Corso di recupero di Fisica 2016/2017

Dario Madeo

Lezione del 21/09/2017

Slides disponibili all'indirizzo
http://www.dii.unisi.it/~madeo/crf/crf1617.html

Esercizio estratto dall'esame di Fisica del 10 Luglio 2017

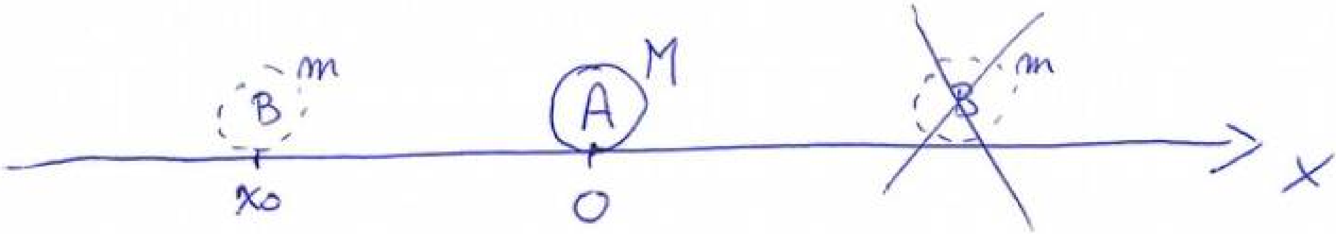
Esercizio 1

Lungo un binario orizzontale viene definita un'ascissa x. Un corpo A di massa M può muoversi liberamente sul binario ed è inizialmente fermo in x=0. Un corpo B di massa m si muove invece sotto l'effetto di una forza conservativa associata all'energia potenziale U(x) così definita:

$$\boxed{U(x)=\begin{cases}\beta x^3 & se \quad x<0\\ 0 & se \quad x\geq 0\end{cases}}$$

dove β è una costante assegnata. Inizialmente anche B è fermo, ma, per effetto di quella forza, esso inizia a muoversi e va ad urtare A in un processo elastico ed istantaneo.

a) discutere segno e dimensioni del parametro β;
b) esprimere la velocità di A dopo l'urto in termini di m, M, β e di x_0, posizione iniziale di B;
c) stabilire per quali valori di m dopo il primo urto ne avvengono altri.



$x_0 < 0$

$$F(x) = -U'(x) = \begin{cases} -3\beta x^2 & x<0 \\ 0 & x\geq 0\end{cases}$$

Siamo in $x_0 < 0$. La forza è

$$F(x_0) = -3\beta x_0^2$$

Vogliamo che la forza punti verso dx.
Cioè vogliamo che $F(x_0) > 0$

$$-3\beta x_0^2 > 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\beta < 0}$$

Il corpo B è soggetto a una forza $F(x) = -3\beta x^2 \quad \forall x \in [x_0, 0]$.

$$L_{x_0 \to 0} = K_0 - K_{x_0}$$

$$L_{x_0 \to x_0} = \int_{x_0}^{0} F(x) dx = \int_{x_0}^{0} (-3\beta x^2) dx =$$

$$= -3\beta \left[\frac{x^3}{3}\right]_{x_0}^{0} = \boxed{\beta x_0^3}$$

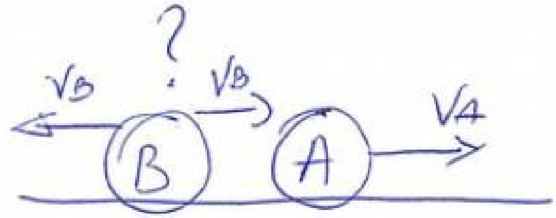
$$K_{x_0} = 0 \qquad K_0 = \frac{1}{2} m v_0^2$$

$$\beta x_0^3 = +\frac{1}{2} m v_0^2$$

$$v_0 = +\sqrt{\frac{2\beta x_0^3}{m}}$$

Un attimo prima dell'urto

$$V_B = \frac{V_0(m-M)}{m+M}$$

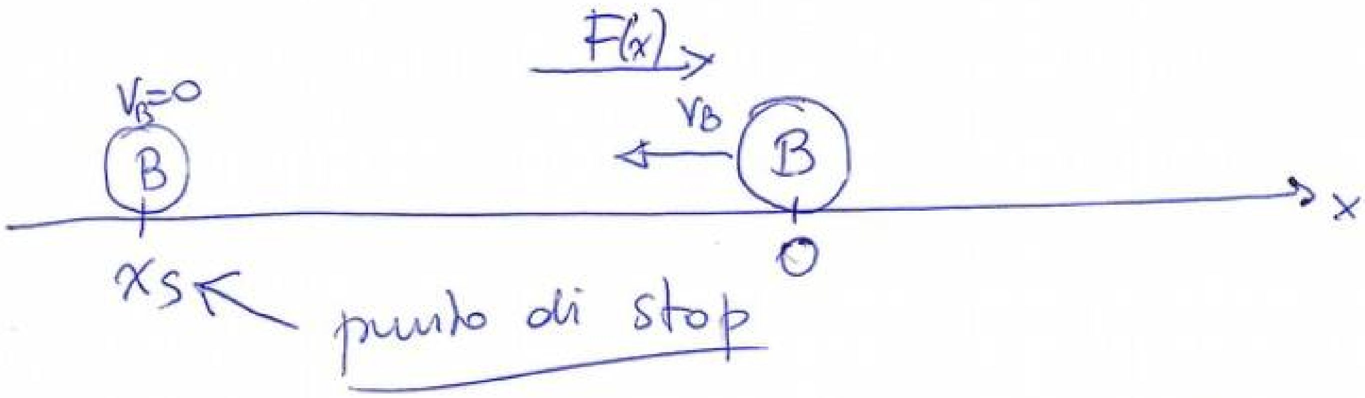


$$V_A = \frac{2mV_0}{m+M}$$

Caso 1 $\quad m > M \Rightarrow V_B > 0$

È da escludere!

Caso 2 $\quad m < M \Rightarrow V_B < 0$



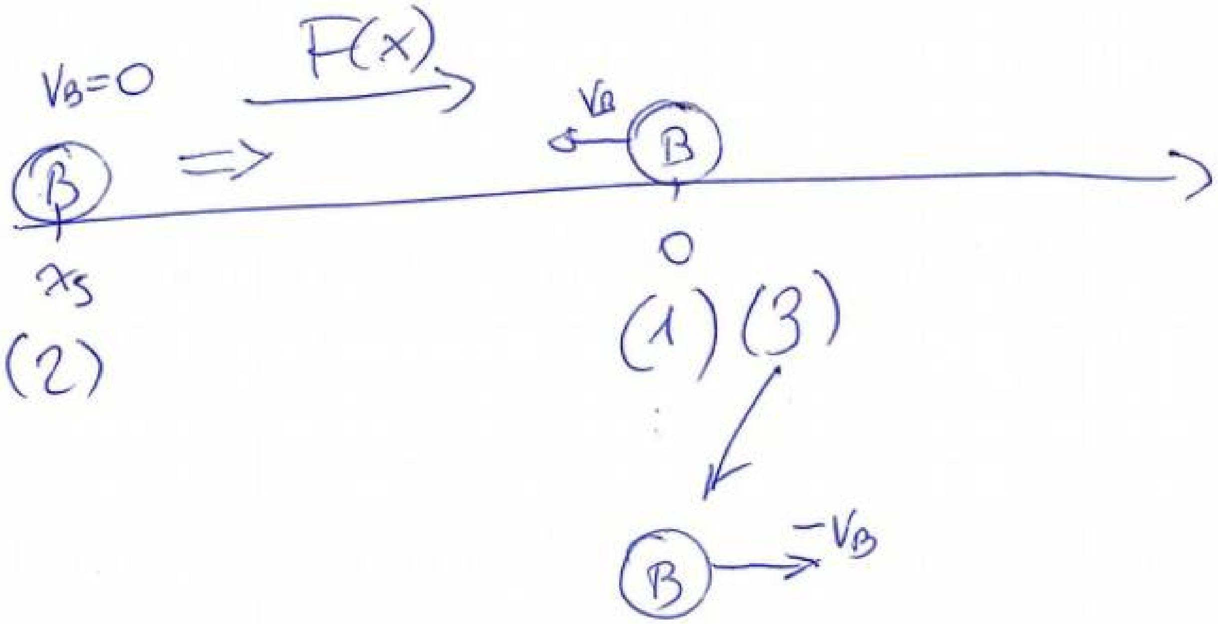
Usiamo la cons. dell'energia meccanica

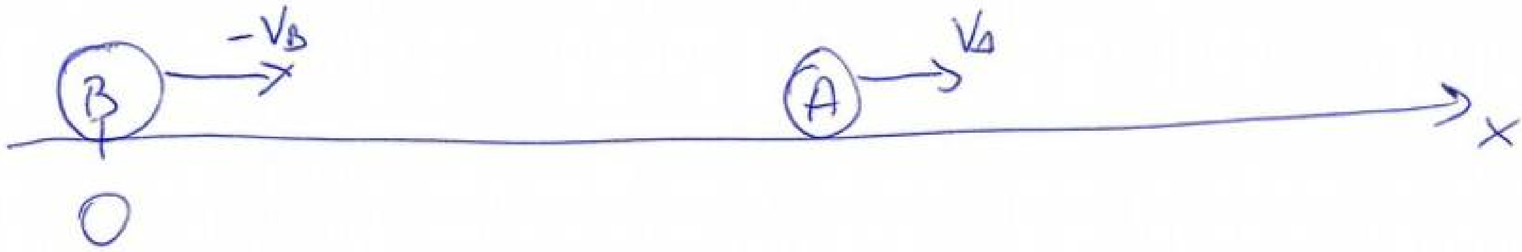
$$U_0 + K_0 = U_s + K_s$$

$$\boxed{0 + \underbrace{\cancel{\beta x_0^3}}_{\frac{1}{2}mV_B^2} = +\beta x_s^3 + 0}$$

$$\frac{1}{2} m V_B^2 = + \beta x_S^3$$

$$x_S = \sqrt[3]{+\frac{\cancel{\beta} m V_B^2}{2\beta}} < 0$$

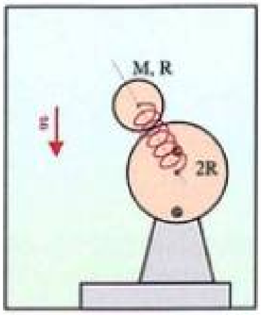




Se $-V_B > V_A$, allora ho un nuovo urto.

$$-\frac{\cancel{V_0}(m-M)}{\cancel{m+M}} > \frac{2m\cancel{V_0}}{\cancel{m+M}}$$

$$M - m > 2m \qquad \boxed{M > 3m}$$

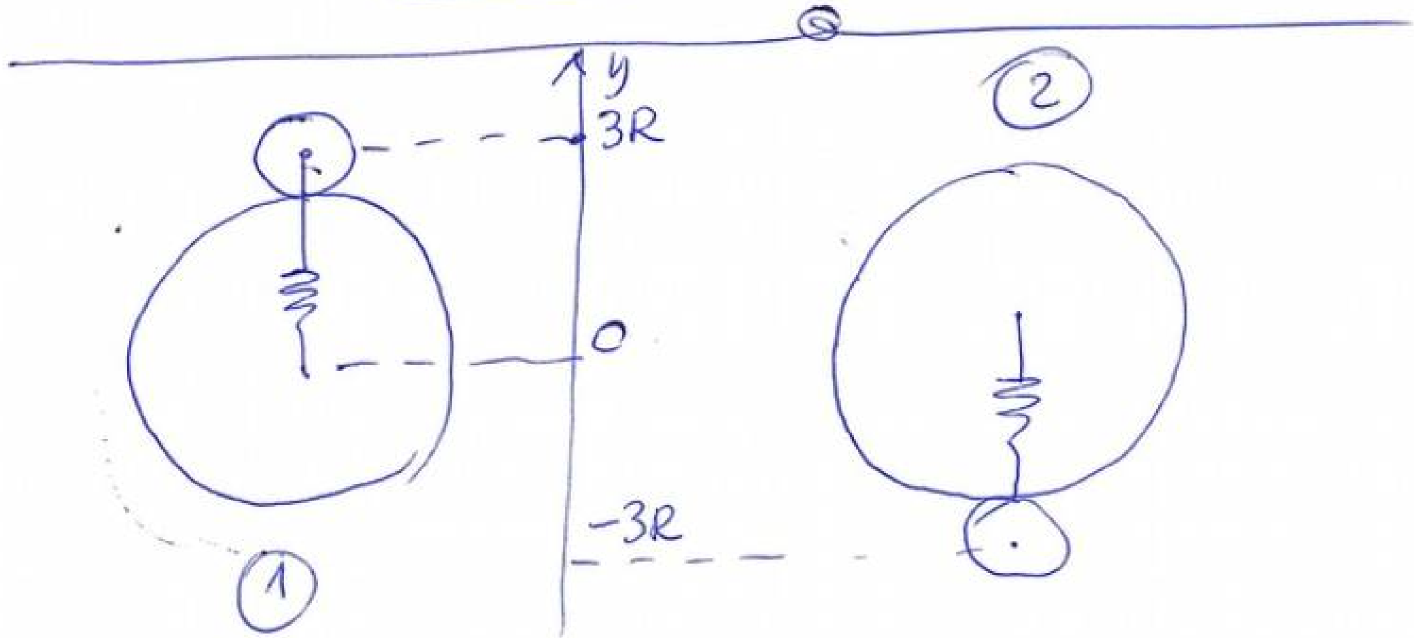


Esercizio 2

Si hanno due cilindri, rispettivamente di raggio 2R e R. Il primo di essi è fisso, mentre l'altro, che ha massa M, può girarci intorno compiendo un moto di puro rotolamento. I due cilindri sono connessi da una molla di costante k e lunghezza a riposo 2R applicata ai rispettivi assi. Determinare per quali valori della costante elastica non si ha distacco fra i due cilindri sapendo che il cilindro mobile parte (da fermo) dalla sommità di quello fisso e arriva nel punto inferiore. Determinare inoltre la velocità massima assunta dal centro di massa del cilindro piccolo.

La molla è sempre lunga 3R.
La sua lunghezza di riposo $L_0 = 2R$
$\Rightarrow$ L'estensione è sempre pari a

$$\boxed{3R - L_0 = R}$$



$$U_1 + K_1 = U_2 + K_2$$

$$+3RMg + 0 = -3RMg + K_2$$

$$\boxed{K_2 = 6RMg}$$

$$K_2 = \frac{1}{2} M V_T^2 + \frac{1}{2} I_0 \omega^2$$

V_T: velocità tangenziale del CDM del corpo piccolo.

ω: velocità angolare di rotazione intorno al CDM del corpo piccolo.

I_0: mom. di inerzia rispetto al CDM.

$$I_0 = \frac{1}{2} M R^2$$

$V_T = ?$

Nel moto di puro rotolamento si ha che:

$$V_{PC} = V_T + R\omega$$

Siccome il cilindro grosso è fermo, allora

$$V_{PC} = 0$$

$$V_T + R\omega = 0 \quad \Rightarrow \quad V_T = -R\omega$$

$$K_2 = 6RMg$$

$$\frac{1}{2}M(-R\omega)^2 + \frac{1}{2}I_o\omega^2 = 6RMg$$

$$\frac{1}{2}(\underbrace{I_o + R^2M}_{I_{pc}})\omega^2 = 6RMg$$

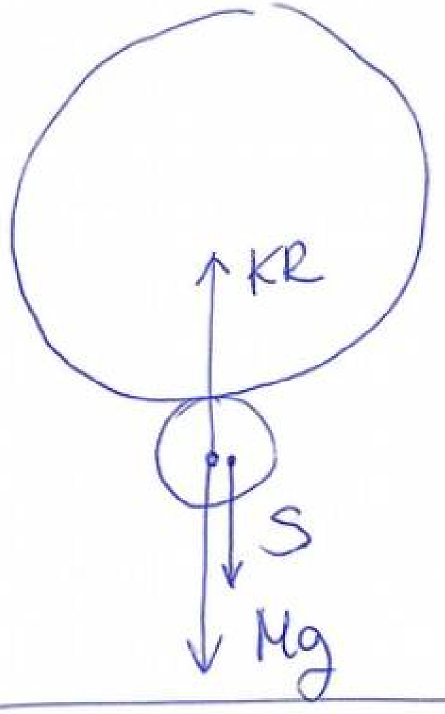
$$\frac{1}{2}\left(\frac{MR^2}{2} + MR^2\right)\omega^2 = 6RMg$$

$$\frac{3}{4}\cancel{M}R^{\cancel{2}}\omega^2 = 6\cancel{R}\cancel{M}g$$

$$\boxed{\omega^2 = \frac{24g}{3R} = \frac{8g}{R}}$$

$$V_T^2 = (-R\omega)^2 = R^2\omega^2 = 8gR$$

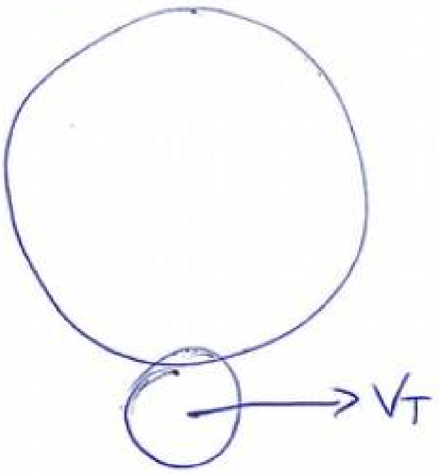
$$\boxed{V_T = \sqrt{8gR}}$$



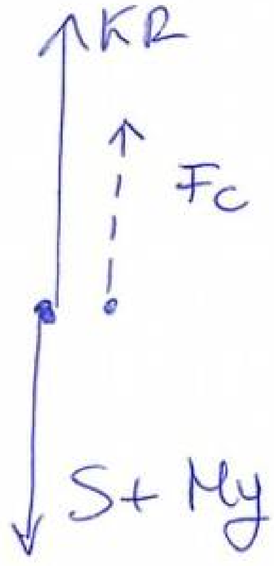
S è la reazione vincolare sul corpo

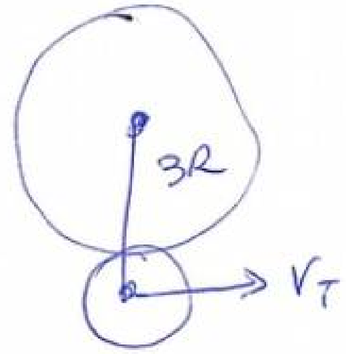
Se è fermo, allora

$$\boxed{KR = S + Mg}$$



Siccome si muove (ruota), allora la forza netta non può essere nulla, ma deve essere "centripeta"





$$F_c = KR - S - Mg > 0$$

$$\boxed{F_c = M\frac{v_T^2}{3R}} = \frac{M\,8gR}{3R} = Mg\frac{8}{3}$$

$$Mg\frac{8}{3} = KR - S - Mg.$$

$$Mg\frac{8}{3} + Mg + S = KR$$

$$\frac{11}{3}Mg + S = KR$$

$$S > 0$$

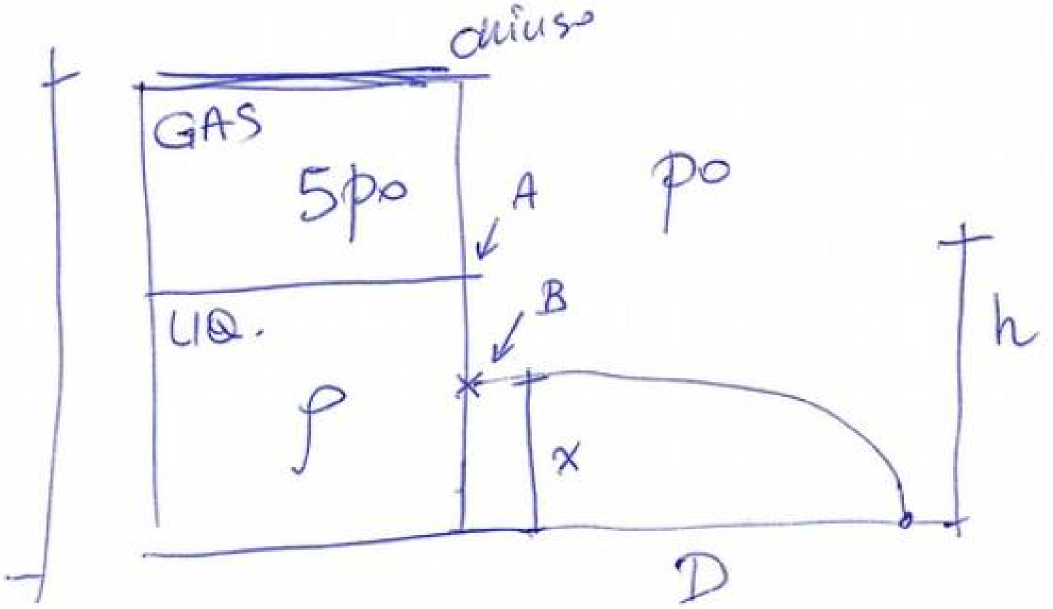
$$\cancel{\frac{11}{3}Mg < KR}$$

$$\frac{11}{3}Mg < KR \Rightarrow \boxed{K > \frac{11Mg}{3R}}$$

Estratto dall'esame di Fisica 1 del 10 Luglio 2017

Esercizio 3

Un recipiente cilindrico di altezza 2h poggia su un piano orizzontale ed è superiormente chiuso. Esso è riempito per metà di liquido omogeneo di densità ρ, e per metà di gas a pressione $5p_0$, dove p_0 è la pressione atmosferica esterna. Determinare a quale distanza dal fondo si deve praticare un piccolo foro orizzontale affinché il primo getto di liquido che fuoriesce cada sul piano alla massima distanza possibile dalla parete del recipiente.



Th. Bernoulli

(A) $5p_0 + \rho g h$

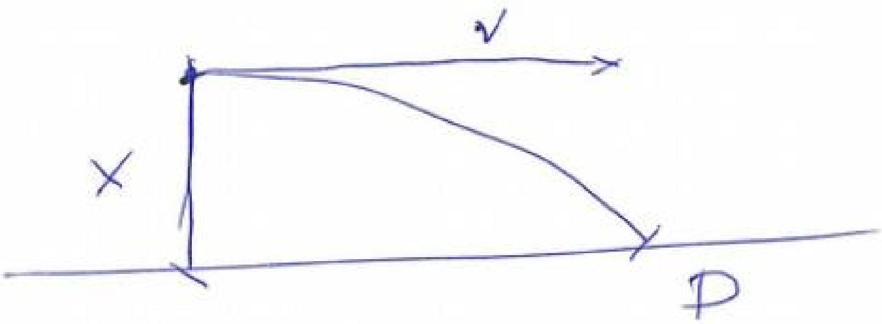
(B) $p_0 + \rho g x + \frac{1}{2}\rho v^2$

(A) = (B)

$$5p_0 + \rho g h = p_0 + \rho g x + \frac{1}{2}\rho v^2$$

$$\frac{1}{2}\rho v^2 = \rho g (h - x) + 4p_0$$

$$v = \sqrt{8\frac{p_0}{\rho} + g(h-x)}$$



In quanto tempo tocca terra?

$$x = \frac{1}{2} g t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2x}{g}}$$

$$D = vt$$

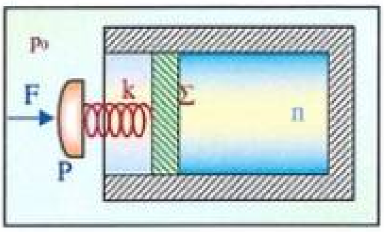
$$= \sqrt{\left(\frac{8p_0}{\rho} + g(h-x)\right)\frac{2x}{g}}$$

$$\max D^2(x) \Rightarrow x^* = \frac{A}{4}$$

$$A = \frac{16 p_0}{g\rho} + 2h$$

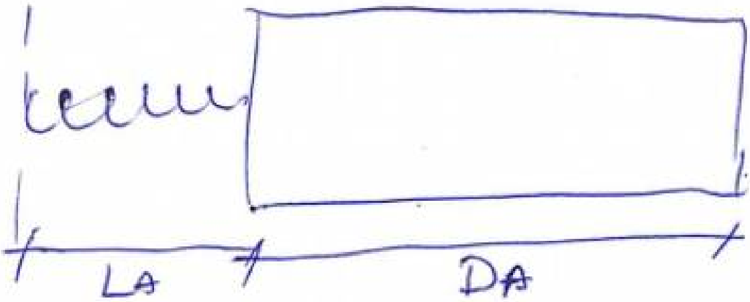
Estratto dall'esame di Fisica 1 del 10 Luglio 2017

Esercizio 4

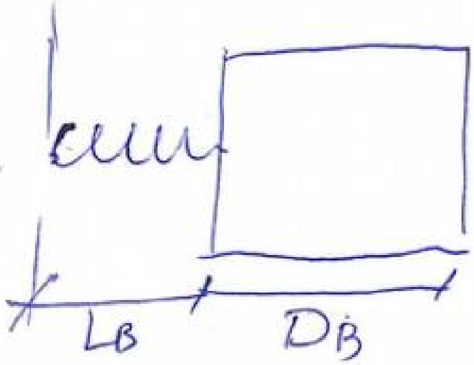


La figura mostra un cilindro di sezione Σ. Esso contiene una mole di gas perfetto monoatomico a contatto termico con l'atmosfera, che è alla temperatura T_A e alla pressione p_0. Il gas è inizialmente a pressione $2p_0$, e viene lentamente compresso per mezzo di un pistone connesso ad una molla di costante elastica k, applicando una forza F progressivamente crescente sul pomello P posto all'estremità libera della molla. Si procede fino a far dimezzare il volume del gas. Ora il P viene bloccato ed il gas viene raffreddato lentamente fino a quando la molla arriva alla sua lunghezza di riposo. Rappresentare il processo sul piano pV. Calcolare l'energia potenziale elastica all'inizio e alla fine della compressione e calcolare il lavoro svolto dal gas in questa prima fase. Calcolare poi la variazione di volume ed il lavoro subito dal gas nella seconda fase.

A

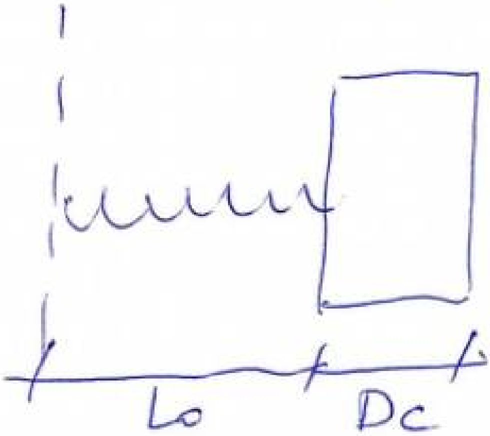


B



$$D_B = \frac{D_A}{2}$$

C



$p_A = 2p_0$

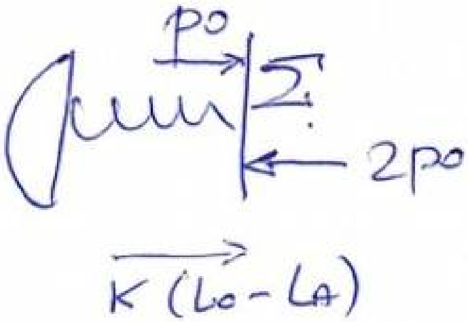
T_A

$V_A = ?$

$$p_A V_A = R T_A$$

$$2p_0 V_A = R T_A$$

$$V_A = \frac{R T_A}{2p_0}$$



L_0: lunghezza di riposo.

$$K(L_0 - L_A) + \Sigma p_0 = \Sigma\, 2p_0$$

$$(L_0 - L_A) = \frac{\Sigma p_0}{K}$$

$$U_A = \frac{1}{2} K (L_0 - L_A)^2 = \frac{\Sigma^2 p_0^2}{2K}.$$

(B) $V_B = \frac{V_A}{2} = \frac{RT_A}{4p_0}$

$T_B = T_A$

$$p_B = \frac{RT_B}{V_B} = \frac{RT_A}{RT_A} 4p_0 = 4p_0$$

$$K(L_0 - L_B) + \Sigma p_0 = \Sigma 3 p_0$$

$$(L_0 - L_B) = \frac{2\Sigma p_0}{K}$$

$$U_B = \frac{1}{2} K (L_0 - L_B)^2 = \frac{9\Sigma^2 p_0^2}{2K}.$$

$$L_B + D_B = L_0 + D_C$$

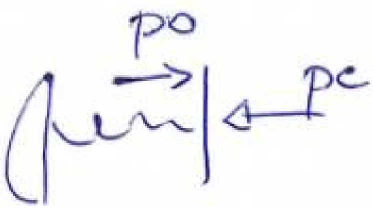
$$D_C = (L_0 - L_B) - D_B$$

$$= \frac{2\Sigma p_0}{k} - D_B$$

$$D_B = \frac{V_B}{\Sigma} = \frac{V_A}{2\Sigma} = \frac{RT_A}{2p_0 \cdot 2\Sigma} =$$

$$= \frac{RT_A}{4p_0 \Sigma}$$

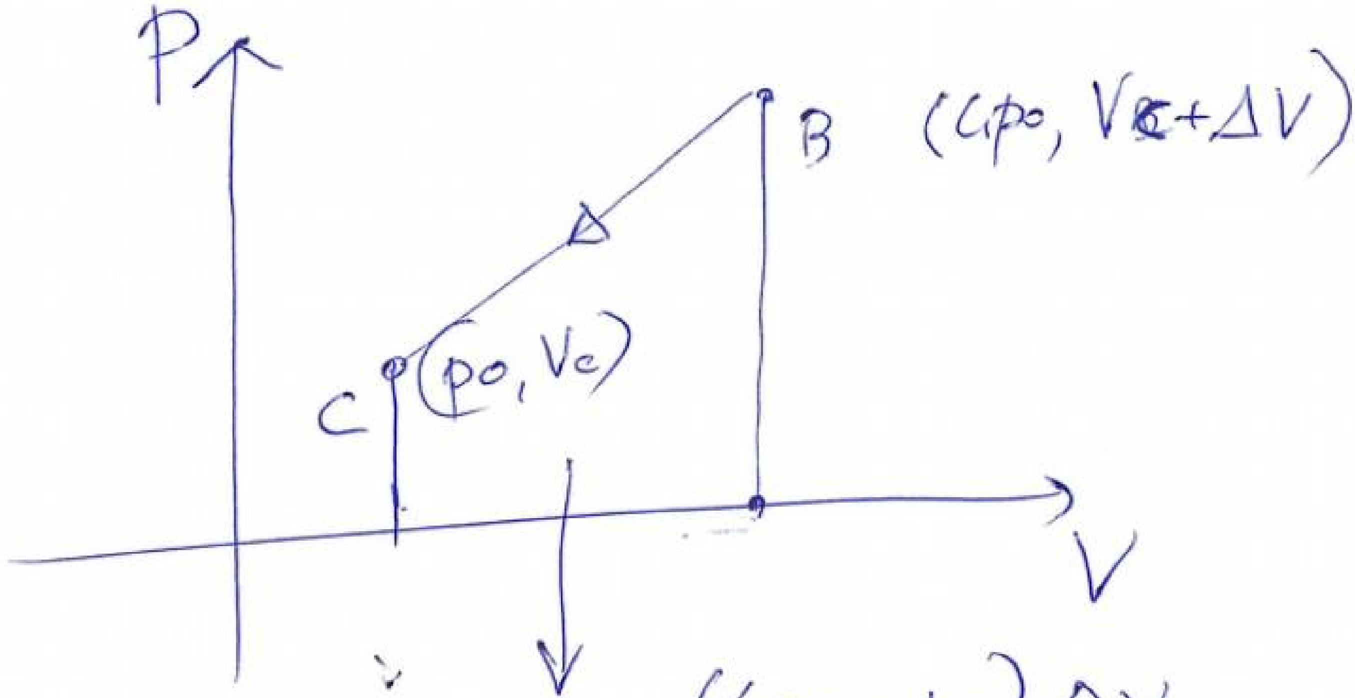
$$\boxed{D_C = \frac{2\Sigma p_0}{k} - \frac{RT_A}{4p_0\Sigma}}$$



$$\boxed{p_C = p_0}$$

$$\boxed{V_C = D_C \Sigma}$$

$$\boxed{T_C = \frac{p_C V_C}{R}}$$



$$\text{area} = \frac{(4p_0 + p_0)\Delta V}{2} = \frac{5p_0}{2}\Delta V \equiv \underline{\text{Lavoro}}$$

Lavoro compiuto dal gas è

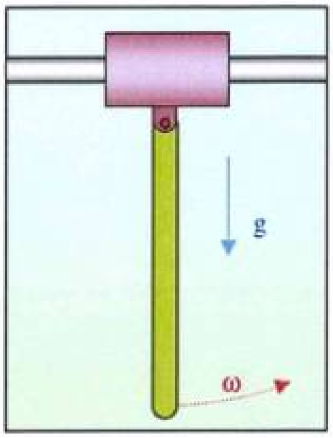
$$-\frac{5p_0}{2}\Delta V$$

Lavoro subito

$$\frac{5p_0}{2}\Delta V$$

Esercizio 2

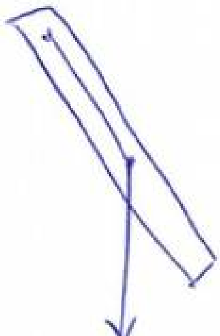
Un manicotto di massa M è libero di scorrere lungo una guida liscia orizzontale. Al manicotto è connessa una sbarretta omogenea di lunghezza L e massa 2M per mezzo un perno liscio orizzontale applicato al suo estremo. Inizialmente (vd figura) il manicotto è fermo, la sbarretta è in posizione verticale e sta ruotando a velocità angolare ω. Dopo aver discusso in dettaglio le quantità che si conservano nel moto del sistema, determinare l'ampiezza angolare delle oscillazioni della sbarretta e la velocità massima assunta dal manicotto.



La qtà di moto lungo x si conserva poiché le forze esterne (peso) agiscono solo lungo y. ||

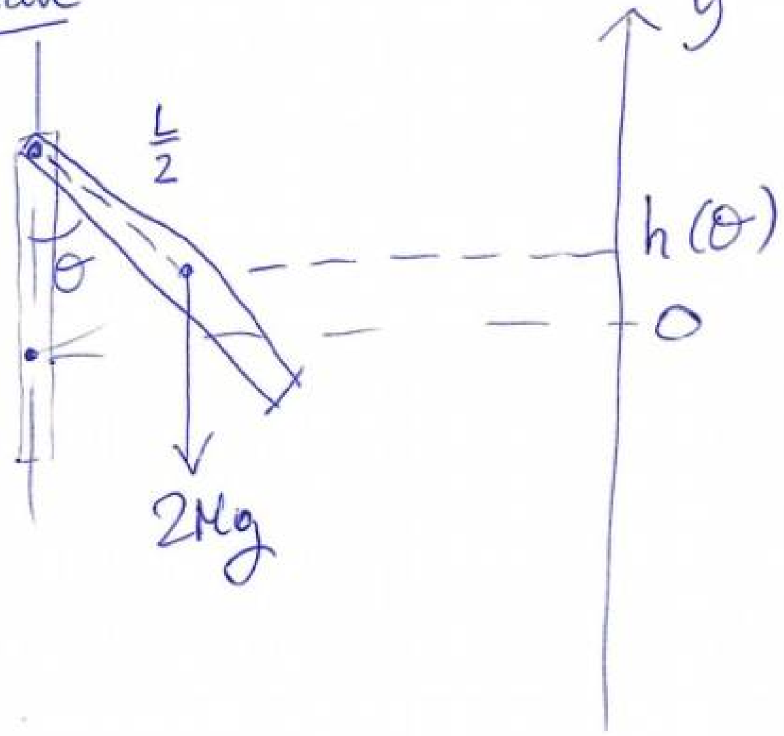
Si conserva anche l'energia meccanica ||

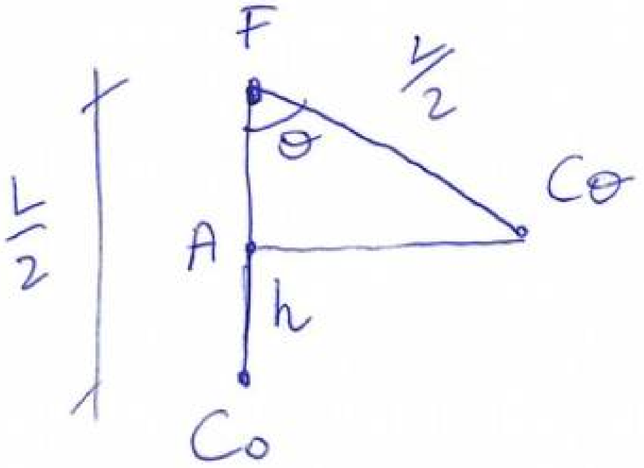
Il momento angolare non si conserva. ||



$\tau \neq 0$

Energia potenziale





$$\overline{FA} = \frac{L}{2}\cos\theta$$

$$\overline{FC_0} = \overline{FA} + \overline{AC_0}$$

$$\frac{L}{2} = \frac{L}{2}\cos\theta + h(\theta) \quad \Rightarrow h(\theta) = \frac{L}{2}(1-\cos\theta)$$

$$U(\theta) = 2Mg\,\frac{L}{2}(1-\cos\theta)$$

$$= MgL\,(1-\cos\theta)$$

Energia cinetica

$$K(\theta) = \frac{1}{2} M v^2(\theta) + \frac{1}{2} I \omega^2(\theta) + \frac{1}{2} 2M v^2(\theta)$$

$v(\theta)$: velocità del manicotto

$\omega(\theta)$: " angolare del pendolo.

$\frac{1}{2} M v^2(\theta)$: e. cin. del manicotto

$\frac{1}{2} I \omega^2(\theta)$: e. cin del pendolo.

$\frac{1}{2} 2M v^2(\theta)$: e. cin centro di massa del pendolo che trasla lungo x insieme al manicotto.

$$I = \frac{2ML^2}{3}$$

$$K(\theta) = \frac{ML^2 \omega^2(\theta)}{3} + \frac{3}{2} M v^2(\theta)$$

En. mecc. totale

$$E(\theta) = U(\theta) + K(\theta) =$$
$$= MLg(1-\cos\theta) + \frac{1}{3} ML^2\omega^2(\theta) + \frac{3}{2} Mv^2(\theta).$$

$$E(0) = \frac{1}{3} ML^2\omega_0^2$$

$v(0)=0$

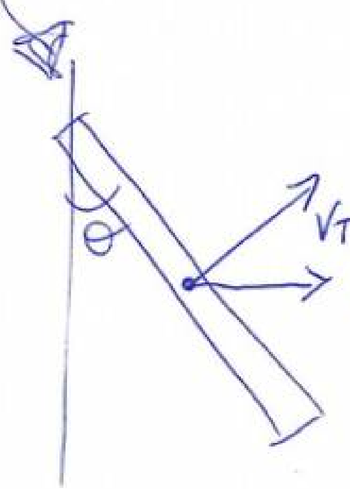
$\omega(0)=\omega_0$

Per la conservazione, si ha che:

$$MgL(1-\cos\theta) + \frac{1}{3} ML^2\omega^2(\theta) + \frac{3}{2} Mv^2(\theta) = \frac{1}{3} ML^2\omega_0^2 \quad \forall\theta$$

Quantità di moto lungo x

$$p_x(\theta) = \underbrace{Mv(\theta)}_{\text{manicotto}} + 2Mv(\theta) + 2M\frac{L}{2}\omega(\theta)\cos\theta$$



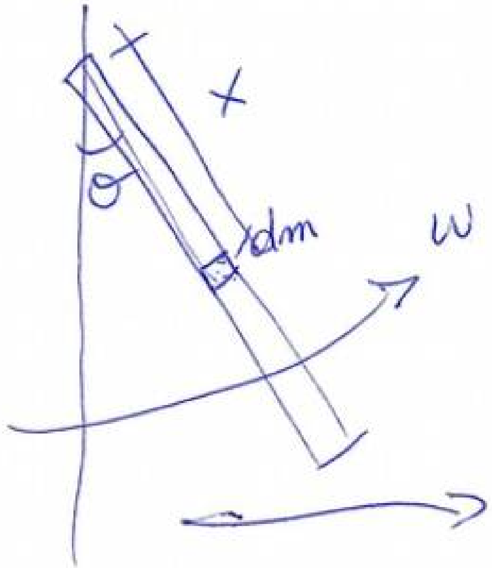
$v_T\cos\theta$ ← questa prende parte al "bilancio" ~~del~~ di $p_x(\theta)$!

$$\Downarrow$$

$$\underbrace{2M}_{\text{massa}}\ \underbrace{V_T\cos\theta}_{\text{velocità lungo x del COM}}$$

$$V_T = \omega\frac{L}{2}$$

$$2M\omega\frac{L}{2}\cos\theta$$



$$P = \sum m_i v_i$$

$$= \int v\,dm$$

$$V_T = \omega x \cancel{\cos} \Rightarrow V_{Tx} = \omega x \cos\theta$$

$$dm = \lambda\,dx = \frac{2M}{L}dx$$

$$\int_0^L \cos\theta\,\omega x \frac{2M}{L}dx = \cos\theta\,\omega\frac{2M}{L}\int_0^L x\,dx$$

$$= \cos\theta\,\omega\frac{2M}{\cancel{L}}\frac{L^{\cancel{2}}}{\cancel{2}} = ML\omega\cos\theta$$

$$p_x(\theta) = 3Mv(\theta) + ML\omega(\theta)\cos\theta$$

$$p_x(0) = ML\omega_0$$

$v(0)=0$

$\omega(0)=\omega_0$

$$3Mv(\theta) + ML\omega(\theta)\cos\theta = ML\omega_0 \quad \forall\theta$$

Definisco $\bar{\theta}$ come angolo massimo.

$$\omega(\bar{\theta}) = 0$$

$$\begin{cases} E(\bar{\theta}) = \frac{1}{3}ML^2\omega_0^2 \\ p_x(\bar{\theta}) = ML\omega_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} MLg(1-\cos\bar{\theta}) + \frac{3}{2}Mv^2(\bar{\theta}) = \frac{1}{3}ML^2\omega_0^2 \\ 3Mv(\bar{\theta}) = ML\omega_0 \end{cases}$$

$v(\bar{\theta}) = \frac{L\omega_0}{3}$ ⇐ vel. max del manicotto.

$$Mlg(1-\cos\bar\theta) + \frac{3}{2} M \frac{L^2\omega_0^2}{g} = \frac{1}{3} ML^2\omega_0^2$$

$$\boxed{\cos\bar\theta = 1 - \frac{L\omega_0^2}{6g}}$$

<u>NB</u> $-1 \leq \cos\bar\theta \leq 1$

$$-1 \leq 1 - \frac{L\omega_0^2}{6g} \leq 1$$

$$-2 \leq -\frac{L\omega_0^2}{6g} \leq 0$$

$$0 \leq \frac{L\omega_0^2}{6g} \leq 2$$

$$0 \leq \omega_0^2 \leq \frac{12g}{L}$$

condizione affinché $\bar\theta$ esista.

$$\bar\theta = \arccos\left(1 - \frac{L\omega_0^2}{6g}\right).$$