Corso di recupero di Fisica 2016/2017

Dario Madeo

Lezione del 30/06/2017

Slides disponibili all'indirizzo
http://www.dii.unisi.it/~madeo/crf/crf1617.html

Esercizio 1

Un carrello C di massa 2M si muove senza attriti su un binario orizzontale su cui è definita un'ascissa x. Esso è sottoposto a una forza conservativa associata all'energia potenziale $U(x)=\alpha x^4$, dove α è una assegnata costante positiva. All'istante t=0, C è in x=0 con una data velocità $v_0>0$. Ad un istante successivo, al quale la velocità di C è dimezzata, esso urta elasticamente ed istantaneamente contro un blocco B di massa M, inizialmente fermo, il quale inizia a muoversi liberamente sul binario.

a) Determinare la posizione in cui avviene l'urto e chiarire se, dopo la collisione, C tornerà a transitare da x=0. In caso di risposta affermativa, calcolare la velocità con cui ci transiterà.

b) Stabilire se il successivo moto di C è di tipo oscillatorio. In caso affermativo, determinarne l'ampiezza.

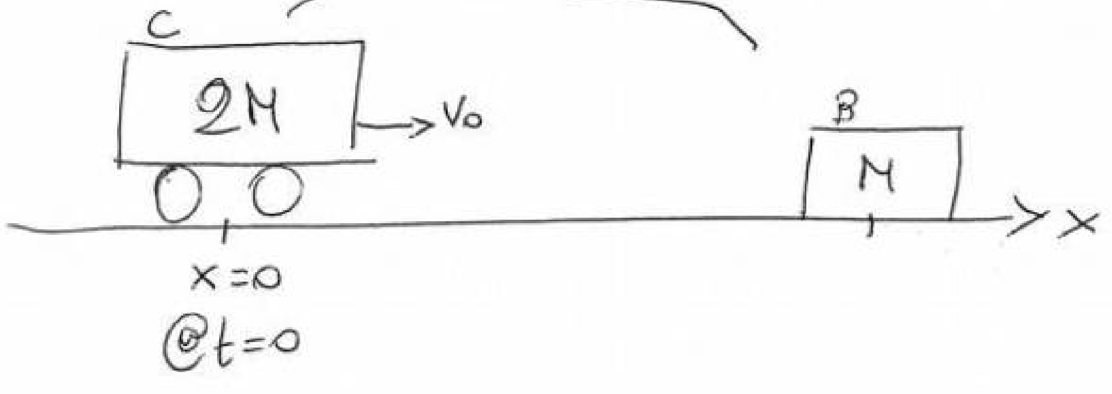
c) Chiarire se il moto di C è di tipo armonico (eventualmente anche in ipotesi di piccole oscillazioni). In caso affermativo, determinarne la frequenza.

Noto teorico

$$\boxed{F(x) = -U'(x)}$$

$$\boxed{\vec{F}(\vec{x}) = -\nabla U(\vec{x}) \quad \text{2D o 3D}}$$

per x>0, la forza è frenante



$$F(x) = -4\alpha x^3 \qquad \begin{cases} F(x)>0 & x<0 \\ F(x)<0 & x>0 \end{cases}$$

@ $t=0$ $$U_0 = \alpha 0^4 = 0$$
$$K_0 = \frac{1}{2} 2M V_0^2 = MV_0^2$$

Definiamo con t_1 l'istante dell'urto.
Al momento dell'urto, la velocità di C si è dimezzata.

@ $t = t_1$ $$U_1 = \alpha x_1^4$$
$$K_1 = \frac{1}{2} 2M \left(\frac{V_0}{2}\right)^2 = \frac{MV_0^2}{4}$$

dove x_1 è ~~lo spazio~~ il punto in cui avviene l'urto.

Per la conservazione dell'energia meccanica, si ha che:

$$U_0 + K_0 = U_1 + K_1$$

$$MV_0^2 = \alpha x_1^4 + \frac{MV_0^2}{4}$$

$$x_1 = \sqrt[4]{\frac{3MV_0^2}{4\alpha}}$$

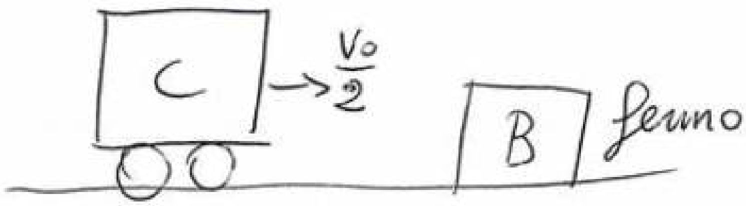
Se avessi voluto risolvere la dinamica, avrei dovuto risolvere la seguente equazione differenziale:

$$\left.\begin{aligned} 2M\ddot{x} &= F(x) \\ 2M\ddot{x} &= -4\alpha \underline{x^3} \end{aligned}\right] \text{approccio difficile (o impossibile)}$$

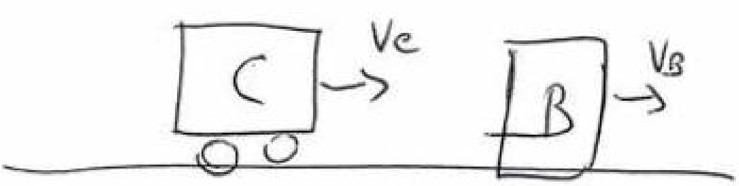
L'equazione differenziale non è lineare ed è molto difficile da risolvere. Quindi, il fatto che si conserva l'energia meccanica ci aiuta molto in questo caso!

Studiamo l'urto

Prima (un dt prima ...)



Dopo (un dt dopo ...)



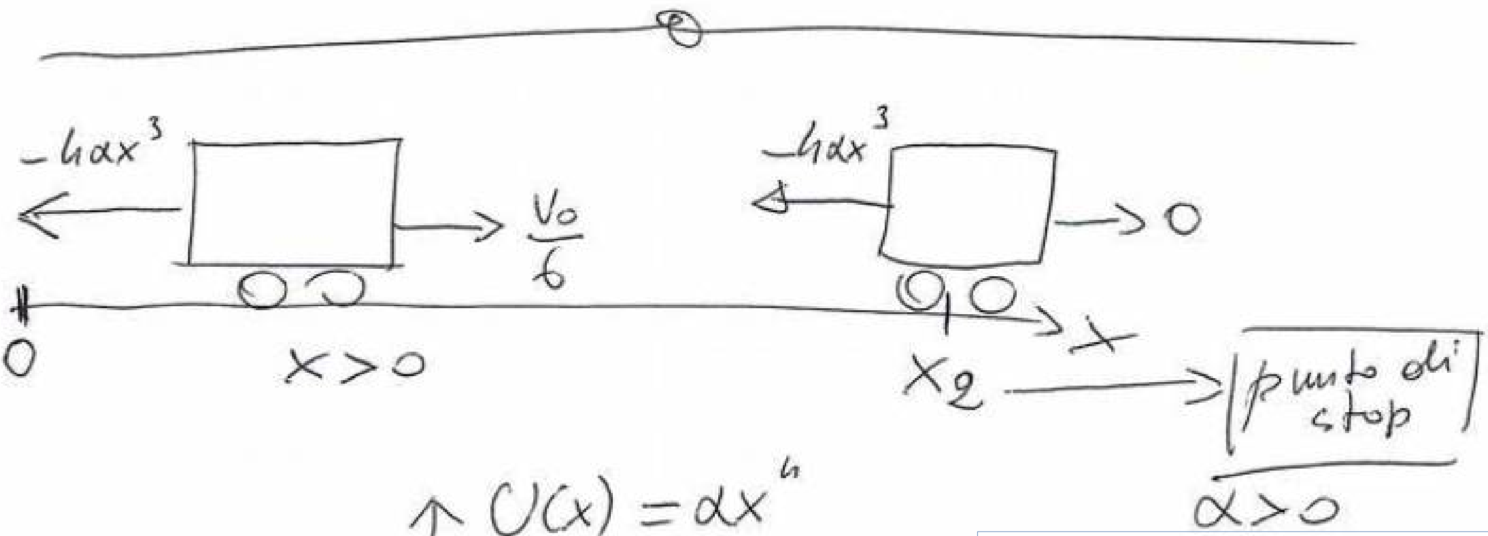
$$\begin{cases} V_C = \dfrac{V_0 (M_C - M_B)}{M_C + M_B} \\[2ex] V_B = \dfrac{2 M_C V_0}{M_C + M_B} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} V_C &= \frac{V_0}{6} \\ V_B &= \frac{2}{3} V_0 \end{aligned}}$$

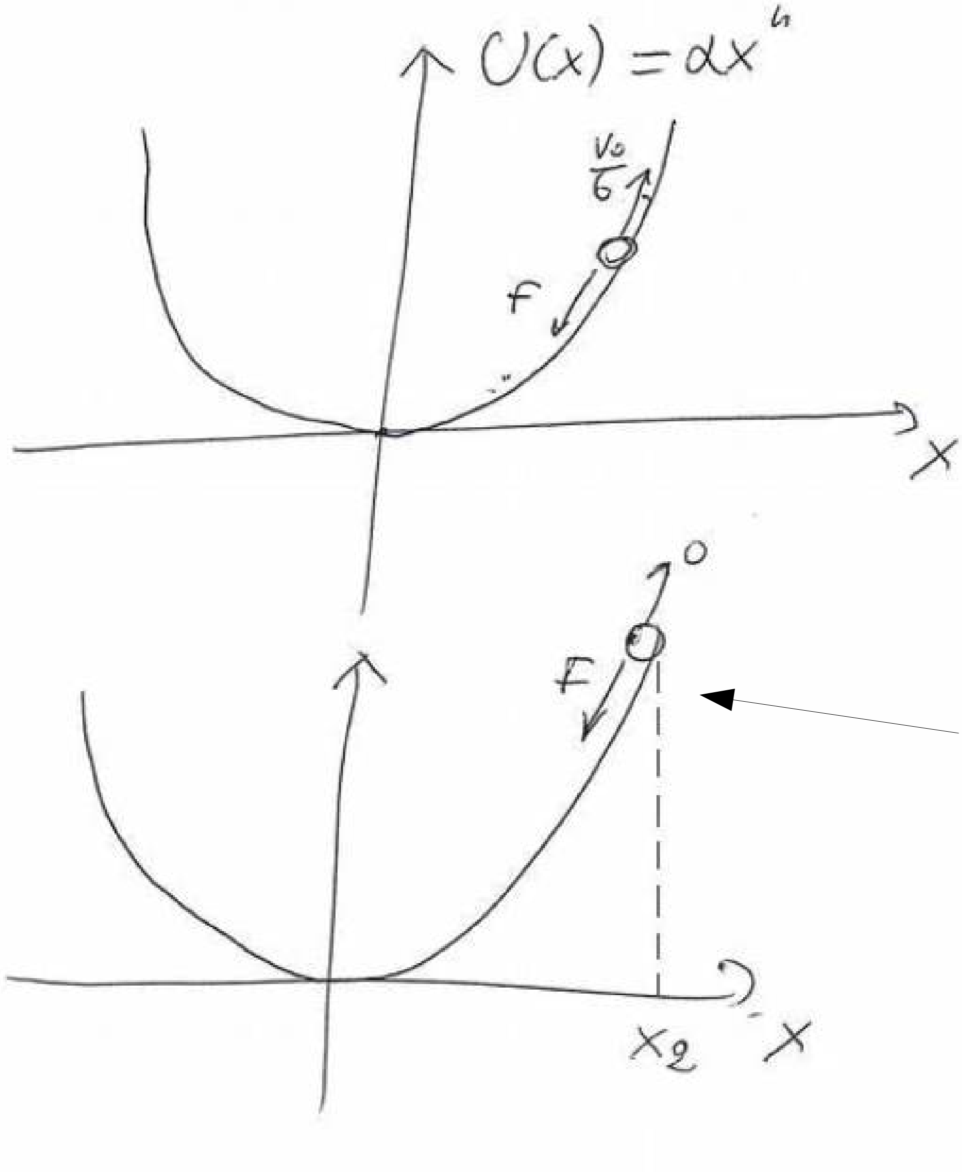
Com'è fatta ~~fo~~ la forza!

$$F(x) = -4\alpha x^3$$

$$F(x) > 0 \qquad x < 0$$

$$F(x) < 0 \qquad x > 0$$

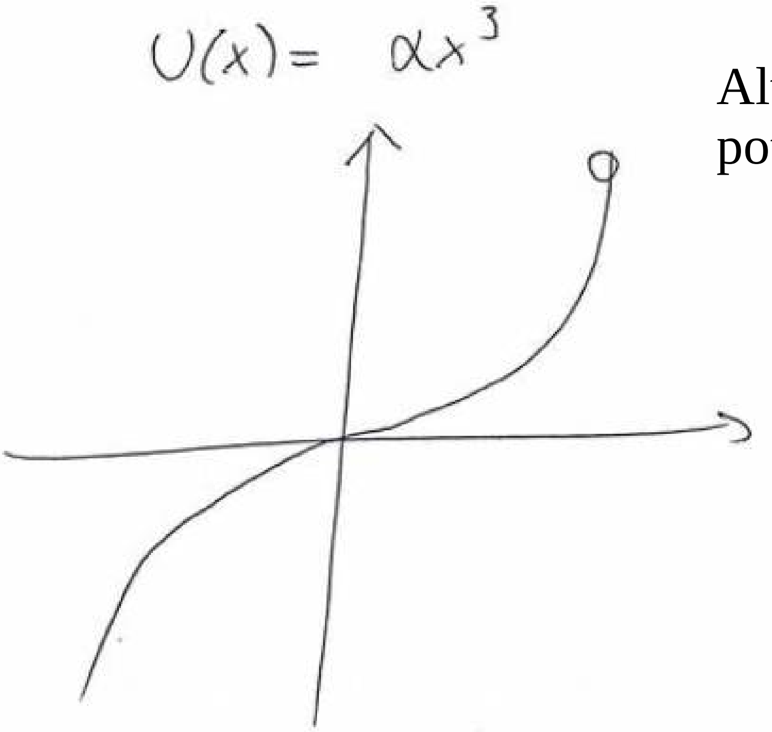




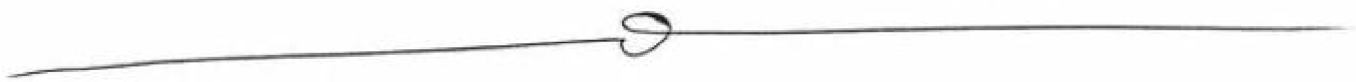
Dal momento che è noto il potenziale, è possibile immaginare che il moto del carrello C lungo l'asse sia simile a quello di una pallina dentro una "buca" descritta dall'equazione U(x).

E' ovvio che ci sarà un istante in cui la pallina raggiungerà l'altezza massima ed avrà velocità nulla. Tuttavia, essa rimarrà soggetta alla forza generata dal potenziale, che la riporterà indietro.

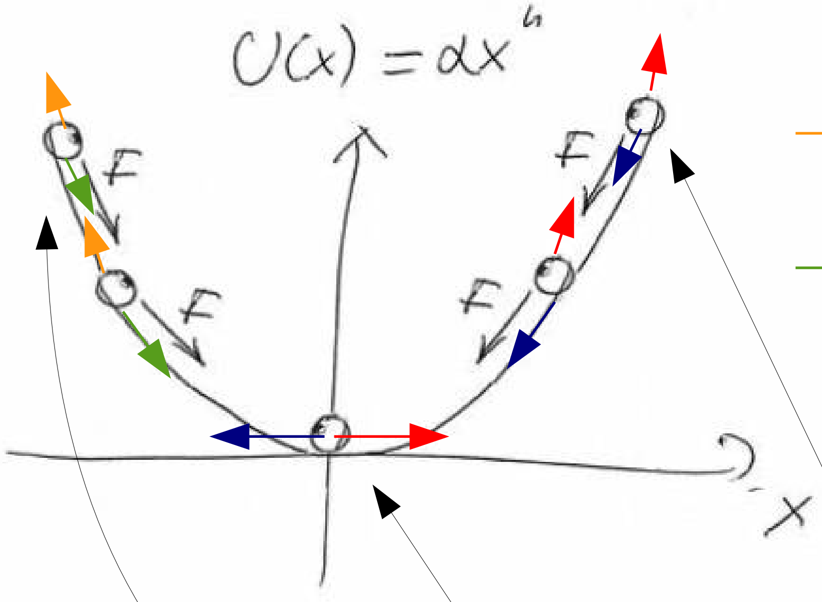
Lo stesso discorso vale per il carrello, ovvero raggiungerà un punto x2, si fermerà e tornerà indietro.



Altro esempio di potenziale...



Torniamo al nostro caso:



Velocità durante la fase di salita (x>0)

Velocità durante la fase di discesa (x>0)

Velocità durante la fase di salita (x<0)

Velocità durante la fase di discesa (x<0)

tempo

Il potenziale in esame dà luogo ad un moto oscillatorio!

Punto in cui non agisce alcuna forza (x = 0).

Punti in cui la velocità è nulla ($+x_2$ e $-x_2$)

@ $t = t_2$
(istante di stop)

$$U_2 = \alpha x_2^4$$

$$K_2 = 0$$

@ $t = t_1'$
(istante dopo l'urto)

$$U_1' = \alpha x_1^4 = \dots = \frac{3MV_0^2}{4}$$

$$K_1' = \frac{1}{2} 2M \left(\frac{V_0}{6}\right)^2 = \frac{MV_0^2}{36}$$

$$U_2 + K_2 = U_1' + K_1'$$

$$\alpha x_2^4 = \frac{3}{4} MV_0^2 + \frac{MV_0^2}{36}$$

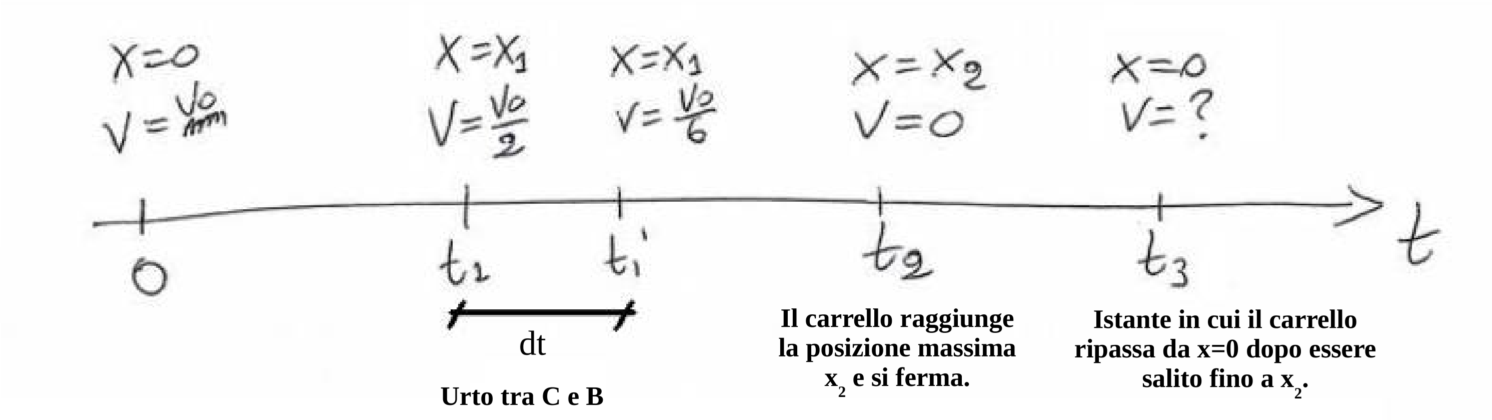
$$\alpha x_2^4 = \frac{27}{36} MV_0^2 + \frac{MV_0^2}{36}$$

$$\alpha x_2^4 = \frac{28}{36} MV_0^2$$

$$\alpha x_2^4 = \frac{7}{9} MV_0^2$$

$$\boxed{x_2 = \sqrt[4]{\frac{7MV_0^2}{9\alpha}}}$$

Diagramma degli eventi



Uso di nuovo il principio di conservazione dell'energia meccanica:

$$U_2 + K_2 = U_3 + K_3$$

$$U_3 = \alpha \cdot 0^4 = 0$$

$$K_3 = \frac{1}{2} 2Mv^2 = Mv^2$$

$$\alpha x_2^4 = Mv^2$$

$$\cancel{\alpha} \frac{7\cancel{M}v_0^2}{9\cancel{\alpha}} = \cancel{M}v^2$$

$$v^2 = \frac{7v_0^2}{9} \Rightarrow v = \pm\sqrt{\frac{7v_0^2}{9}} = \pm\frac{\sqrt{7}\,v_0}{3}$$

$$\boxed{v = -v_0 \frac{\sqrt{7}}{3}}$$

Velocità che possiede il corpo quando torna ad $x=0$.

Occhio al segno! Stavolta il carrello si muove verso sinistra, e dunque la velocità è negativa!!!

Per essere armonico, il potenziale deve essere nella forma

$$U(x) = \underline{\beta x^2}, \quad \beta > 0$$

Altrimenti, è anarmonico.

Il moto si dice armonico se la sua legge oraria corrisponde ad un'armonica, ovvero ad un seno o ad un coseno. E' noto che questo accade quando si ha il sistema massa-molla:

$$m\ddot{x} = -kx \qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$$

Il sistema massa-molla viene anche detto "oscillatore armonico".
Invece, il sistema in esame oscilla ma non è armonico! Infatti, se si risolve l'eq. diff.:

$$m\ddot{x} = -4\alpha x^3$$

$x(t) =$ è somma infinita di seni e coseni

<u>Non è armonico</u>

Un sistema oscillante non armonico può però essere armonico per piccole oscillazioni…
Basta verificare se lo sviluppo di Taylor al 2° ordine del potenzioale corrisponde a quello di un oscillatore armonico ($U(x) = bx^2$).

$U(x) = \alpha x^4$, $U'(x) = 4\alpha x^3$, $U''(x) = 12\alpha x^2$

$$U(x) \simeq U(0) + U'(0)x + U''(0)\frac{x^2}{2} + \dots$$

$$= 0 + 0x + 0 \cdot \frac{x^2}{2} + \dots$$

$$= 0 + \dots$$

$\Downarrow$

Non è armonico nemmeno per piccole oscillazioni.

$U(x) = \alpha x^2 + \beta x^4$

- $U(x)$ non è armonico
- $U(x)$ mi fa oscillare.
- È armonico per piccole oscillazioni?

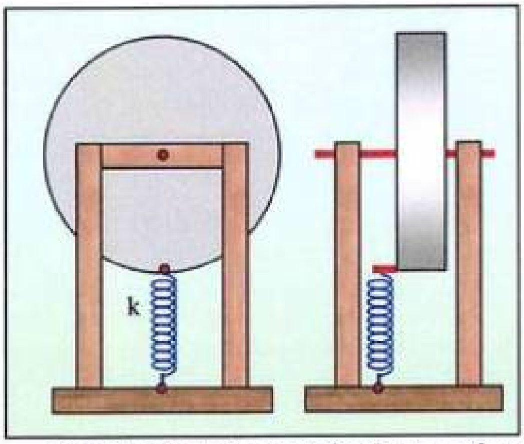
$U'(x) = 2\alpha x + 4\beta x^3$

$U''(x) = 2\alpha + 12\beta x^2$

$$U(x) \simeq U(0) + U'(0)x + U''(0)x^2 + \dots$$

$$= 0 + 0 + \boxed{2\alpha x^2} \Rightarrow$$ È armonico per piccole oscillazioni.

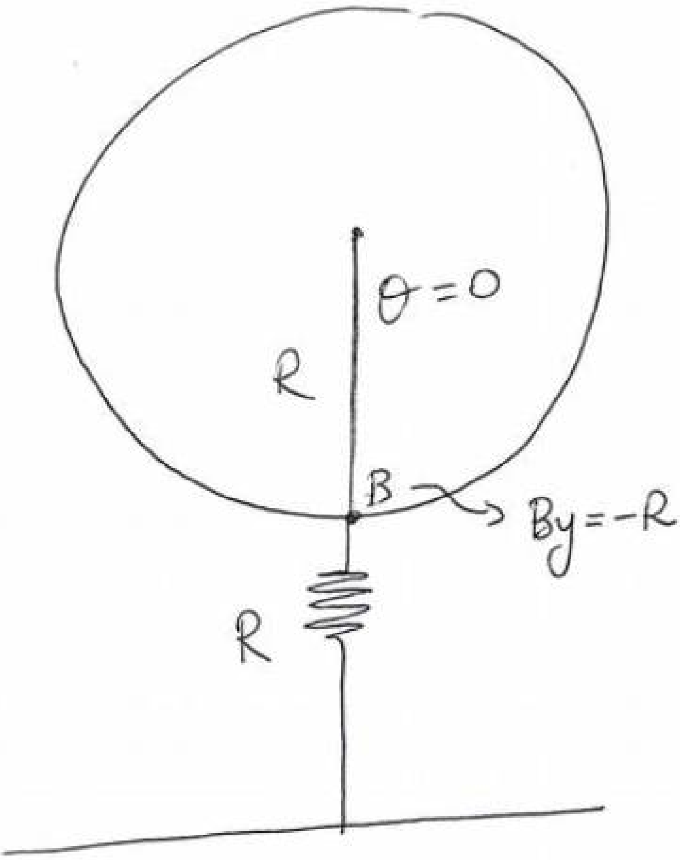
Estratto dall'esame di Fisica 1 del 23 Giugno 2017

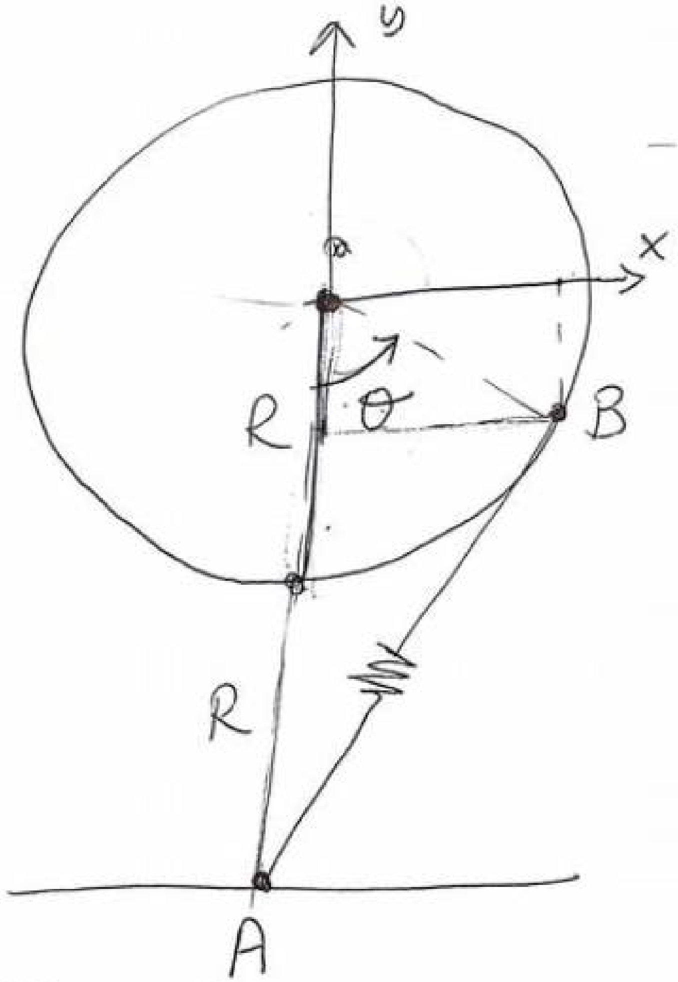


Esercizio 2

Un disco omogeneo di massa M e raggio R può ruotare intorno al suo asse, che è orizzontale. Sul bordo del disco è applicata una molla di costante elastica k e lunghezza a riposo R, avente l'altro estremo imperniato ad un punto posto 2R sotto il centro del disco. Scrivere l'energia potenziale della molla in funzione dell'angolo di cui viene ruotato il disco. Supponendo che il disco venga ruotato di un quarto di giro e lasciato fermo, calcolare la velocità angolare massima che esso raggiunge. Calcolare inoltre l'accelerazione angolare iniziale del disco.

[La molla NON si avvolge sul disco: rimane sempre di forma rettilinea, si deve intendere che essa giaccia su un piano verticale parallelo, ma non coincidente con quello del disco]





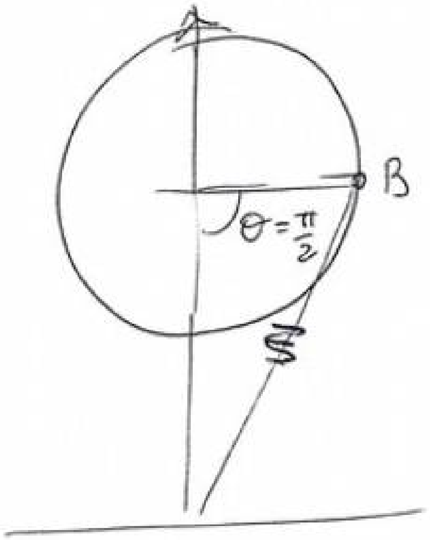
$$A = \begin{bmatrix} 0 \\ -2R \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} R\sin\theta \\ -R\cos\theta \end{bmatrix}$$

Posizione del punto in cui la molla è attaccata al pavimento.

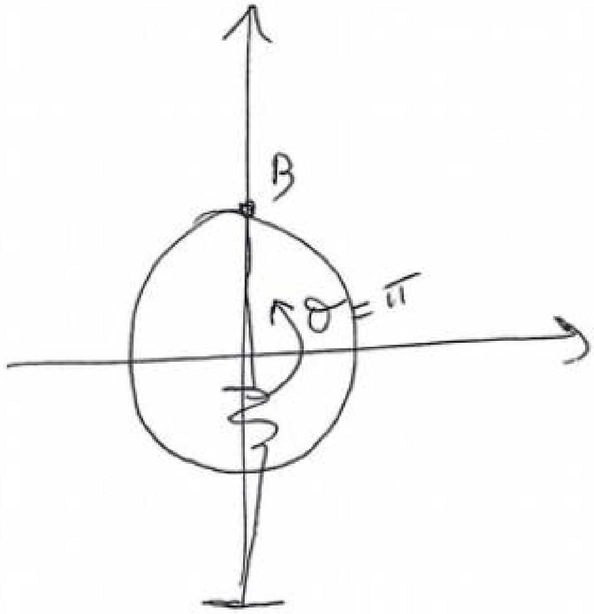
Posizione del punto in cui molla e disco sono uniti per ogni angolo θ.

NOTA: θ è l'angolo formato dal semiasse y negativo e dal segmento OB. Positivo in senso antiorario.

Verifichiamo la precedente relazione per alcuni angoli notevoli



$$B = \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R \sin\frac{\pi}{2} \\ -R\cos\frac{\pi}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix}$$



$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R \sin\pi \\ -R\cos\pi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ R \end{bmatrix}$$

Calcoliamo la lunghezza della molla. Tale lunghezza corrisponde alla lunghezza del segmento AB.

$$A = \begin{bmatrix} 0 \\ -2R \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} R\sin\theta \\ -R\cos\theta \end{bmatrix}$$

$$\overline{AB} = \sqrt{(0 - R\sin\theta)^2 + (-2R + R\cos\theta)^2}$$

Verifichiamo la precedente relazione per alcuni angoli notevoli

$$= \sqrt{R^2 \sin^2\theta + 4R^2 + R^2\cos^2\theta - 4R^2\cos\theta}$$

$$= \sqrt{R^2 + 4R^2 - 4R^2\cos\theta}$$

$$= \sqrt{5R^2 - 4R^2\cos\theta}$$

$$= R\sqrt{5 - 4\cos\theta} \equiv \text{allungamento della molla.}$$

Potenziale della molla

$$U(\text{allungamento}) = \frac{1}{2}K(\text{allungamento} - \text{lunghezza di riposo})^2$$

$$U(\theta) = \frac{1}{2}K\left(R\sqrt{5-4\cos\theta} - R\right)^2$$

$$= \frac{1}{2}KR^2\left(\sqrt{5-4\cos\theta} - 1\right)^2.$$

NOTA: Il potenziale si annulla per θ = π.

Calcolo la velocità angolare massima se il disco parte da fermo e $\theta = \frac{\pi}{2}$

Vale la cons. dell'energia meccanica!

@ $t=0$ $\qquad \theta = \frac{\pi}{2}$, $\omega = 0$

$$U_0 = \frac{1}{2} k R^2 \left(\sqrt{5 - 4\cos\frac{\pi}{2}} - 1 \right)^2$$

$$= \frac{1}{2} k R^2 \left(\sqrt{5} - 1 \right)^2$$

$$K_0 = \frac{1}{2} I \omega^2 = 0$$

@ $t = t_1$ $\qquad U_1 = 0$

$$K_1 = \frac{1}{2} I \omega_{MAX}^2$$

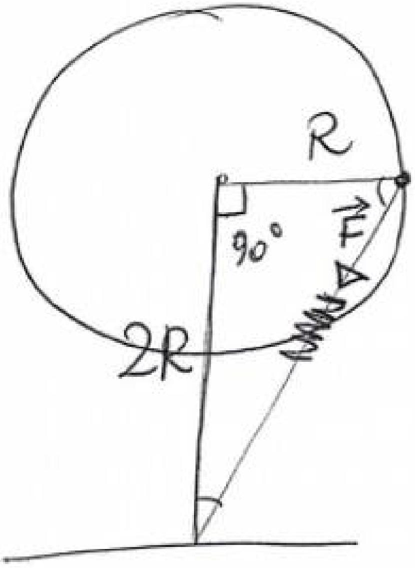
Istante in cui ho velocità massima e potenziale nullo.

$$U_0 + K_0 = U_1 + K_1$$

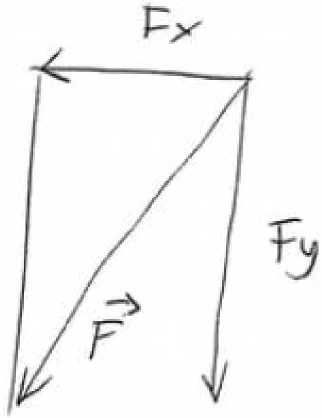
$$\cancel{\frac{1}{2}} K R^2 (\sqrt{5}-1)^2 = \cancel{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} M R^2\right) \omega_{MAX}^2$$

$$\omega_{MAX} = \sqrt{\frac{2K(\sqrt{5}-1)^2}{M}}$$

$$= (\sqrt{5}-1)\sqrt{\frac{2K}{M}}.$$



$\vec{F}$ è la forza di richiamo della molla.



$$|F_x| : R = |F_y| : 2R$$

$$\boxed{|F_x| = \frac{|F_y|}{2}}$$

$$|\vec{F}| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$$

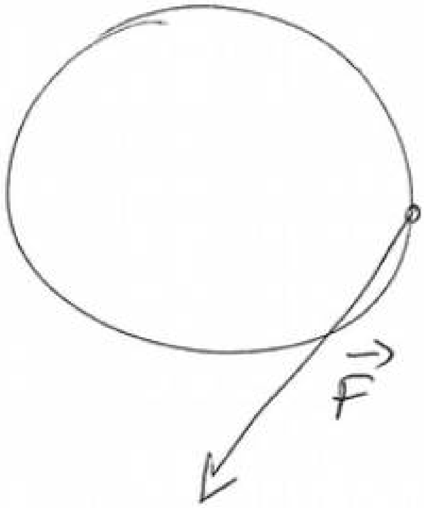
$$= \sqrt{\frac{F_y^2}{4} + F_y^2}$$

$$= \frac{\sqrt{5}}{2}|F_y| \qquad \cancel{\Rightarrow |F_y| =}$$

$$\cancel{\vec{F} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{5}}{4}|F_y| \\ \\ \\ \end{bmatrix}}$$

$$|F_y| = \frac{2|\vec{F}|}{\sqrt{5}} \; ; \; |F_x| = \frac{|\vec{F}|}{\sqrt{5}}$$

$$\vec{F} = |\vec{F}| \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 \end{bmatrix}$$



$$|\vec{F}| = K \,|\text{Allungamento} - \text{lung. di riposo}|$$

$$= K \,|\overline{AB} - R|$$

$$= K \,|R\sqrt{5 - 4\cos\theta} - R|$$

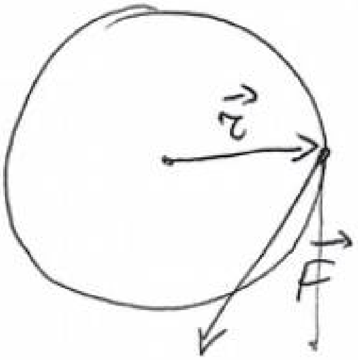
$$\theta = \frac{\pi}{2}$$

$$= K \,|R\sqrt{5} - R|$$

$$= K R \,|\sqrt{5} - 1|$$

$$\underline{= K R (\sqrt{5} - 1)} \qquad (\sqrt{5} > 1)$$

$$\vec{F} = K R (\sqrt{5} - 1) \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 \end{bmatrix}$$



$$\vec{r} = \begin{bmatrix} R \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} =$$

$$= \det \begin{bmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ R & 0 & 0 \\ -\frac{KR(\sqrt{5}-1)}{\sqrt{5}} & -\frac{2KR(\sqrt{5}-1)}{\sqrt{5}} & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \hat{z} \left(-\frac{2KR^2(\sqrt{5}-1)}{\sqrt{5}} \right) =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{2KR^2(\sqrt{5}-1)}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

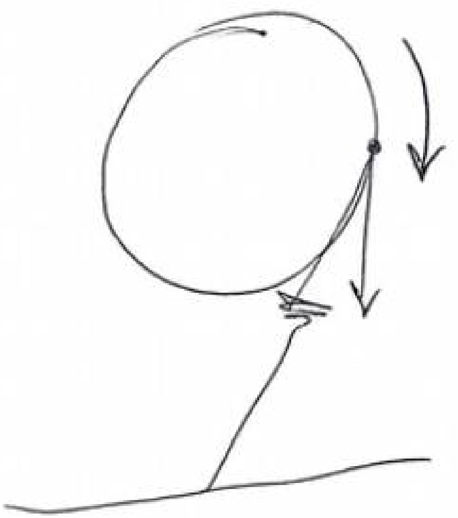
Come prevedibile, il momento torcente è un vettore che ha solo la componente z non nulla. infatti, l'asse di rotazione del disco corrisponde con l'asse z.

A questo punto, possiamo scrivere la II cardinale rispetto all'asse z:

$$I \alpha_z = \frac{-2KR^2(\sqrt{5}-1)}{\sqrt{5}}$$

$$\frac{1}{2} M \cancel{R^2} \alpha_z = \frac{-2k\cancel{R^2}(\sqrt{5}-1)}{\sqrt{5}}$$

$$\boxed{\alpha_z = \frac{-4k(\sqrt{5}-1)}{M\sqrt{5}}}$$



$\alpha_z < 0$ poichè il disco ruota in senso orario!

Esercizio estratto dall'esame di Fisica 1 del 23 Giugno 2017

Esercizio 3

Un recipiente cilindrico di altezza H poggia su un piano orizzontale ed è superiormente aperto. Esso è colmo di un liquido ideale non omogeneo, la cui densità cresce con la profondità secondo la relazione $\rho(z)=\rho_0(1+3z^2/H^2)$: la densità è ρ_0 sulla superficie, per poi cresce fino a $4\rho_0$ man mano che si scende dentro il recipiente. Determinare a quale distanza dalla parete colpisce il piano un getto che esca orizzontalmente da un piccolo foro praticato a profondità z (z è quindi la distanza fra foro e superficie superiore del liquido). Si chiede solo la distanza iniziale a cui arriva il getto: non preoccuparsi del fatto che poi il livello di liquido diminuirà.

Legge di Bernoulli

$$\boxed{P + \rho g h} + \frac{1}{2}\rho v^2 = \text{costante}$$

$$P + \frac{1}{2}\rho v^2 = \text{costante}$$

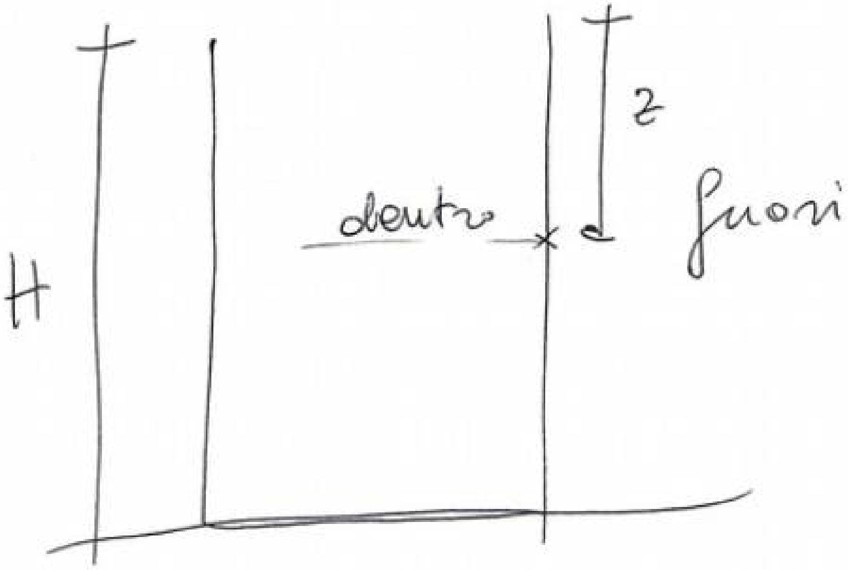
$$P = p_0 + \int_0^z g\rho(z)\,dz \quad \left(\text{vedi lezione 6}\right)$$

P a profondità z

$$P = p_0 + \int_0^z g\rho_0\left(1+\frac{3z^2}{H^2}\right)dz$$

p. atm.

$$= p_0 + g\rho_0\left(z+\frac{z^3}{H^2}\right).$$



$$P(\text{dentro}) + \frac{1}{2}\rho(\text{dentro})\, v(\text{dentro})^2$$
$$= P(\text{fuori}) + \frac{1}{2}\rho(\text{fuori})\, v(\text{fuori})^2$$

- $P(\text{dentro}) = p_0 + g\rho_0\left(z + \frac{z^3}{H^2}\right)$
- $v(\text{dentro}) = 0$
- $P(\text{fuori}) = p_0$

$$\cancel{p_0} + g\rho_0\left(z + \frac{z^3}{H^2}\right) = \cancel{p_0} + \frac{1}{2}\rho(\text{fuori})\, v(\text{fuori})^2$$

$$v(\text{fuori}) = \sqrt{\frac{2g\rho_0\left(z + \frac{z^3}{H^2}\right)}{\rho(\text{fuori})}}$$

$$\rho(\text{fuori}) = \rho(z)$$

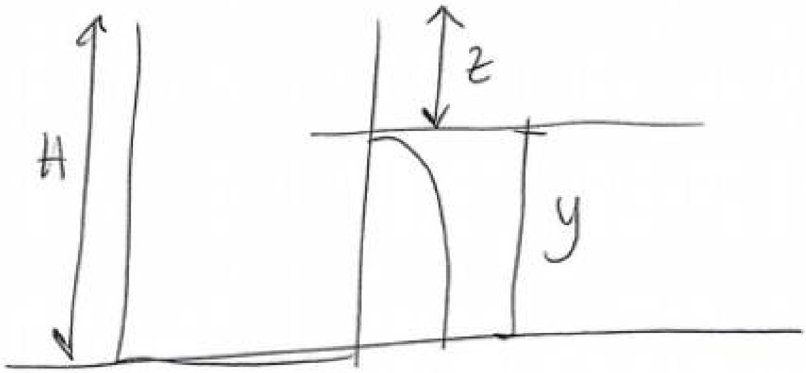
$$V(\text{fuori}) = \sqrt{\frac{2g\,\cancel{\rho_0}\left(z + \frac{z^3}{H^2}\right)}{\cancel{\rho_0}\left(1 + \frac{3z^2}{H^2}\right)}}$$

$$= \sqrt{\frac{2g\left(z + \frac{z^3}{H^2}\right)}{1 + \frac{3z^2}{H^2}}}$$

---

t è il tempo che impiega l'acqua ad arrivare a terra.

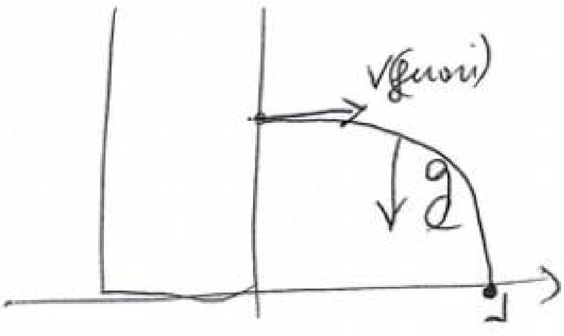
$$y = \frac{1}{2} g t^2$$



$$y = H - z$$

$$H - z = \frac{1}{2} g t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2(H-z)}{g}}$$

Distanza del getto



$$d = v(\text{fuori}) \cdot t$$