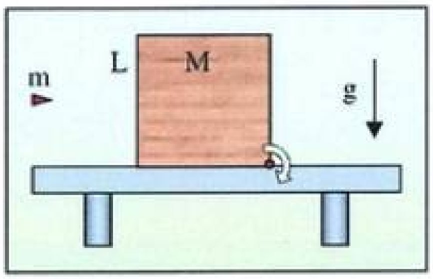
Corso di recupero di Fisica 2016/2017

Dario Madeo

Lezione del 04/09/2017

Slides disponibili all'indirizzo
http://www.dii.unisi.it/~madeo/crf/crf1617.html

Esercizio estratto dall'esame di Fisica 1 del 9 Settembre 2016



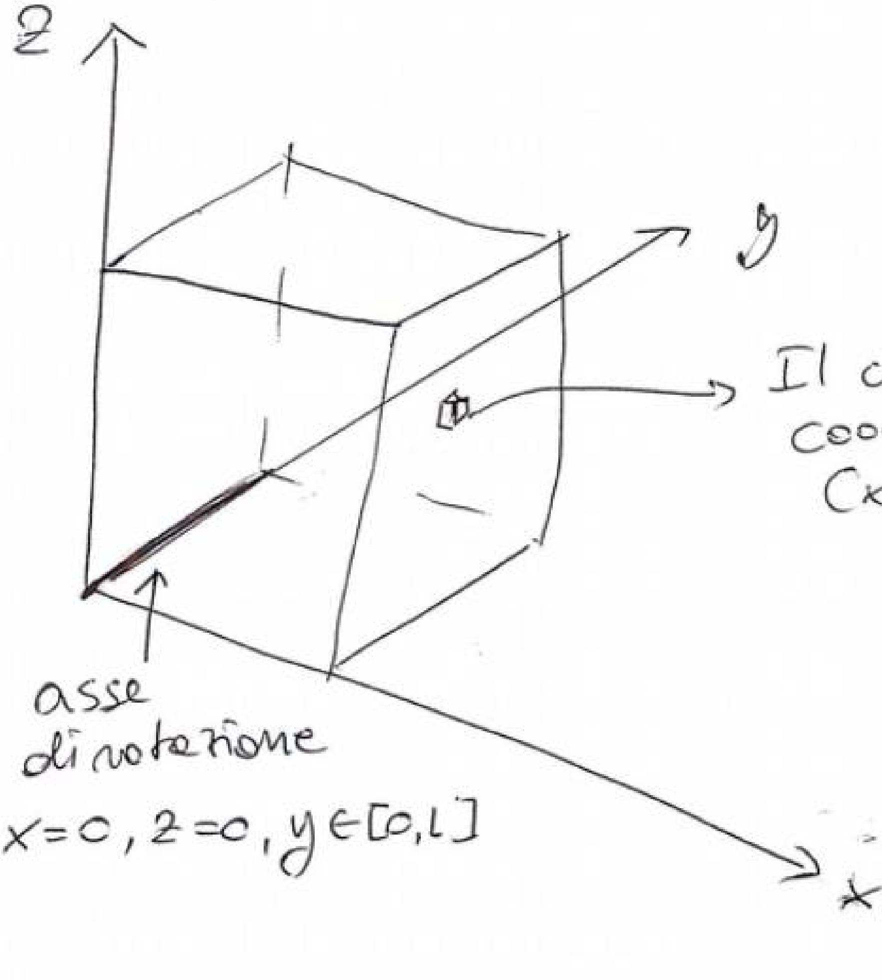
Esercizio 1

Un cubo omogeneo di massa M e lato L poggia con una faccia su un piano orizzontale ed è fermo. Esso può ruotare intorno a uno degli spigoli appoggiati sul piano, che è fisso. Un proiettile di massa m (con m<<M) giunge con velocità $\mathbf{v}_0$ perpendicolare alla faccia opposta a quella soprastante il fulcro e si conficca nel suo centro.

a) Discutere quali quantità si conservano durante l'urto e dopo l'urto.
b) Esprimere in termini di m, v_0, M, L e g l'energia persa nell'urto nel caso in cui il cubo si sollevi fino ad un angolo massimo pari a 15° (angolo tra faccia inferiore e piano).
c) Calcolare il momento d'inerzia I del cubo rispetto al fulcro.
d) Determinare per quali valori di v_0 si osserva un ribaltamento del cubo [stavolta si richiede di rispondere in termini di m, M, I, L, g].

Calcolo del momento di inerzia

Densità $\rho = \frac{M}{L^3}$ (costante)



Il cubettino ha coordinate (x, y, z)

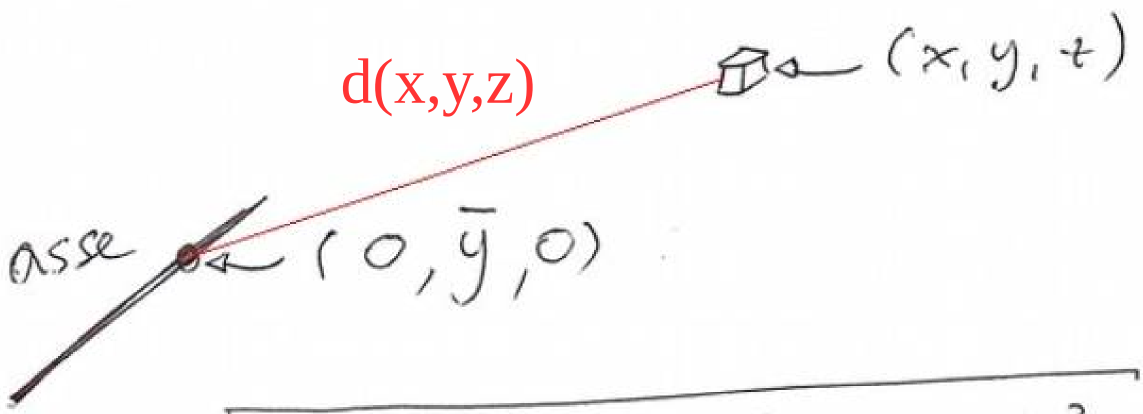
asse di rotazione

$x=0,\ z=0,\ y\in[0,L]$

Come definisco d ?

$$d = d(x, y, z)$$

d è la distanza tra un generico cubo infinitesimo di coordinate (x,y,z) e l'asse di rotazione. Da notare che tale distanza è la **minima** possibile.



$$d = \sqrt{(x-0)^2 + (y-\bar{y})^2 + (z-0)^2}$$

$$= \sqrt{x^2 + z^2 + (y-\bar{y})^2}$$

Se scelgo $\bar{y} = y$, ho trovato quello che mi serve! Infatti questa scelta minimizza d (vedi slide 5).

$$d = \sqrt{x^2 + z^2}$$

$$I = \int d^2 \, dm$$

$$dm = \rho \, dx \, dy \, dz$$

Siccome sono in 3D, ho un integrale triplo!

$$I = \int_0^L \int_0^L \int_0^L d^2 \rho \, dx\,dy\,dz$$

$$= \int_0^L \int_0^L \int_0^L (x^2 + z^2) \frac{M}{L^3} \, dx\,dy\,dz$$

$$= \left(\int_0^L dy \right) \int_0^L \int_0^L (x^2 + z^2) \frac{M}{L^3} \, dx\,dz$$

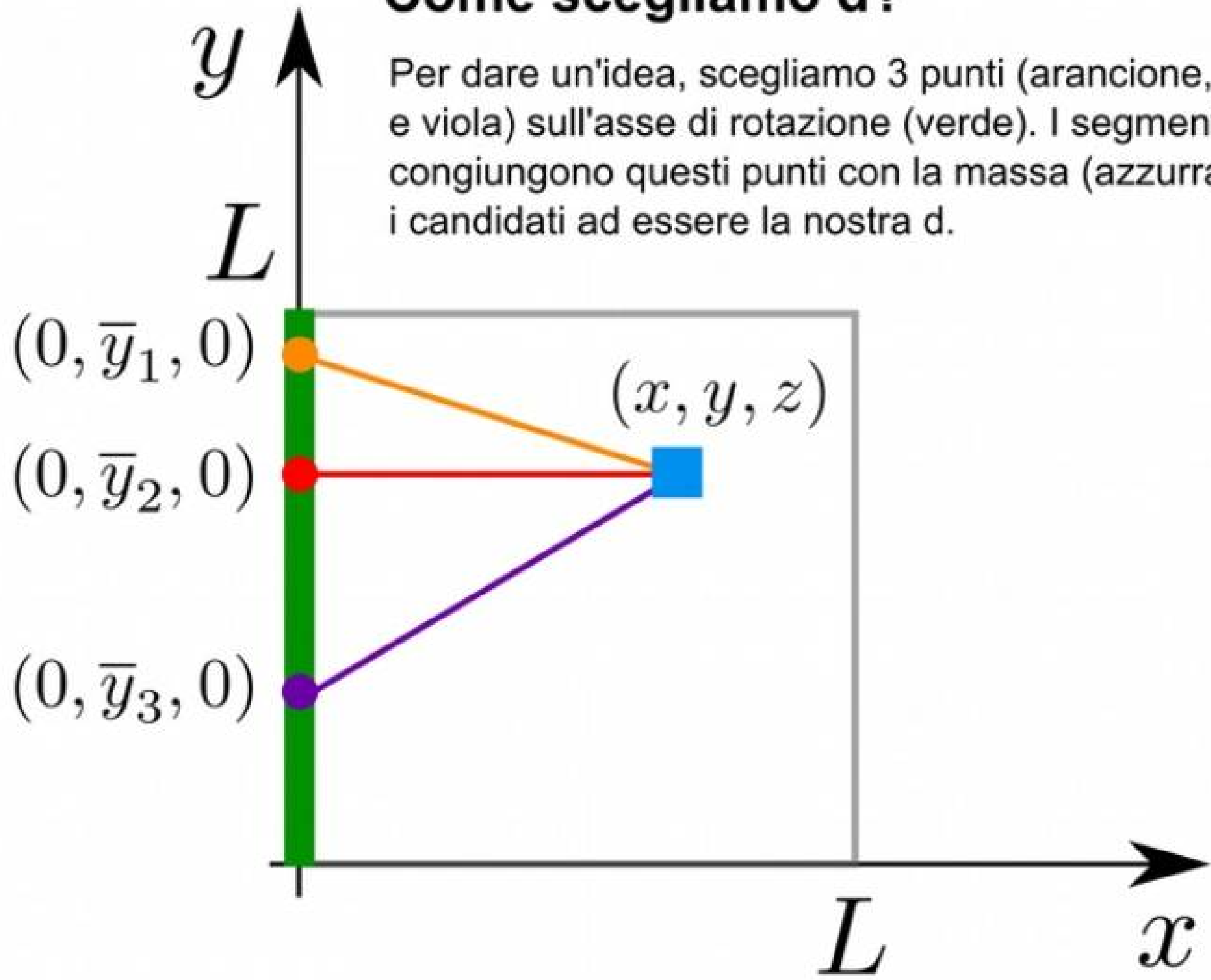
$$= L \frac{M}{L^3} \int_0^L \left[\frac{x^3}{3} + z^2 x \right]_0^L dz$$

$$= \frac{M}{L^2} \int_0^L \left(\frac{L^3}{3} + z^2 L \right) dz = \frac{M}{L^2} \left[\frac{L^3}{3} z + \frac{z^3}{3} L \right]_0^L =$$

$$= \frac{M}{L^2} \left[\frac{L^4}{3} + \frac{L^4}{3} \right] = \frac{2ML^2}{3}.$$

Come scegliamo d?

Per dare un'idea, scegliamo 3 punti (arancione, rosso e viola) sull'asse di rotazione (verde). I segmenti che congiungono questi punti con la massa (azzurra) sono i candidati ad essere la nostra d.



Naturalmente, questo disegno rappresenta una semplificazione del problema, perchè si dovrebbero considerare tutte le possibili distanze tra ogni punto dell'asse e massa. Queste distanze sono infinite, ma in questo caso ragionare su un numero finito ci permette comunque di capire il problema.

Ad occhio, si vede chiaramente che la d minima è rappresentata dal segmento rosso. Il punto rosso ha la componente y uguale a quella della massa. In formule:

$$\overline{y}_2 = y$$

In maniera più formale, fissate le coordinate della massa, dobbiamo cercare il punto

$$(0, \overline{y}, 0)$$

tale per cui la distanza

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y-\overline{y})^2 + (z-0)^2}$$

sia minima. La variabile da minimizzare è $\overline{y}$ nell'insieme $[0, L]$. Per esercizio, provare a dimostrare che il minimo della precedente funzione è dato da $\overline{y} = y$.

Suggerimento: cercare il minimo del quadrato della distanza...

Esercizio estratto dall'esame di Fisica 1 del 11 Aprile 2016

Esercizio 1

Un corpo di massa M striscia su un piano orizzontale scabro xOy sul quale incontra un attrito radente di coefficiente μ_D. Poiché il sistema è immerso in un fluido viscoso, il moto è ostacolato anche da un attrito dipendente linearmente dalla velocità (sia γ la costante di proporzionalità). Sapendo che a t=0 il corpo è in O con velocità $\underline{w}_0 = v_0(3,4)$, determinare l'istante al quale il corpo si ferma.

$$M \dot{v}_x = -\mu_D M g - \gamma v_x$$

$$M \dot{v}_y = -\mu_D M g - \gamma v_y$$

Risolviamone uno...

Omogenea

$M \dot{v}_x + \gamma v_x = 0 \Rightarrow$ Polinomio caratteristico

$MD + \gamma = 0 \Rightarrow D = -\frac{\gamma}{M}$

$\Rightarrow$ Ho un solo modo: $e^{-\frac{\gamma}{M}t}$.

Particolare

$M\dot{v}_x + \gamma v_x = -\mu_D M g \Rightarrow$ Costante

$\Rightarrow$ Aggiungo alla soluzione un modo costante!

$$\boxed{v_x(t) = A e^{-\frac{\gamma}{M}t} + B}$$

$$v_x(0) = \boxed{A + B = 3}$$

$$\dot{v}_x(t) = -\frac{\gamma}{M} A e^{-\frac{\gamma}{M}t}$$

Sostituisco $\dot{v}_x$ dentro l'eqz. di partenza.

$$M\dot{v}_x + \gamma v_x = -\mu_D M g$$

$$M\left(-\frac{\gamma}{M} A e^{-\frac{\gamma}{M}t}\right) + \gamma\left(A e^{-\frac{\gamma}{M}t} + B\right) = -\mu_D M g$$

$$\cancel{-\gamma A e^{-\frac{\gamma}{M}t}} + \cancel{\gamma A e^{-\frac{\gamma}{M}t}} + \gamma B = -\mu_D M g$$

$$\boxed{B = \frac{-\mu_D M g}{\gamma}}$$

$$\boxed{A = 3 + \frac{\mu_D M g}{\gamma}}$$

$$v_y(t) = C e^{-\frac{\gamma}{M}t} + D$$

$$\boxed{\begin{aligned} D &= -\frac{\mu_D M g}{\gamma} \\ C &= 4 + \frac{\mu_D M g}{\gamma} \end{aligned}}$$

Esercizio estratto dall'esame di Fisica 1 del 22 Gennaio 2015

Esercizio 1

Una particella di massa M si muove lungo un binario sul quale è definita un'origine O e un'ascissa x. La particella è sottoposta ad una forza parallela al binario e dipendente dalla posizione x a cui è associata un'energia potenziale $U(x)=Ax^2/(L^4+x^4)$, dove L è una certa lunghezza assegnata. Dopo aver definito le dimensioni del parametro A,

a) stabilire al variare di A quante sono le posizioni di equilibrio e quante di esse sono stabili;

b) per i valori di A tali che esiste una sola posizione d'equilibrio stabile (sia essa x_0), esprimere, in funzione di A ed M, la frequenza di piccole oscillazioni intorno a tale posizione;

c) per i valori di A tali che esistono due posizioni d'equilibrio stabile (x_1 e x_2 con $x_1<x_2$), calcolare (sempre in termini di A e M) la velocità minima che deve avere la particella in x_1 per raggiungere x_2 e chiarire se, dopo essere arrivata in x_2 la particella prosegue indefinitamente o finisce per passare nuovamente in x_1.

$$U(x) = \frac{Ax^2}{x^4+L^4} \qquad L>0, \; A\in\mathbb{R}$$

$$U'(x) = \frac{2Ax(x^4+L^4) - Ax^2\,4x^3}{(x^4+L^4)^2}$$

$$= \frac{2AxL^4 - 2Ax^5}{(x^4+L^4)^2}$$

$$U''(x) = \frac{(2AL^4-10Ax^4)(x^4+L^4)^2 - (2AxL^4-2Ax^5)\cdot}{(x^4+L^4)^4} \cdot$$

$$\cdots \frac{\cdot 2(x^4+L^4)4x^3}{}$$

Punti di equilibrio

$x : U'(x) = 0$

$U'(x) = 0 \implies 2AxL^4 - 2Ax^5 = 0$

$\implies x(L^4 - x^4) = 0$

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= 0 \\ x_1 &= -L \\ x_2 &= +L \end{aligned}\right] \text{ vero per } A \neq 0$$

Se $A=0$, allora tutti gli $x \in \mathbb{R}$ sono equilibri.

Caso $A \neq 0$

$$U''(x_0) = \frac{(2AL^4)2L^8 - 0}{L^{16}} =$$

$$= \underbrace{\frac{2A}{L^4}}_{>0}$$

- Se $A>0$, allora $U''(x_0) > 0$ e quindi x_0 è uno equilibrio ~~in~~stabile!
- Se $A<0$, allora $U''(x_0) < 0$ e quindi x_0 è instabile.

$$U''(x_1) = \frac{(2AL^4 - 10AL^4)(2L^4)^2 - \cancel{(-2AL^5 + 2AL^5)}}{(2L^4)^4}$$
$[x_1 = -L]$

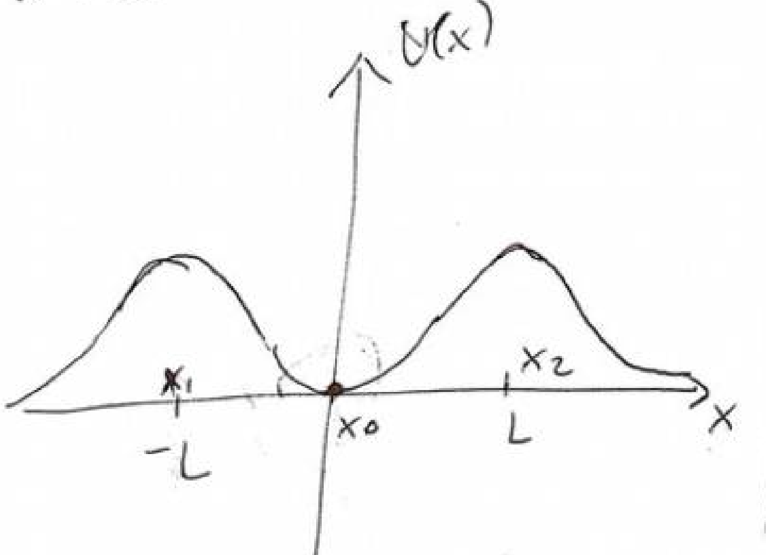
$$= \frac{-8AL^4 \cdot 4L^8}{16\,L^{16}} = -\frac{2A}{L^4}.$$

Se $A < 0$, x_1 è stabile
Se $A > 0$, x_1 è instabile

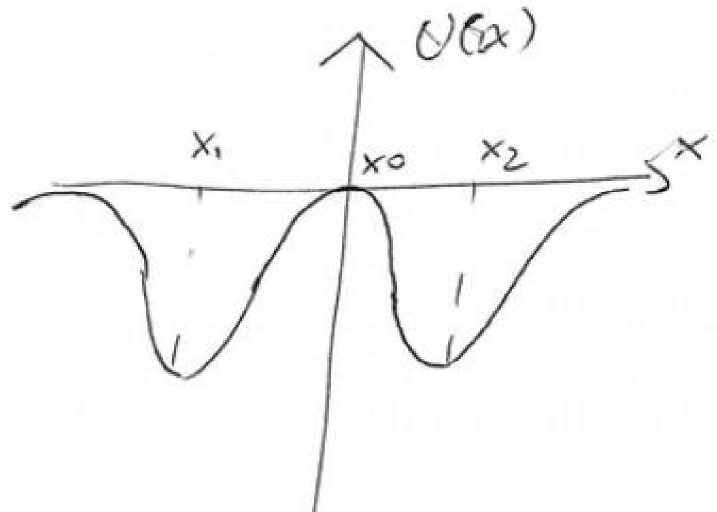
<u>NB</u> x_2 si comporta come x_1

Cosa succede per $x \to \pm\infty$?

$$\lim_{x \to \pm\infty} U(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{Ax^2}{x^4 + L^4} = 0$$



A>0



A<0

Punto B

$$M\ddot{x} = F(x)$$

$$M\ddot{x} = -U'(x)$$

Linearizzo $F(x)$ intorno a $x_0 = 0$:

$$F(x) \simeq F(x_0) + F'(x_0)(x - x_0)$$

$$= F(0) + F'(0)\,x$$

$$= -U'(0) - U''(0)\,x$$

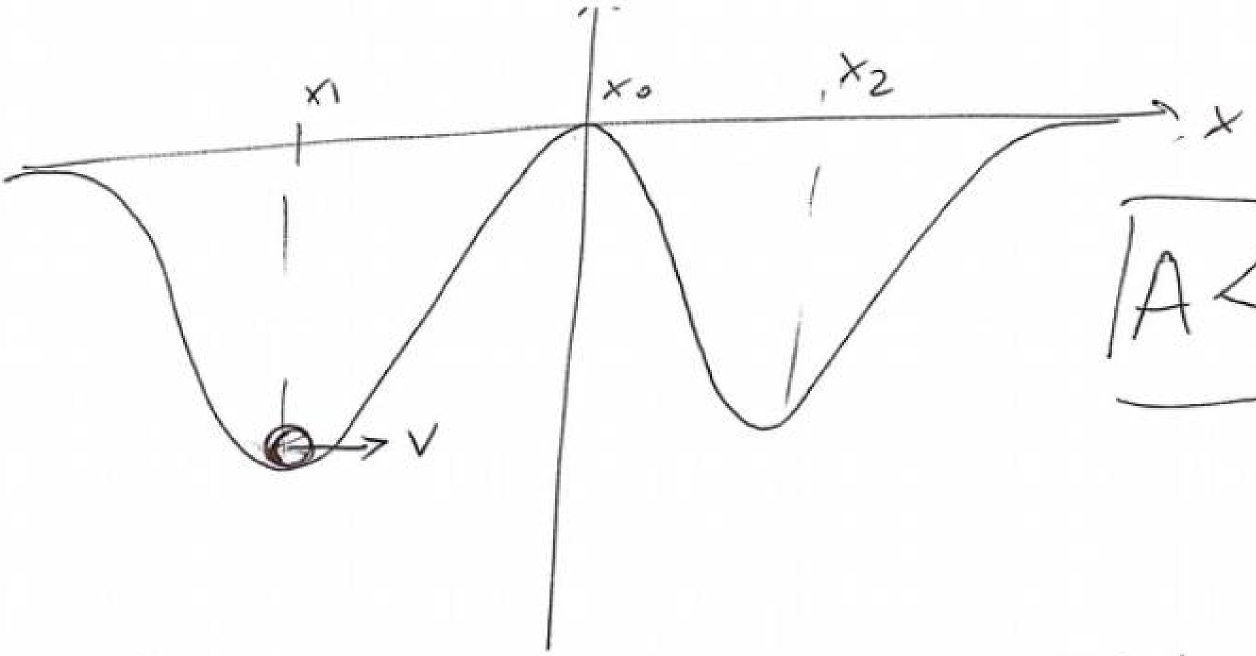
$$U'(0) = 0 \qquad U''(0) = \frac{2A}{L^4}$$

$$F(x) \simeq -\frac{2A}{L^4}\,x$$

$$M\ddot{x} = -\underbrace{\frac{2A}{L^4}}_{\equiv K}\,x$$

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{M}} = \sqrt{\frac{2A}{ML^4}}$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2A}{ML^4}}.$$



$\boxed{A<0}$

Usiamo la conservazione dell'energia.

In 1 $\quad U_1 + K_1$

In 0 $\quad U_0$

nel caso di energia minima, arrivo in cima a 0 e lì mi fermo!

$$U_1 + K_1 = U_0$$

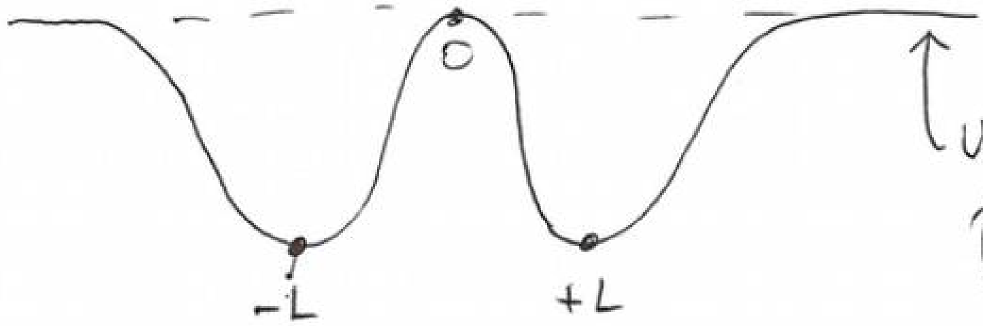
$$\left.\begin{aligned} U_1 &= U(-L) = \frac{A}{2L^2} \\ K_1 &= \frac{1}{2} M v^2 \\ U_0 &= U(0) = 0 \end{aligned}\right\} \quad \frac{A}{2L^2} + \frac{1}{2} M v^2 = 0$$

$$v^2 = -\frac{A}{ML^2}$$

$$v = \pm\sqrt{-\frac{A}{ML^2}}$$

Tengo solo il "+"

$$v = +\sqrt{\frac{-A}{ML^2}}$$



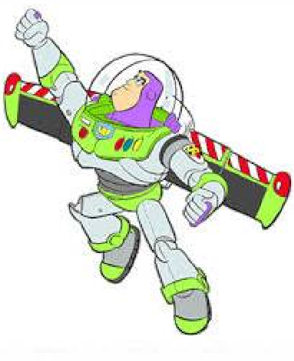
$U(x)$ tende a 0 per x che tende a $+\infty$.

- $v=\sqrt{\frac{-A}{ML^2}}$ è la velocità che mi serve per andare dal punto $-L$ al punto 0.
- Quando la pallina arriva in 0, cade verso il punto $+L$.
- Arrivata in $+L$, la pallina ha di nuovo velocità $v=\sqrt{\frac{-A}{ML^2}}$.

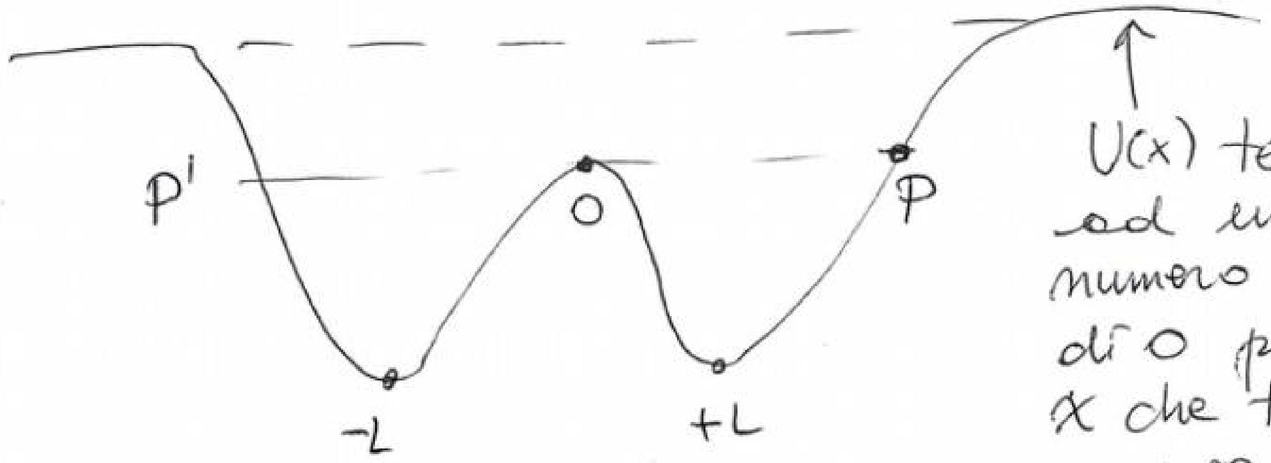
Tale velocità è sufficiente a farla muovere verso dx fino a raggiungere lo stesso livello energetico del punto 0.
Ma tale livello si trova all'infinito!

$$\boxed{U(0)=0=\lim_{x\to+\infty}U(x)}$$

Dunque, la pallina continuerà a muoversi verso l'infinito!



Consideriamo un potenziale diverso:



In questo caso, partendo dal punto $-L$ con velocità $v=\sqrt{\frac{-A}{ML^2}}$, raggiungo il punto O e poi il punto $+L$. Da qui, proseguo verso destra, ma mi fermo al punto P che ha lo stesso livello energetico di O.

$$\boxed{U(O)=U(P)}$$

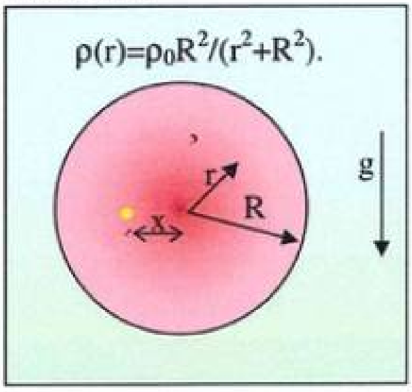
Siccome $v=\sqrt{\frac{-A}{ML^2}}$ è la minima energia per arrivare a quel livello, allora tornerò indietro verso sinistra.

Da notare che in questo caso ho un comportamento oscillatorio.

1) Da $-L$ vado in O
2) Da O vado in $+L$
3) Da $+L$ vado in P
4) Da P vado in $+L$
5) Da $+L$ vado in O
6) Da O vado in $-L$
7) Da $-L$ vado in P' $(U(P')=U(O))$
8) Da P' vado in $-L$ ... etc...

Esercizio estratto dall'esame di Fisica 1 del 22 Aprile 2009

Esercizio 2



Si ha un cilindro non omogeneo di raggio R e altezza h la cui densità decresce con la distanza r dall'asse secondo la legge $\rho(r)=\rho_0 R^2/(r^2+R^2)$.

a) Calcolare la massa ed il momento d'inerzia del cilindro rispetto all'asse di simmetria.

Indicando con M e I_c le quantità appena calcolate,

b) calcolare a quale distanza x dal centro si deve porre un fulcro (con asse orizzontale), affinché sia minimo il periodo di piccole oscillazioni del cilindro intorno a tale fulcro;

c) in funzione di M, I_c e x, determinare nelle sue componenti la reazione vincolare sul fulcro, in un istante in cui il cilindro ruota a velocità angolare Ω_0 ed ha il baricentro alla stessa altezza del fulcro.

Calcoliamo la massa

Simmetria cilindrica : $dm = \rho\, dx\, dy\, dz$

$= \rho\, r\, dr\, d\theta\, dz$

$$M = \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{\rho_0 R^2 r}{r^2+R^2}\, dr\, d\theta\, dz$$

$$= \int_0^h dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \frac{\rho_0 R^2\, r}{\sqrt{r^2+R^2}}\, dr$$

$$= h\, 2\pi \frac{\rho_0 R^2}{2} \int_0^R \frac{2r}{r^2+R^2}\, dr \qquad \int \frac{f'}{f} = \log|f|$$

$$= h\pi\rho_0 R^2 \left[\log(r^2+R^2)\right]_0^R =$$

$$= h\pi\rho_0 R^2 \left[\log(2R^2) - \log(R^2)\right]$$

$$= h\pi\rho_0 R^2 \log\frac{2R^2}{R^2} = \boxed{h\pi\rho_0 R^2 \log 2}$$

$$I_0 = \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^R r^2 \frac{\rho_0 R^2}{r^2+R^2} \, r \, dr \, d\theta \, dz$$

"d^2"

rispetto all'asse del cilindro

$$= \int_0^h dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \frac{\rho_0 R^2 r^3}{r^2+R^2} \, dr$$

$$= h \, 2\pi \, \rho_0 R^2 \int_0^R \frac{r^3}{r^2+R^2} \, dr$$

$$= h \, 2\pi \rho_0 R^2 \int_0^R \frac{r \, r^2}{r^2+R^2} \, dr$$

$$= h \, 2\pi \rho_0 R^2 \int_0^R \frac{r \cdot (r^2+R^2-R^2)}{r^2+R^2} \, dr$$

$$= h \, 2\pi \rho_0 R^2 \left[\int_0^R \frac{r \cancel{(r^2+R^2)}}{\cancel{r^2+R^2}} \, dr - \int_0^R \frac{r R^2}{r^2+R^2} \, dr \right]$$

$$= h \, 2\pi \rho_0 R^2 \left[\int_0^R r \, dr - \frac{R^2}{2} \int_0^R \frac{2r}{r^2+R^2} \, dr \right]$$

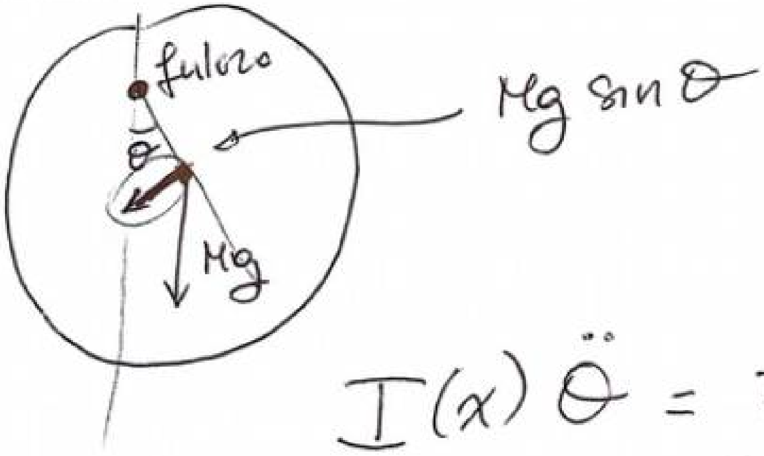
fatto prima, è uguale a $\log 2$.

$$= h \, 2\pi \rho_0 R^2 \left[\frac{R^2}{2} - \frac{R^2}{2} \log 2 \right]$$

$$= \frac{h \, 2\pi \rho_0 R^4}{2} (1 - \log 2) = h \pi \rho_0 R^4 (1 - \log 2).$$

Metto il fulcro a distanza x dall'asse:

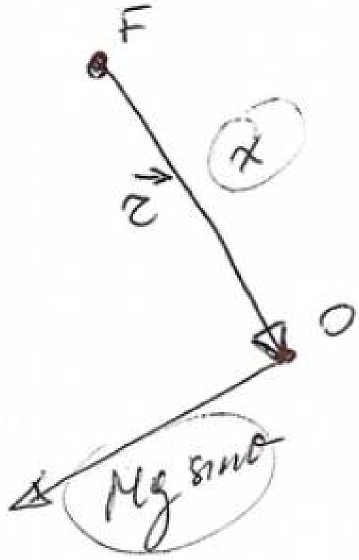
$$I(x) = I_0 + Mx^2$$



$$I(x)\,\ddot{\theta} = \tau_{NET}$$

$$\tau_{NET} = \vec{r} \times \vec{P}$$

$$= -x\,Mg\sin\theta$$



$$\boxed{I(x)\,\ddot{\theta} = -x\,Mg\sin\theta}$$

Per piccole oscillazioni

$$\sin\theta \simeq \theta$$

$$I(x)\,\ddot{\theta} = -x\,Mg\,\theta$$

$$\ddot{\theta} = -\frac{x\,Mg}{I(x)}\,\theta$$

$$\frac{x\,Mg}{I(x)} \longrightarrow \omega^2$$

$$\omega = \sqrt{\frac{xMg}{I(x)}}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I(x)}{xMg}}.$$

Cerco x t.c. T sia minimo.

$\Rightarrow$ Minimizzo T^2! Più semplice

$$T^2(x) = 4\pi^2 \left(\frac{I_0 + x^2 M}{xMg}\right)$$

$$\frac{dT^2(x)}{dx} = \frac{4\pi^2}{Mg} \frac{2xMx - (I_0 + x^2M)}{x^2}$$

$$= \frac{4\pi^2}{Mg} \frac{x^2M - I_0}{x^2}$$

$$\frac{dT^2(x)}{dx} = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{I_0}{M}}$$

Mantengo solo la $x > 0$.

$$\boxed{x = \sqrt{\frac{I_0}{M}}}$$

$$\frac{d^2 T^2(x)}{dx^2} = \frac{4\pi^2}{Mg} \frac{2xM\cancel{x}^2 - (x^2M - I_0)2x}{x^4}$$

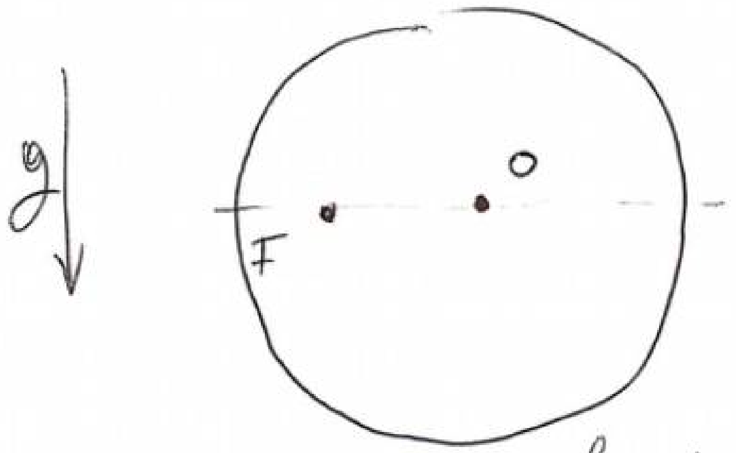
$$= \frac{4\pi^2}{Mg} \frac{\cancel{2Mx^3} - \cancel{2Mx^3} + 2I_0\cancel{x}}{x^{\cancel{4}\,3}}$$

$$= \frac{8\pi^2 I_0}{Mg\, x^3}$$

Se sostituisco $x = \sqrt{\frac{I_0}{M}}$, allora

$$\frac{d^2T^2(x)}{dx^2} > 0$$

$\Rightarrow x = \sqrt{\frac{I_0}{M}}$ mi produce un periodo minimo!



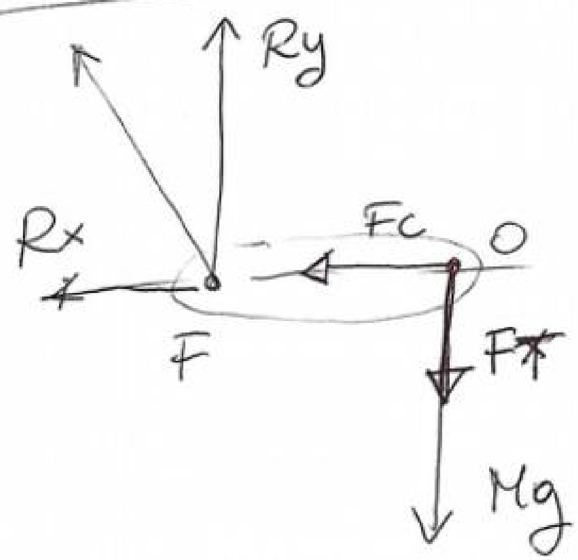
All'istante iniziale, il sistema ruota con v. angolare ω_0.

sappiamo che la v. ang. cambia.

$\Rightarrow$ C'è acc. ang. α

$\Rightarrow$ C'è acc. tangenziale oltre che centripeta.

$$a_C = \omega_0^2 x \qquad F_C = M\omega_0^2 x$$
$$a_T = \alpha x \qquad F_T = M\alpha x$$



Lungo x ho solo Rx

Lungo y ho Ry e Mg

$$F_C = -R_x$$
$$F_T = Mg - R_y$$

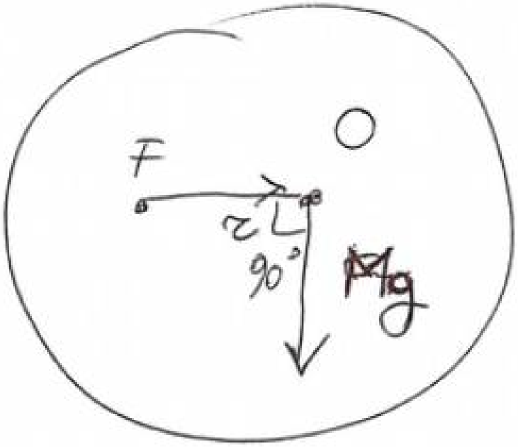
$$\begin{cases} |F_c| = |R_x| \\ F_T = Mg - R_y \end{cases} \qquad \begin{cases} M\omega_0^2 x = |R_x| \\ M\alpha x = Mg - R_y \end{cases}$$

$$\boxed{|R_x| = M\omega_0^2 x}$$

$$R_y = Mg - M\alpha x$$

$$= M(g - \alpha x)$$

$$\alpha = ?$$



$$I\alpha = \tau_{NET} \qquad \alpha = \frac{\tau_{NET}}{I}$$

$$\tau_{NET} = -F_T x \qquad \alpha = -\frac{F_T x}{I}$$

$$R_y = M\left(g + \frac{F_T x^2}{I}\right)$$

$$I\alpha = -Mgx \qquad \alpha = -\frac{Mgx}{I}$$

$$\boxed{R_y = M\left(g + \frac{Mgx^2}{I}\right) =} \ldots$$