{1}{2}mv_0^2$

Subito dopo l'urto



Energia cinetica totale del sistema: $K_1 = \frac{1}{2}Iw_1^2$

Nota teorica
Durante l'urto (fenomeno istantaneo), si ha trasferimento di energia cinetica tra i due corpi (proiettile e cubo). Se l'urto è anaelastico (come in questo caso), l'energia cinetica iniziale di tutto il sistema è superiore a quella finale, ovvero si osserva una perdita di energia. Invece, in un urto perfettamente elastico non si ha alcuna perdita di energia.

Se è avvenuto un trasferimento di energia cinetica, i due corpi si sono uniti, ed il cubo può solo ruotare intorno al fulcro, allora vuol dire che il cubo ha "guadagnato" istantaneamente una velocità angolare ω_1 non nulla! L'energia cinetica K_1 infatti dipende da tale velocità angolare.

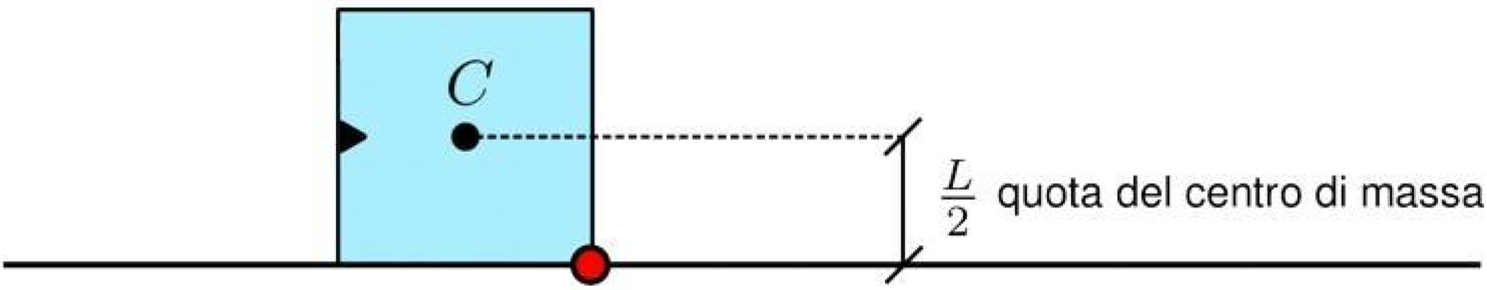
Negli urti, elastici e non, è in generale vero che altre grandezze, come ad esempio la quantità di moto ed il momento angolare, potrebbero rimanere invariate. **Di questo fatto si parlerà in altre lezioni del corso**. Da notare che, grazie a queste leggi di conservazione, è possibile calcolare ω_1. Noti ω_1 ed I, è possibile calcolare K_1, e quindi anche la perdita di energia $K - K_1$.

Agire in questa maniera non è sbagliato, ma purtroppo incompleto. Infatti, il testo dell'esercizio (punto b) richiede di calcolare la perdita di energia $K - K_1$ nel caso in cui il cubo sia in grado di sollevarsi fino ad un angolo massimo di 15°, in funzione di tutte le grandezze in gioco (m, M, L, v_0) ed anche della gravità g.

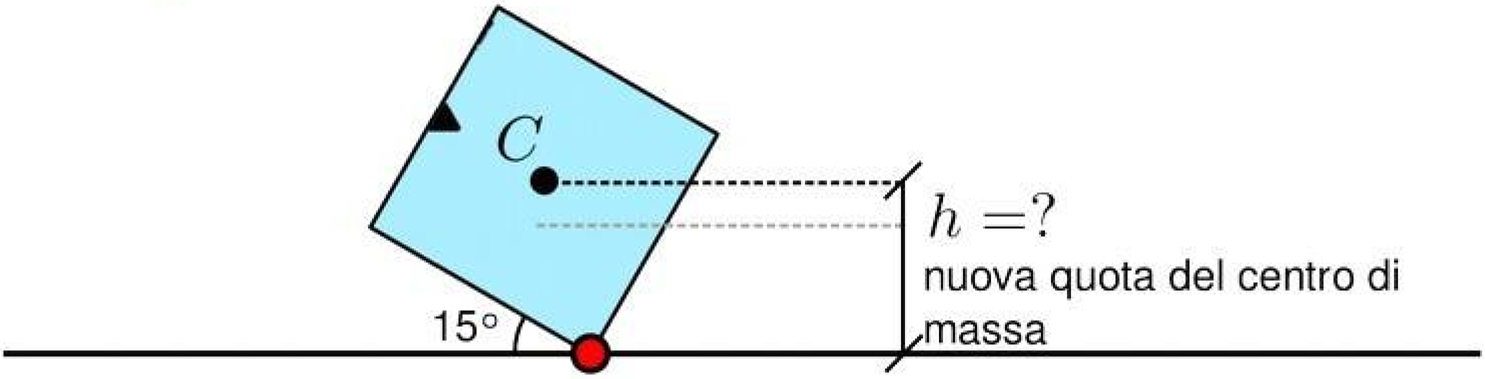
Da notare che, se l'energia cinetica totale del sistema è diminuita, vuole dire che durante l'urto hanno agito forze non conservative. Pertanto, in questa fase, non ha senso considerare l'energia potenziale del sistema. Diventa invece cruciale considerare anche la gravità dopo l'urto. Infatti, dopo l'urto non è presente alcuna forza non conservativa, e la conservazione dell'energia meccanica totale (cinetica + potenziale gravitazionale) diventa fondamentale.

Per il momento, è importante avere bene in mente che la perdita di energia è pari a $K - K_1$, e che $K > K_1$.

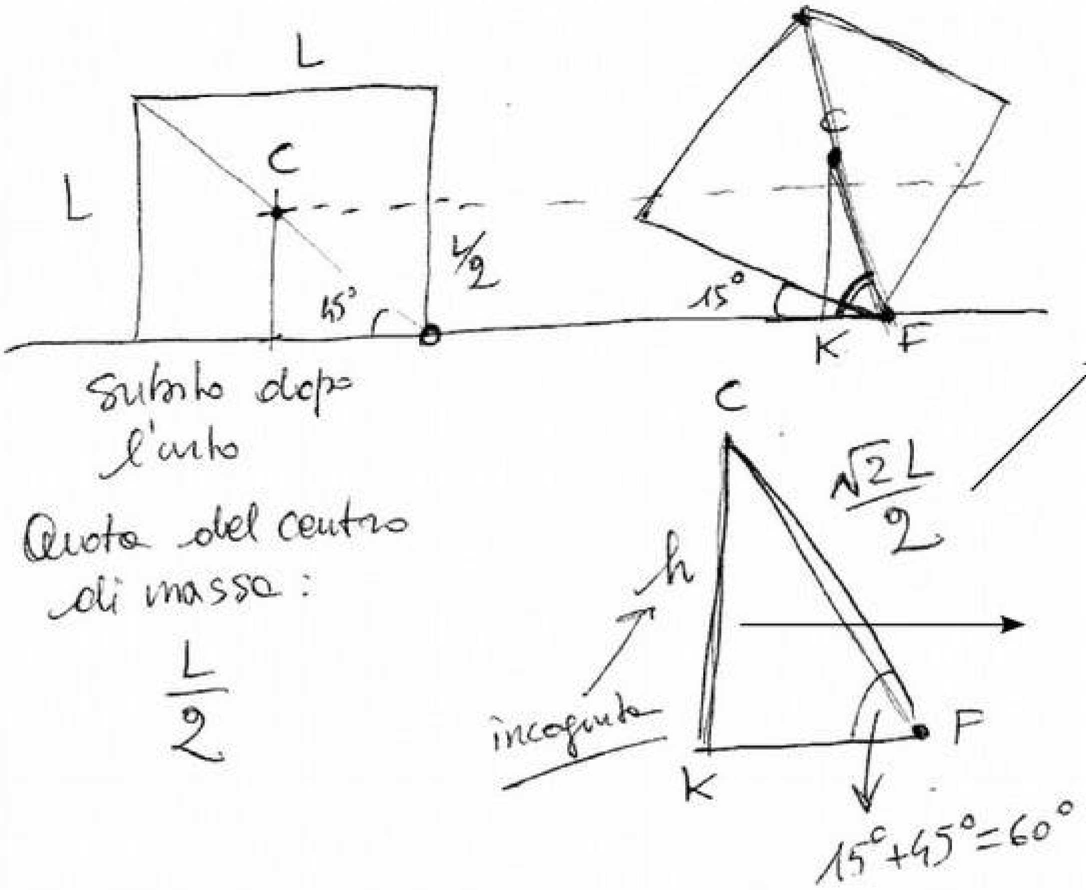
Subito dopo l'urto



Dopo l'urto, il cubo ruota, e si ferma quando forma con il piano un angolo di 15°.

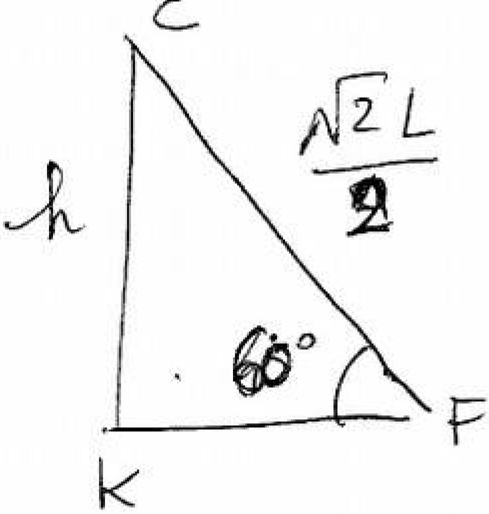


Come calcolo h?



Il lato CF è pari alla metà della diagonale del quadrato di lato L.

Il segmento CK è perpendicolare al piano.



$$h = \frac{\sqrt{2}L}{2} \sin 60^\circ$$

$$= \frac{\sqrt{2}L}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} = L\frac{\sqrt{6}}{4}.$$

Quota iniziale di C è $h = \frac{L}{2}$

" finale di C è $h = \frac{L\sqrt{6}}{4}$

Energia potenziale subito dopo l'urto

$$U_1 = Mg\frac{L}{2}$$

Energia potenziale quando il cubo arriva a formare un angolo di 15°

$$U_2 = Mg\frac{L\sqrt{6}}{4}$$

Conservazione energia meccanica.

$$U_1 + K_1 = U_2 + K_2$$

$$Mg\frac{L}{2} + K_1 = Mg\frac{L\sqrt{6}}{4} + 0$$

Da cui: $$K_1 = MgL\left(\frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{1}{2}\right)$$

Energia persa: $$K - K_1 = \frac{1}{2}mv_0^2 - MgL\left(\frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{1}{2}\right)$$

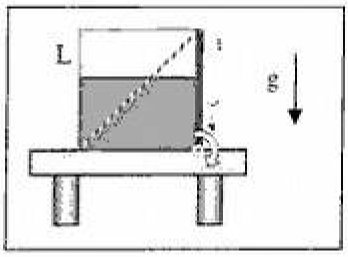
Note conclusive

Il testo chiede di calcolare la perdita di energia avvenuta nell'urto nel caso in cui il cubo fosse stato in grado di sollevarsi fino ad un angolo di 15° rispetto al pavimento.
Abbiamo detto che dopo l'urto il sistema inizia a ruotare, e dunque il cubo ha una velocità angolare iniziale non nulla.
Abbiamo quindi trattato l'energia cinetica subito dopo l'urto (K_1), come se fosse un incognita.
Abbiamo inoltre "dimenticato" che c'è stato un urto ed abbiamo lavorato sulle fasi successive ad esso, in cui hanno agito solo forze conservative (la gravità).
Grazie alla conservazione dell'energia meccanica totale del sistema dopo l'urto, siamo stati in grado di calcolare l'incognita K_1, e quindi la perdita di energia cinetica dovuta all'urto iniziale.

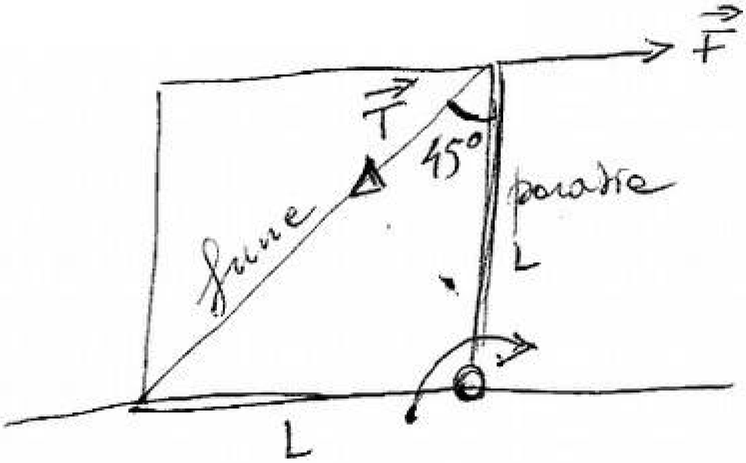
Estratto dall'esame di Fisica 1 del 9 Settembre 2016

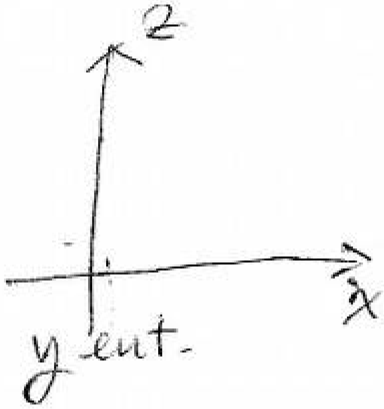
Esercizio 3

Un recipiente cubico di lato L, superiormente aperto, poggia su un piano orizzontale. Una delle facce laterali del recipiente è una paratia che può ruotare intorno ad uno spigolo di base. Tale paratia viene tenuta in posizione mediante una corda connessa al centro del suo lato superiore ed al centro dello spigolo opposto. Calcolare la tensione della corda in funzione del volume di liquido V presente nel recipiente (sia ρ la densità di tale liquido).

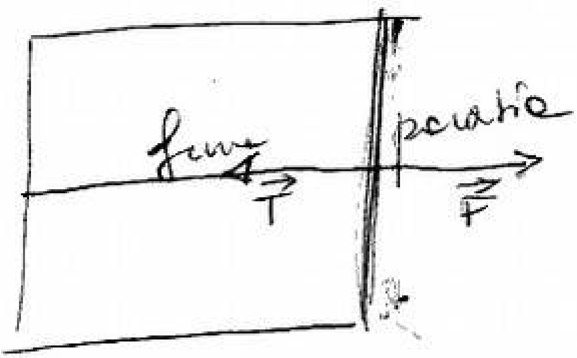


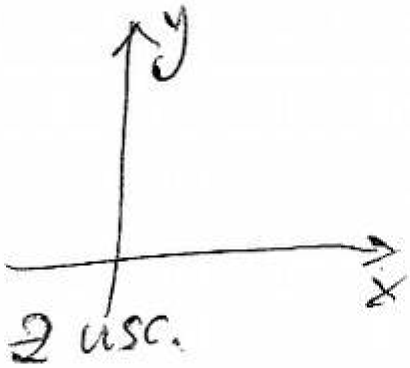
LATO





ALTO



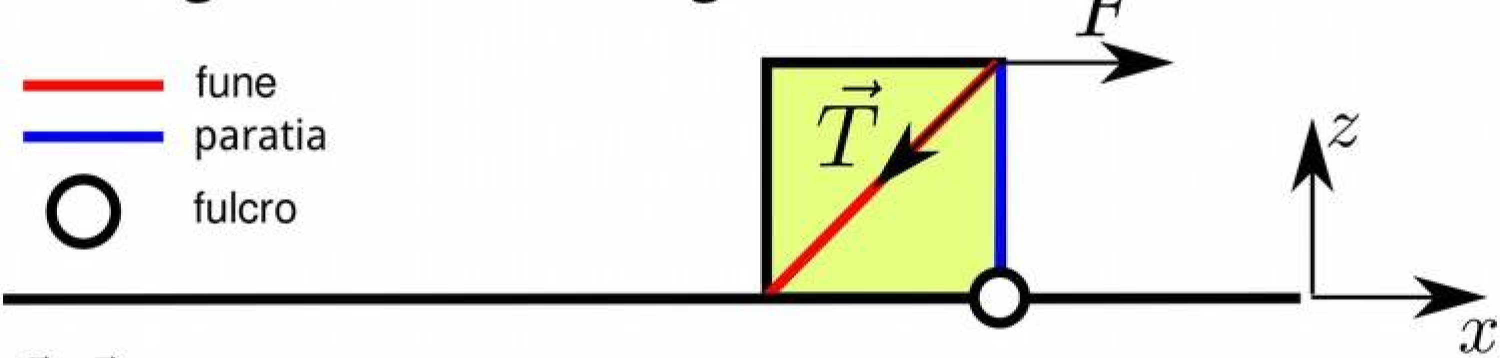


$$\vec{F} = \begin{bmatrix} F_x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \vec{T} = \begin{bmatrix} T_x \\ 0 \\ T_z \end{bmatrix}$$

Statica

$$\boxed{F_x + T_x = 0}$$

Dettaglio sulle forze in gioco



$\vec{F}$ e $\vec{T}$ sono le forze che agiscono sul punto medio del lato superiore della paratia.

La forza $\vec{F}$ ha solo componente lungo x (F_x).
La forza $\vec{T}$ ha componente lungo x (T_x) e lungo z (T_z).

Affinchè tutto il sistema sia fermo, la somma delle forze deve essere 0.

Lungo l'asse x, deve succedere che $F_x + T_x = 0$ (vedi resto dell'esercizio).
Lungo l'asse z, notiamo che è presente una sola componente, T_z.
Questa situazione è chiaramente impossibile. Infatti, se il sistema è fermo, la somma delle forze lungo tutti gli assi (e quindi anche lungo z) deve essere 0.

Manca qualcosa!

Equazione vettoriale della statica:

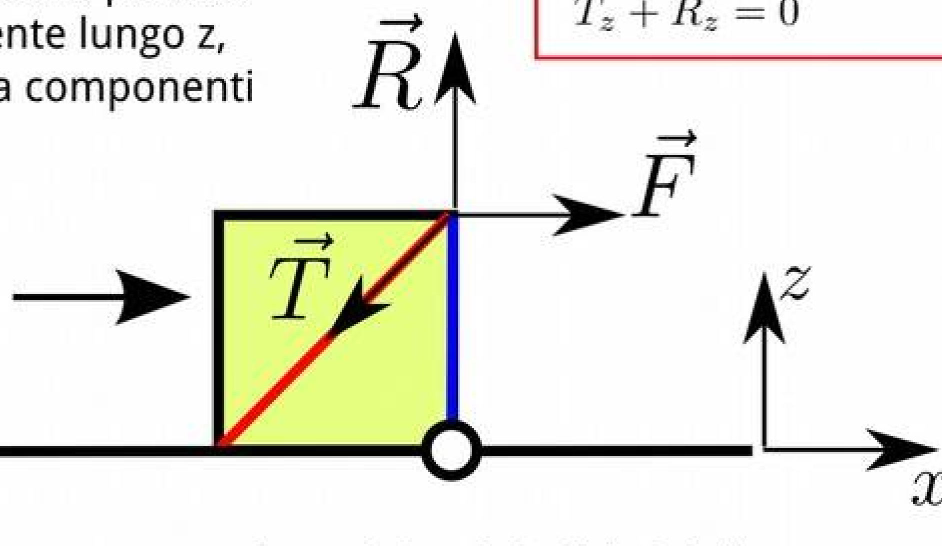
$$\vec{F} + \vec{T} + \vec{R} = 0$$

Equazioni della statica componente per componente:

$$F_x + T_x = 0$$
$$T_z + R_z = 0$$

La forza che bilancia lungo l'asse z deve quindi essere la reazione vincolare $\vec{R}$ che il pavimento esercita sulla paratia. Tale forza ha solo componente lungo z, R_z, ed è uguale a $-T_z$. Non ha componenti lungo l'asse x.

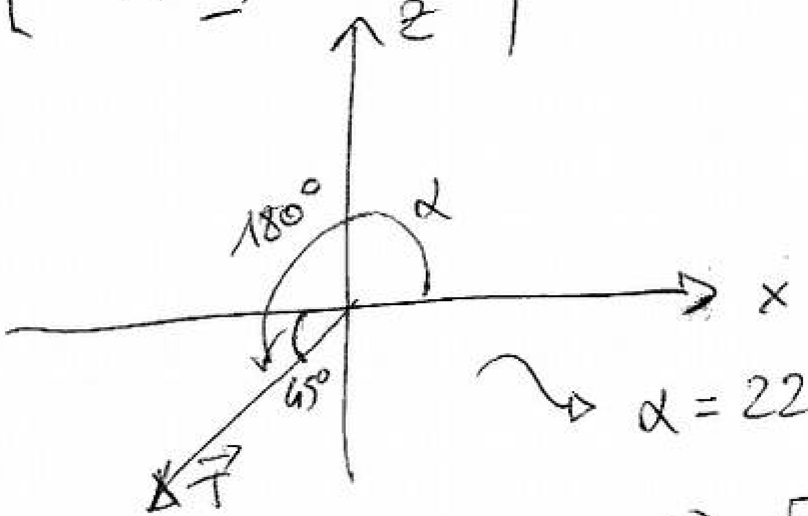
Diagramma delle forze completo



Tuttavia, il fatto che sia presente questa forza è "ovvio". Ai fini della risoluzione dell'esercizio (la paratia rimane ferma, dunque non ruota), è importante lavorare solo sulla componente x delle forze.

Usando le proprietà geometriche del sistema, posso esprimere il vettore $\vec{T}$ in funzione del suo modulo:

$$\vec{T} = \begin{bmatrix} T_x \\ 0 \\ T_z \end{bmatrix} \qquad \begin{cases} T_x = |\vec{T}| \cos\alpha \\ T_z = |\vec{T}| \sin\alpha \end{cases}$$



$\alpha = 225°$

$$T_x = |\vec{T}| \cos 225° = -|\vec{T}| \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$T_z = |\vec{T}| \sin 225° = -|\vec{T}| \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Statica

$$F_x + T_x = 0$$

$$F_x = -T_x$$

$$F_x = |\vec{T}| \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (>0)$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{|\vec{T}| = \sqrt{2}\, F_x}$$

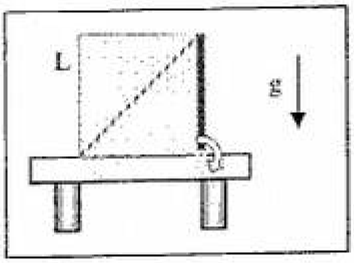
$$\vec{T} = \frac{2}{\sqrt{2}} F_x = \frac{\sqrt{2}\sqrt{2}}{\sqrt{2}} F_x = \sqrt{2}\, F_x$$

A questo punto, se calcolo $\vec{F}$ usando le leggi dell'idrostatica, trovo anche la tensione della fune, che è il dato richiesto dal problema!

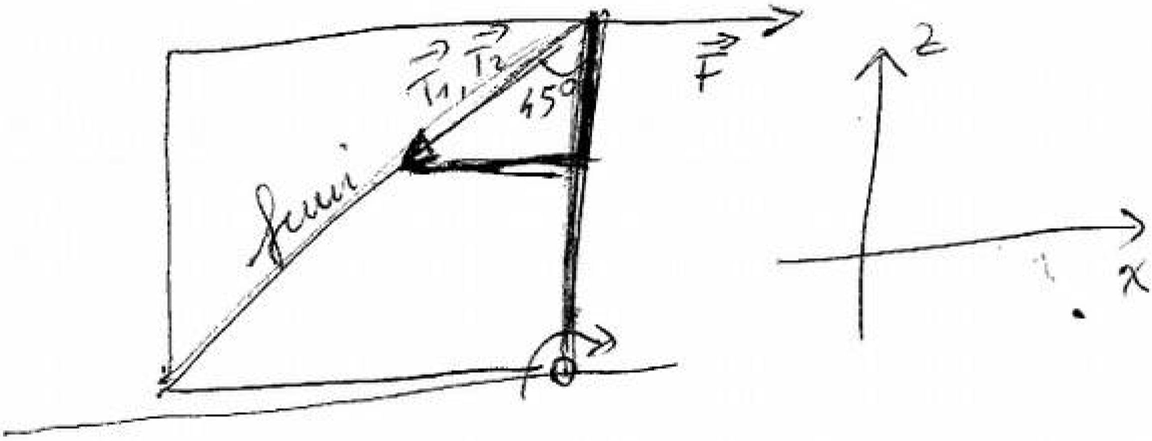
Estratto dall'esame di Fisica 1 del 26 Settembre 2016

Esercizio 3

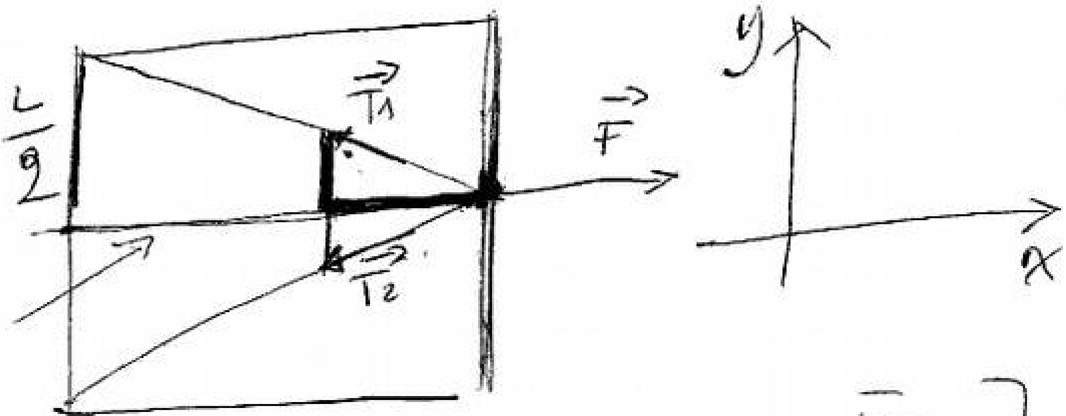
Un recipiente cubico di lato L superiormente aperto poggia su un piano orizzontale. Una delle facce laterali del recipiente è una paratia che può ruotare intorno ad uno spigolo di base. Tale paratia viene tenuta in posizione mediante due corde connesse al centro del suo lato superiore e agli estremi dello spigolo opposto. Calcolare la tensione delle corde quando il recipiente è pieno di liquido di densità ρ. [Suggerimento: disegnare il sistema anche da altri punti di vista.]



LATO

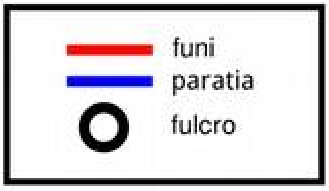


ALTO



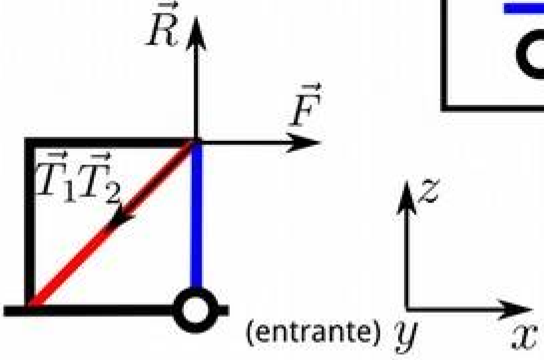
$$\vec{F} = \begin{bmatrix} F_x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \vec{T}_1 = \begin{bmatrix} T_{1x} \\ T_{1y} \\ T_{1z} \end{bmatrix} \qquad \vec{T}_2 = \begin{bmatrix} T_{2x} \\ T_{2y} \\ T_{2z} \end{bmatrix}$$

Dettaglio sulle forze in gioco



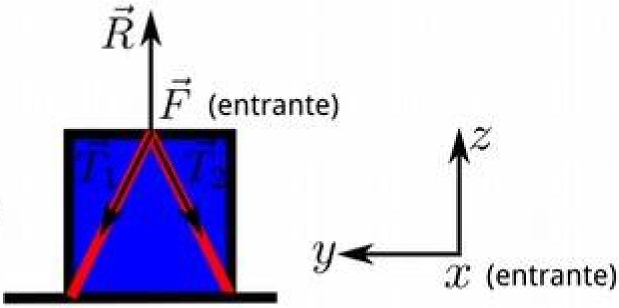
1) Vista di lato

Da questo lato, $\vec{T}_1$ e $\vec{T}_2$ sono sovrapposte



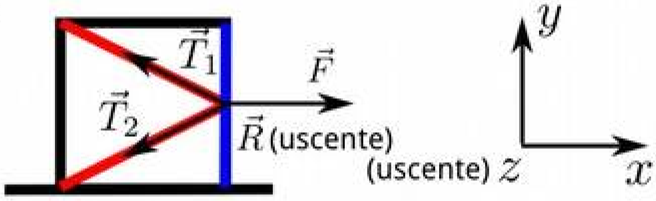
2) Vista da dietro

$\vec{F}$ non si vede perchè entra nel foglio



3) Vista dall'alto

$\vec{R}$ non si vede perchè entra nel foglio



$\vec{F}$ ha solo componente lungo x

$\vec{R}$ ha solo componente lungo z (R_z).

$\vec{T}_1$ e $\vec{T}_2$ hanno componenti lungo tutte le direzioni

---

Equazione vettoriale della statica:

$$\vec{F} + \vec{T}_1 + \vec{T}_2 + \vec{R} = 0$$

Equazioni della statica componente per componente:

$$\boxed{F_x + T_{1x} + T_{2x} = 0}$$

$$T_{1y} + T_{2y} = 0$$

$$T_{1z} + T_{2z} + R_z = 0$$

Solo la prima è importante per la risoluzione dell'esercizio!

Dal disegno (per costruzione), si vede che:

$$T_{1x} = T_{2x} < 0$$

(vedi disegni 1 e 3)

$$T_{1z} = T_{2z} < 0$$

(vedi disegni 1 e 2)

$$T_{1y} = -T_{2y}, T_{1y} > 0$$

(vedi disegni 2 e 3)

$$F_x > 0$$

(vedi disegni 1 e 3)

$$R_z > 0$$

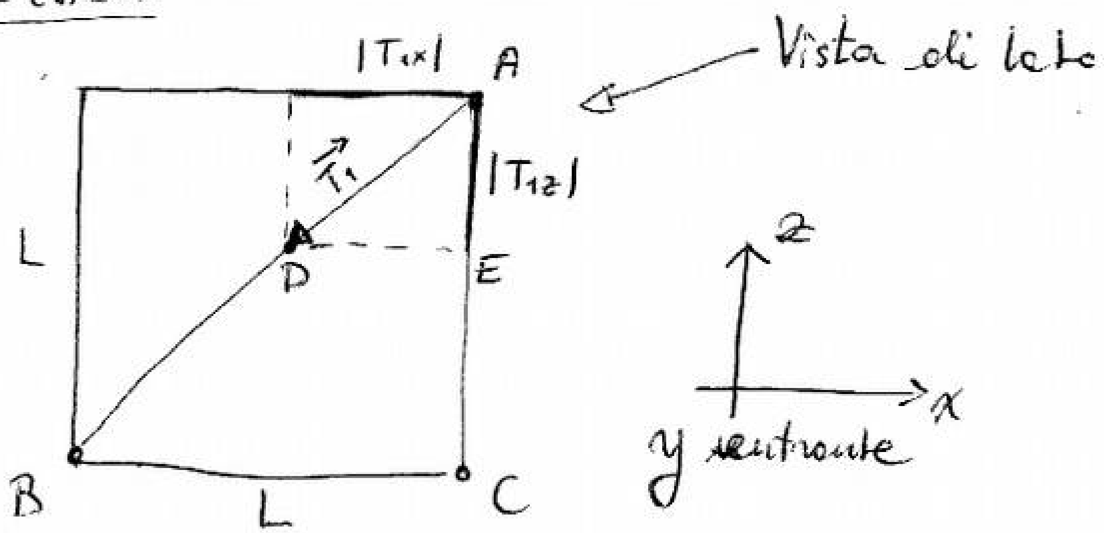
(vedi disegni 1 e 2)

$$T_{1x} = T_{2x}$$
$$T_{1y} = -T_{2y}$$
$$T_{1z} = T_{2z}$$

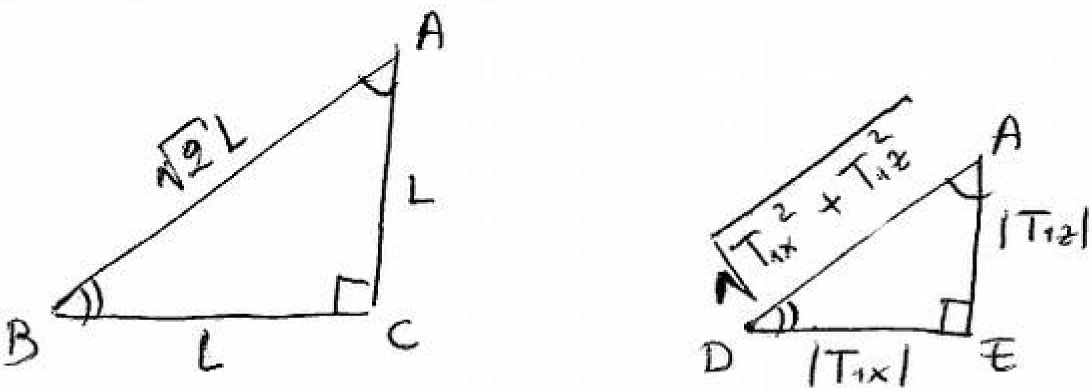
$$\vec{T_1} = \begin{bmatrix} T_{1x} \\ T_{1y} \\ T_{1z} \end{bmatrix} \qquad \vec{T_2} = \begin{bmatrix} T_{1x} \\ -T_{1y} \\ T_{1z} \end{bmatrix}$$

Diversamente dall'esercizio precedente, in questo caso è più complicato ricavare relazioni tra le componenti delle tensioni utilizzando la trigometria.
E' utile quindi utlizzare le proporzioni tra i lati di triangoli simili...

Proporzioni



Consideriamo i triangoli rettangoli ABC e ADE:



I due triangoli sono simili per costruzione. Infatti hanno tutti gli angoli uguali. Questo implica che i lati sono in proporzione fra loro.

$$\overline{AB} : \overline{AD} = \overline{AC} : \overline{AE} = \overline{BC} : \overline{DE}$$

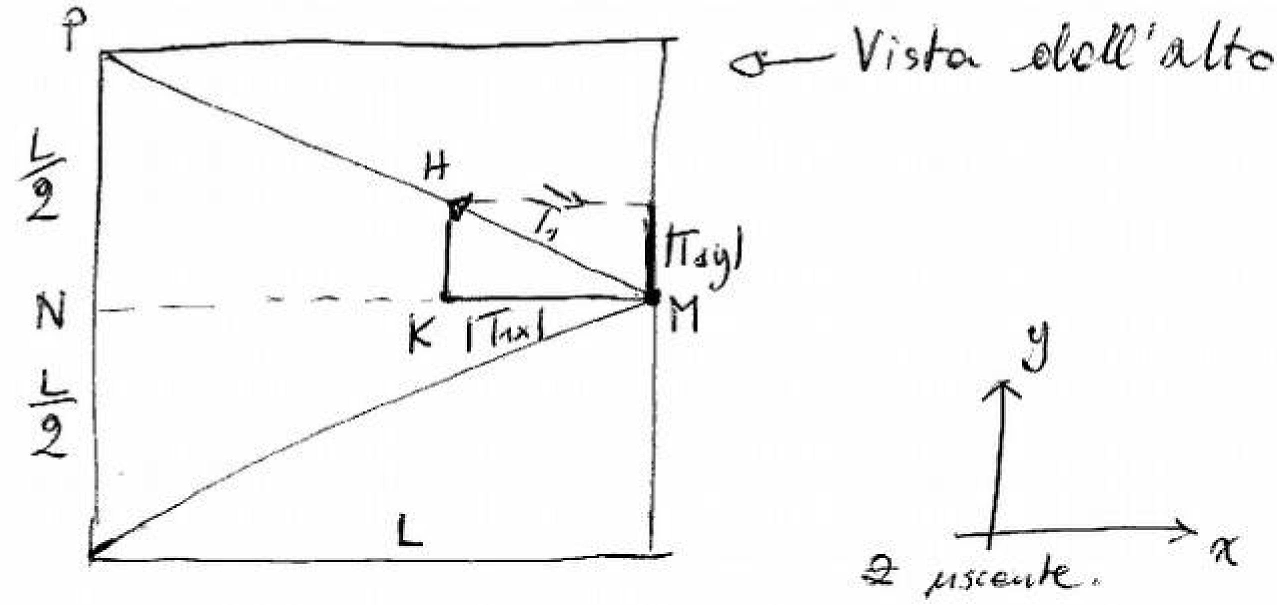
$$\sqrt{2}L : \sqrt{T_{1x}^2 + T_{1z}^2} = L : |T_{1z}| = L : |T_{1x}|$$

$$\Downarrow$$

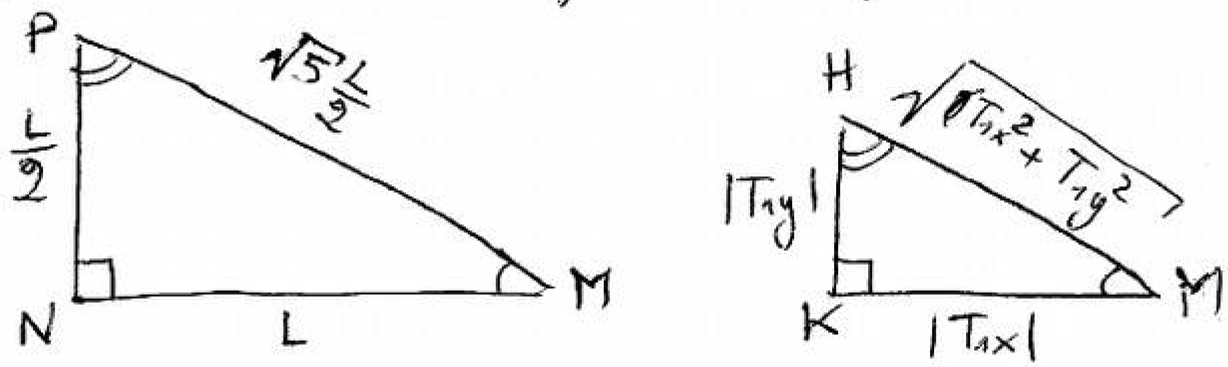
$$\frac{L}{|T_{1z}|} = \frac{L}{|T_{1x}|} \Rightarrow \boxed{|T_{1z}| = |T_{1x}|}$$

(Lo stesso vale per T_{2z} e T_{2z}).

⇒ Ho trovato una relazione tra le componenti di un vettore senza usare la trigonometria!



Consideriamo i triangoli rettangoli MNP e MKH:



Ragionando come prima:

$$\overline{MP} : \overline{MH} = \overline{MN} : \overline{MK} = \overline{NP} : \overline{KH}$$

$$\sqrt{5}\,\frac{L}{2} : \sqrt{T_{1x}^2 + T_{1y}^2} = L : |T_{1x}| = \frac{L}{2} : |T_{1y}|$$

$$\frac{L}{|T_{1x}|} = \frac{\frac{L}{2}}{|T_{1y}|} \Rightarrow \frac{|T_{1y}|}{|T_{1x}|} = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{|T_{1x}| = 2\,|T_{1y}|}$$

equivalentemente

$$|T_{1y}| = \frac{|T_{1x}|}{2}$$

(lo stesso vale per T_{2x} e T_{2y})

$$\vec{T_1} = \begin{bmatrix} T_{1x} \\ T_{1y} \\ T_{1z} \end{bmatrix}, \qquad \vec{T_2} = \begin{bmatrix} T_{1x} \\ -T_{1y} \\ T_{1z} \end{bmatrix}$$

Grazie alle proporzioni, abbiamo scoperto che:

- $|T_{1z}| = |T_{1x}|$

Inoltre, T_{1x} e T_{1z} sono entrambi negativi (vedi slide 13). Per cui:

$$\boxed{T_{1z} = T_{1x}}$$

- $|T_{1y}| = \dfrac{|T_{1x}|}{2}$

Inoltre, $T_{1y} > 0$ mentre $T_{1x} < 0$ (slide 13). Per cui:

$$T_{1y} = -\frac{T_{1x}}{2}$$

$$\Rightarrow \vec{T_1} = \begin{bmatrix} T_{1x} \\ -\frac{T_{1x}}{2} \\ T_{1x} \end{bmatrix}, \qquad \vec{T_2} = \begin{bmatrix} T_{1x} \\ \frac{T_{1x}}{2} \\ T_{1x} \end{bmatrix}$$

Statica lungo x: $F_x + T_{1x} + T_{2x} = 0 \Rightarrow$

$$F_x + T_{1x} + T_{1x} = 0 \Rightarrow$$

$$\boxed{F_x = -2T_{1x}}$$

A questo punto, se calcolo $\vec{F}$ usando le leggi dell'idrostatica, trovo anche la tensione della fune!

Estratto dall'esame di Fisica 2 del 26 Gennaio 2018

Esercizio 1

Si consideri un tetraedro regolare di lato L e vertici A,B,C e D. Il perimetro del triangolo BCD è uniformemente carico, con densità di carica assegnata λ_0. Un dipolo elettrico $\mathbf{p}$ sta sul vertice A ed è orientato lungo lo spigolo AB. Determinare il modulo del momento torcente che agisce sul dipolo. Si supponga che il dipolo resti in A e ruoti sotto l'effetto del momento torcente elettrostatico e di un momento viscoso, fino a fermarsi nell'orientazione di equilibrio. Qual è la forza elettrostatica agente sul dipolo in questa configurazione?

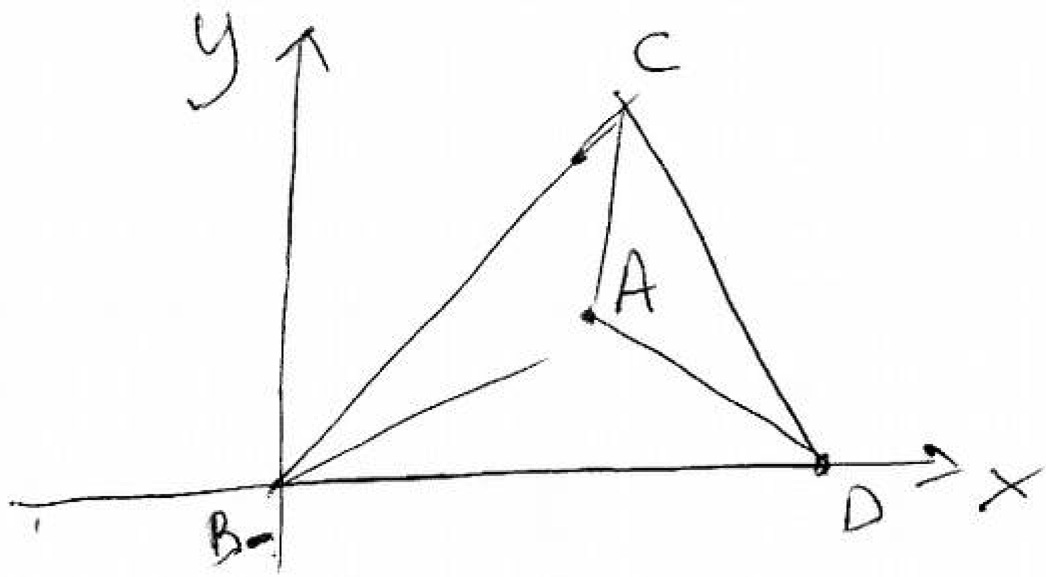
Estratto dall'esame di Fisica2 del 12 Febbraio 2018

Esercizio 1

Si consideri un cono retto il cui raggio di base misura a, e la cui altezza misura $a\sqrt{3}$. Sulla faccia inferiore del cono è uniformemente distribuita della carica elettrostatica con densità σ. Sul vertice del cono è posto un dipolo elettrico di momento p orientato come una delle generatrici del cono medesimo. Calcolare l'intensità del momento torcente che agisce sul dipolo e il modulo della componente della forza agente sul dipolo nella direzione dell'asse del cono.

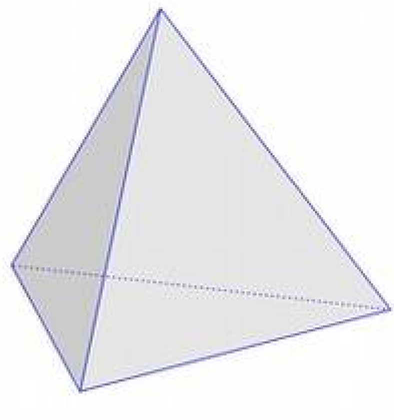
Tetraedro

Solido regolare con 4 facce. Ogni faccia è un triangolo equilatero.



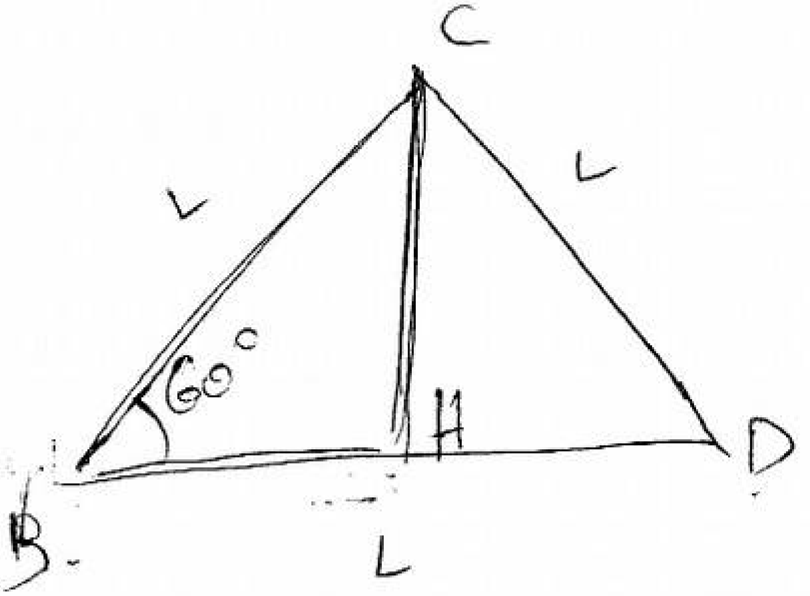
Alto

Tetraedro in 3 dimensioni ->



Triangolo equilatero

L'altezza divide in 2 un lato
ed è pari a $\frac{\sqrt{3}}{2}L$

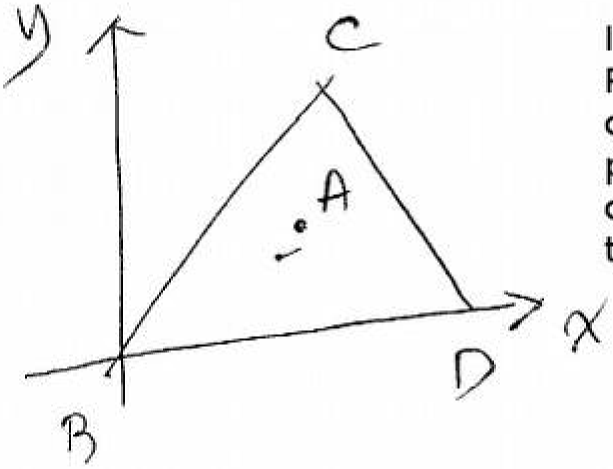


Ipotenusa di BCH è L

$$CH = L \sin 60^\circ = L\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$BH = L \cos 60^\circ = L\frac{1}{2}$$

$$\vec{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \vec{C} = \begin{bmatrix} \frac{L}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2}L \\ 0 \end{bmatrix} \quad \vec{D} = \begin{bmatrix} L \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$



Il punto A ha quota z diversa da 0. Però possiamo calcolare le sue componenti x ed y osservando che, proiettato sulla base BCD, esso corrisponde al baricentro del triangolo.

$$x_A = \frac{x_B + x_C + x_D}{3} = \frac{L}{2}$$

$$y_A = \frac{y_B + y_C + y_D}{3} = \frac{\sqrt{3}L}{6}$$

Possiamo ora calcolare la quota di A, osservando che gli spigoli del tetraedro sono tutti uguali e lunghi L. Calcoliamo ad esempio la lunghezza dello spigolo AB in funzione della quota di A.

$$\vec{A} = \begin{bmatrix} \frac{L}{2} \\ \frac{\sqrt{3}L}{6} \\ z_A \end{bmatrix}$$

Trovo z_A ponendo $|\vec{A} - \vec{B}| = L$

$$\vec{A} - \vec{B} = \vec{A} \longrightarrow |\vec{A}| = L$$

$$\sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}L}{6}\right)^2 + z_A^2} = L$$

$$\left(\frac{L}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}L}{6}\right)^2 + z_A^2 = L^2$$

$$\frac{L^2}{4} + \frac{3L^2}{36} + z_A^2 = L^2$$

$$z_A^2 = L^2\left(1 - \frac{1}{4} - \frac{3}{36}\right) = L^2\,\frac{24}{36} = L^2 \cdot \frac{2}{3}$$

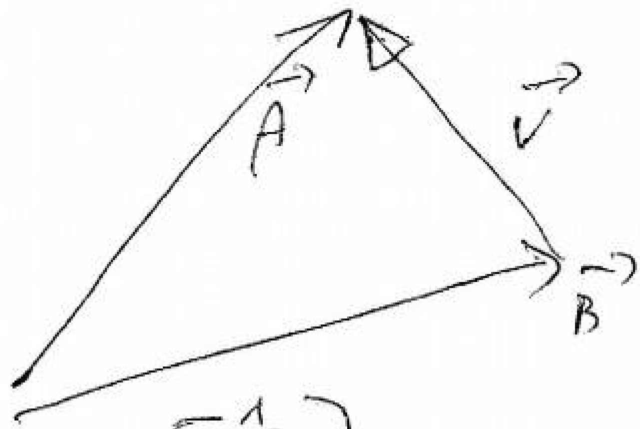
$$\boxed{z_A = \pm\sqrt{L^2 \cdot \frac{2}{3}} = \pm L\sqrt{\frac{2}{3}}}$$

$$\boxed{z_A = L\sqrt{\frac{2}{3}}}$$

Scelgo la soluzione positiva perchè assumo che A abbia quota positiva.

Trovare il versore dello spigolo AB.

$$\vec{v} = \vec{A} - \vec{B}$$



$$\vec{v} = \vec{A}$$

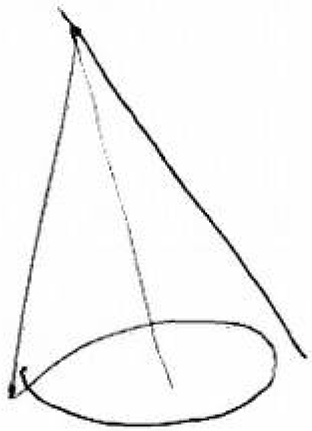
$$\vec{u} = \frac{1}{|\vec{v}|}\,\vec{v}$$

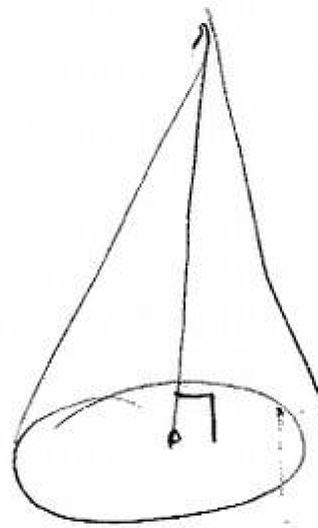
$$\vec{u} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{6} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} \end{bmatrix}$$

Noto il versore dello spigolo, è noto anche il vettore che rappresenta il dipolo elettrico...

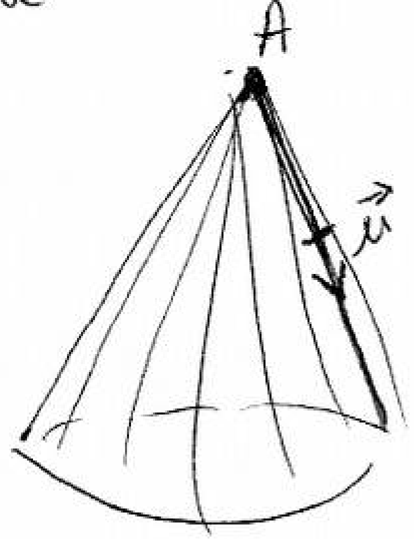
Cono <u>retto</u>

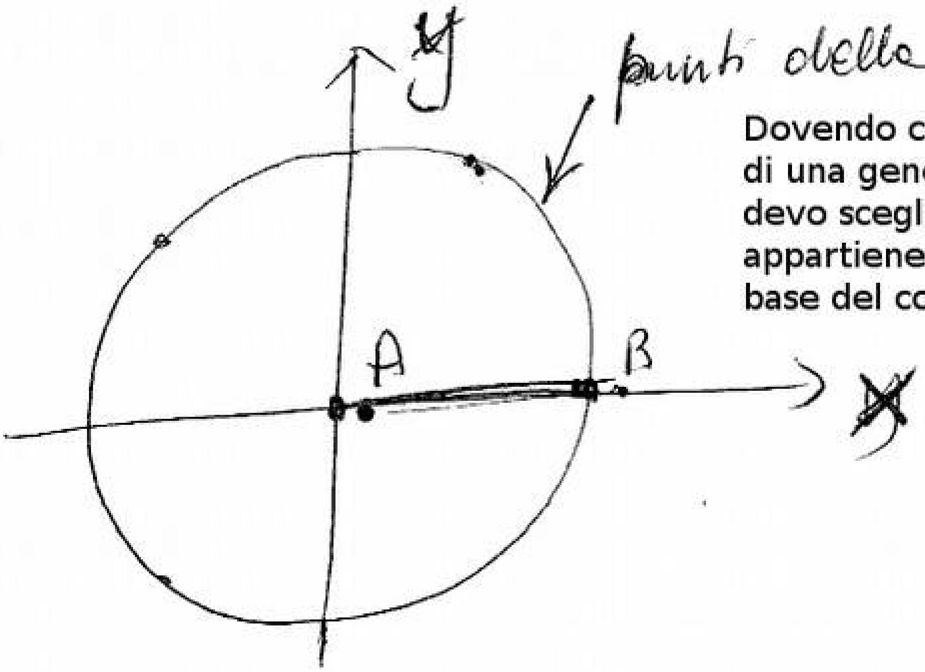
La retta che unisce il vertice al centro della base è ortogonale alla base





<u>Generatrice</u> Una retta che va dal vertice fino a un punto sul bordo della base.





Dovendo calcolare la direzione di una generatrice del cono, devo scegliere un punto B che appartiene alla circonferenza della base del cono.

Alto

$$\vec{A} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ a\sqrt{3} \end{bmatrix} \qquad \vec{B} = \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{v} = \vec{A} - \vec{B} = \begin{bmatrix} -a \\ 0 \\ a\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

$$\vec{u} = \frac{1}{|\vec{v}|}\vec{v} = \dots$$