Corso di recupero di Fisica 2016/2017

Dario Madeo

Lezione del 16/06/2017

Slides disponibili all'indirizzo
http://www.dii.unisi.it/~madeo/crf/crf1617.html

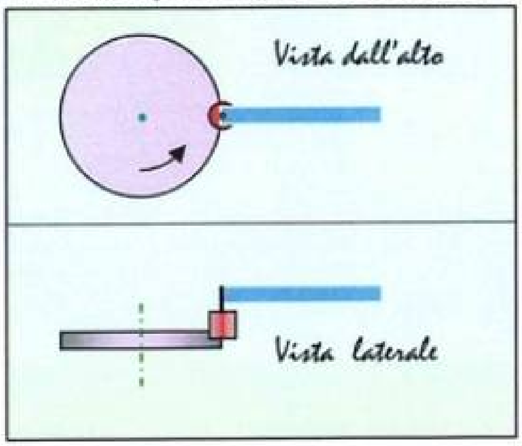
Esercizio estratto dall'esame di Fisica 1 del 4 Settembre 2014

Esercizio 2

Un disco omogeneo di massa 4M e raggio R può ruotare liberamente intorno ad un asse verticale. Sul bordo del disco è applicata, per mezzo di un piccolo motore di massa M, una sbarretta di massa 2M e lunghezza 2R. Inizialmente, il sistema ruota a velocità angolare ω_0, la sbarretta è allineata con il raggio ed è diretta verso l'esterno, come in figura. Poi, il motore porta lentamente la sbarretta a coincidere con il diametro del disco.

a) Qual è la velocità angolare finale del sistema? E quanto lavoro compie il motore per raggiungere la configurazione finale?

b) Durante il processo, si ha un istante in cui la sbarretta è tangente al disco medesimo, qual è il modulo della reazione vincolare sull'asse del disco, a tale istante?



Momento di inerzia

Disco $\boxed{I = \frac{MR^2}{2}}$

$$I = \frac{4MR^2}{2} = 2MR^2$$

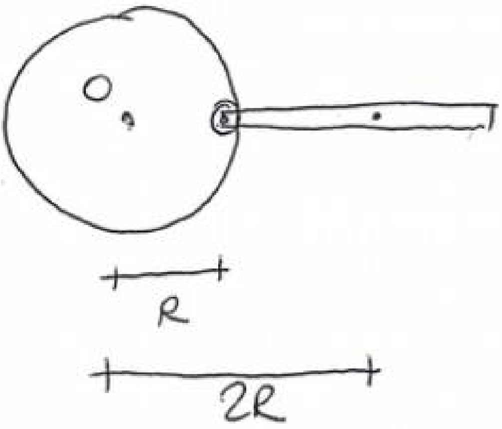
rispetto al CDM

Sbarretta $\boxed{I = \frac{Ml^2}{12}}$

$$I = \frac{2M(2R)^2}{12} = \frac{2}{3}MR^2$$

rispetto al CDM

1)



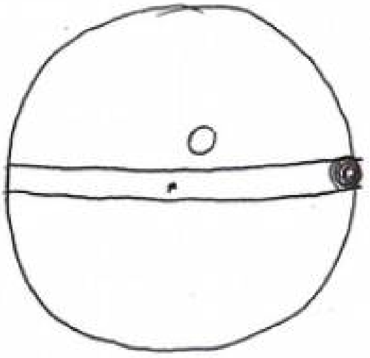
$$I_1 = 2MR^2 + \quad \text{(disco)}$$

$$+ \frac{2}{3}MR^2 + 2M(2R)^2 \quad \text{(sbarretta)}$$

$$+ 0 + MR^2 \quad \text{(motore)}$$

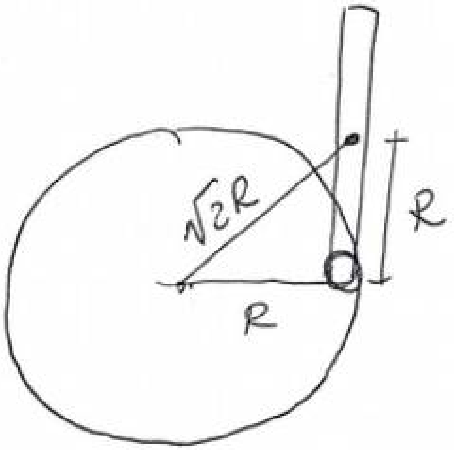
$$= \dots = \frac{35}{3}MR^2$$

2)

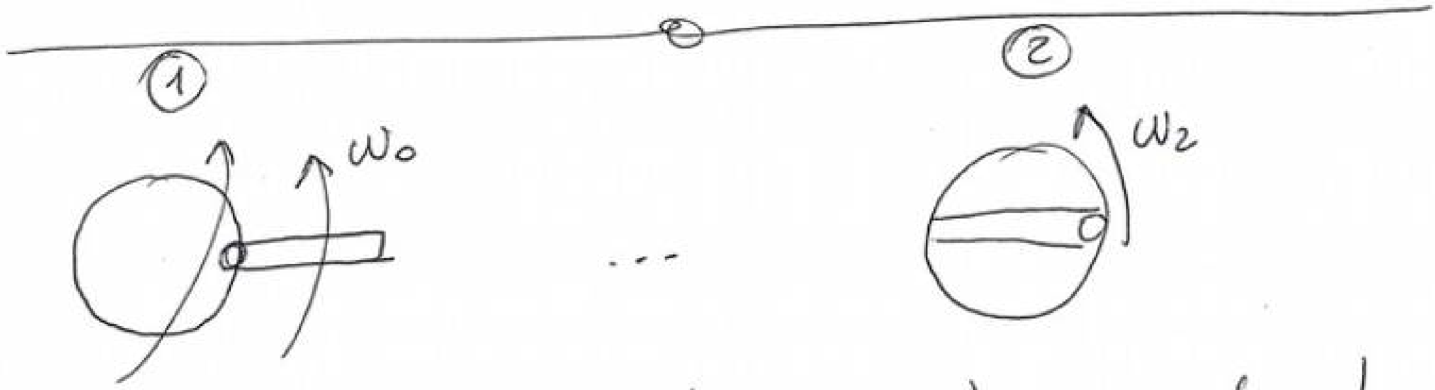


$$I_2 = 2MR^2 + \quad \text{(disco)}$$
$$+ \frac{2}{3}MR^2 + \quad \text{(sbarretta)}$$
$$+ 0 + MR^2 \quad \text{(motore)}$$
$$= \frac{11}{3}MR^2$$

3)



$$I_3 = 2MR^2 + \quad \text{(disco)}$$
$$+ \frac{2}{3}MR^2 + 2M(\sqrt{2}R)^2 \quad \text{(sbarretta)}$$
$$+ 0 + MR^2 \quad \text{(motore)}$$
$$= \frac{23}{3}MR^2$$



Conservazione del momento angolare!

$$I_1 \omega_0 = I_2 \omega_2$$
$$\frac{35}{\cancel{3}} \cancel{MR^2} \omega_0 = \frac{11}{\cancel{3}} \cancel{MR^2} \omega_2$$
$$\boxed{\omega_2 = \frac{35}{11}\omega_0}$$

Energia cinetica in 1

$$K_1 = \frac{1}{2} I_1 \omega_0^2$$

Energia cinetica in 2

$$K_2 = \frac{1}{2} I_2 \omega_2^2$$

$$\boxed{\text{Th. delle forze vive:} \quad L = K_2 - K_1}$$

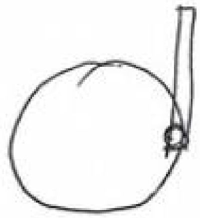
$$L = \frac{1}{2} I_2 \omega_2^2 - \frac{1}{2} I_1 \omega_0^2$$

$$= \frac{1}{2} \frac{11}{3} MR^2 \left(\frac{35}{11}\right)^2 \omega_0^2 - \frac{1}{2} \frac{35}{3} MR^2 \omega_0^2$$

$$= \ldots MR^2 \omega_0^2 \frac{140}{11}.$$

L è il lavoro compiuto dal motore!

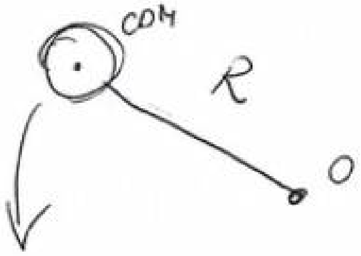
Calcoliamo la reazione sull'asse nella configurazione 3.



$$I_3 = \frac{23}{3} MR^2$$

In teoria ... $a_c = \frac{V_T^2}{R} = \omega^2 R$ $(V_T = \omega R)$

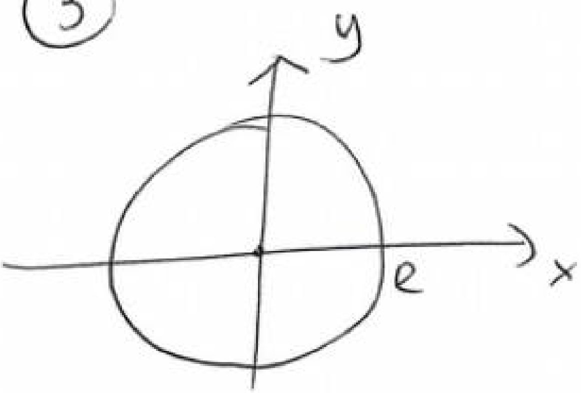
R in questo caso è la distanza tra il COM del sistema e l'asse di rotazione!



⟸ Caso "semplice"

Devo calcolare il CDM della configurazione

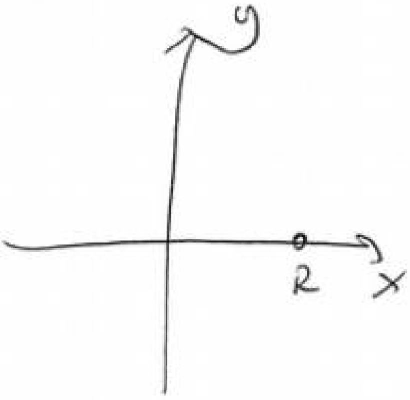
(3)



$x_{CDM} = 0$

$y_{CDM} = 0$

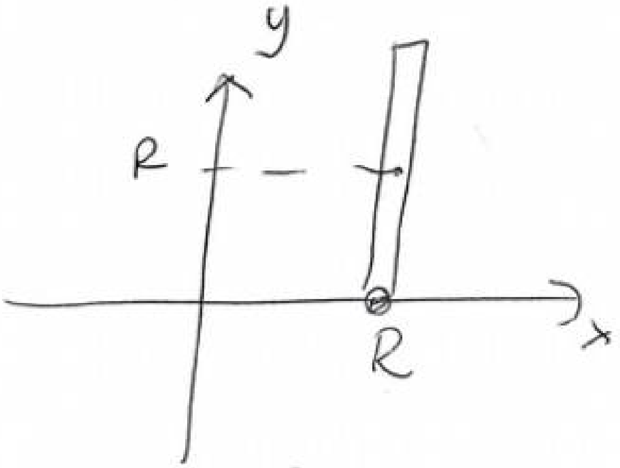
$4M$



$x_{CDM} = R$

$y_{CDM} = 0$

M



$x_{CDM} = R$

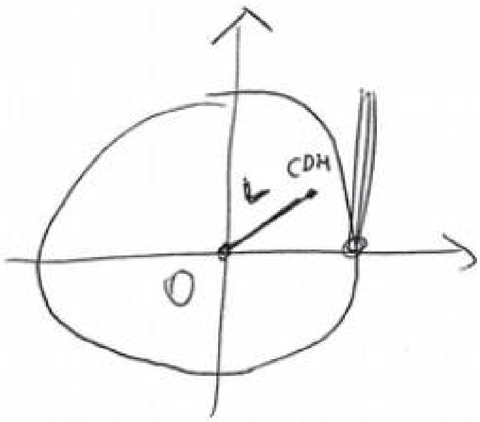
$y_{CDM} = R$

$2M$

In totale

$$x_{CDM} = \frac{0 \cdot 4M + R \cdot M + R \cdot 2M}{4M + M + 2M} = \frac{3}{7} R$$

$$y_{CDM} = \frac{0 \cdot 4M + 0 \cdot M + R \cdot 2M}{7M} = \frac{2}{7} R$$



$$L = \sqrt{\left(\frac{3}{7}R\right)^2 + \left(\frac{2}{7}R\right)^2} = \frac{\sqrt{13}}{7} R.$$

$$a_c = \omega_3^2 L$$

$F_c \equiv$ forza centripeta

$\equiv$ reazione sull'asse

$$= 7M\, a_c = \cancel{7}M \omega_3^2 \frac{\sqrt{13}}{\cancel{7}} R$$

$$= M\omega_3^2 \sqrt{13}\, R$$

ω_3... la calcolo di nuovo con la cons. del momento angolare.

$$I_3 \omega_3 = I_1 \omega_0$$

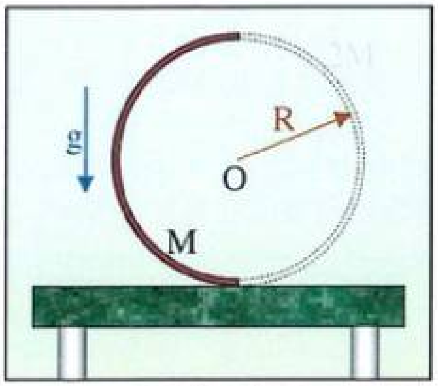
$$\omega_3 = \frac{I_1 \omega_0}{I_3} \quad \ldots$$

$$\boxed{F_c = M R \omega_0^2 \sqrt{13} \left(\frac{35}{23}\right)^2}$$

Esercizio estratto dall'esame di Fisica 1 del 20 Settembre 2011

Esercizio 2

Un anello circolare di raggio R e massa 2M equamente distribuita viene tagliato in due semianelli identici.



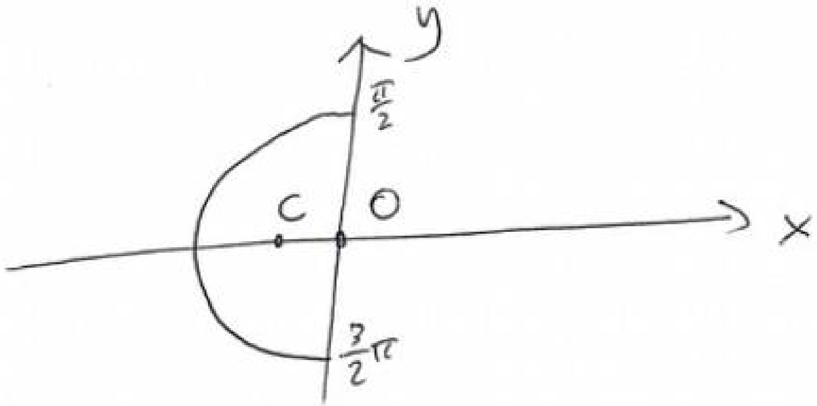
a) Calcolare la distanza d fra il centro di massa C di un semianello ed il suo centro di curvatura O.

b) Calcolare il momento d'inerzia del semianello rispetto al suo centro di massa (I_{CM}) e rispetto al punto P (I_P) in cui la retta CO interseca il semianello.

c) Il semianello viene lasciato libero su un piano orizzontale, così che esso inizia a ruotare. Scrivere la velocità angolare all'istante in cui P tocca il piano, nell'ipotesi che si abbia puro rotolamento e nell'ipotesi che il piano sia privo di attrito.

Assumere che il moto avvenga solo nelle due dimensioni del piano dell'anello. Nel rispondere ai quesiti b e c, utilizzare i simboli delle quantità ricavate in precedenza.

$$\lambda = \frac{2M}{2\pi R} = \frac{M}{\pi R}$$



$$dm = \lambda dx$$

$$x = R\cos\theta$$

$$\theta \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3}{2}\pi\right]$$

$$dx = R d\theta$$

$$X_C = \frac{1}{M}\int x\, dm$$

$$= \frac{1}{M}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} R\cos\theta\, \lambda R\, d\theta$$

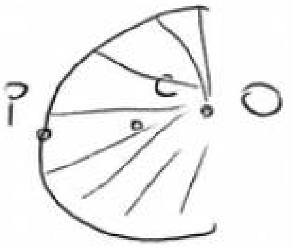
$$= \frac{\lambda R^2}{M}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} \cos\theta\, d\theta = \frac{\cancel{M} R^{\cancel{2}}}{\pi \cancel{R} \cancel{M}} \left(\sin\theta\right)_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} =$$

$$= \frac{R}{\pi}\left(-1-1\right) = -\frac{2R}{\pi}$$

<u>NOTA</u>

$y_C = 0$.

$$d_{co} = \sqrt{\left(-\frac{2R}{\pi}\right)^2 + 0^2} = \frac{2R}{\pi}$$



$$I_c = ? \qquad I_P = ?$$

Spesso nei sistemi con simmetria polare conviene calcolare il momento di inerzia rispetto al centro O della circonferenza. In tal caso, d = R...

Prima calcoliamo I_o

$$I_o = \int d^2 \, dm \qquad \underline{d = R}$$

$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} R^2 \lambda R \, d\theta =$$

$dm = \lambda \, dx$

$dx = R \, d\theta$

$dm = \lambda R \, d\theta$

$$= \lambda R^3 \left(\frac{3}{2}\pi - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \lambda R^3 \pi = \frac{M}{\pi R} R^3 \pi = \boxed{MR^2}$$

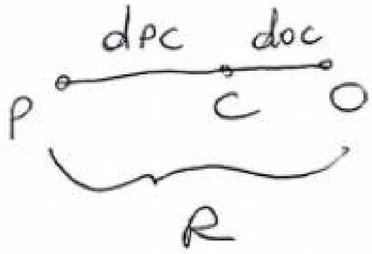
$$I_o = I_c + M d_{oc}^2 \qquad \underline{\text{Th Steyner}}$$

$$I_c = I_o - M d_{oc}^2$$

$$= MR^2 - MR^2 \frac{4}{\pi} = MR^2 \left(1 - \frac{4}{\pi}\right).$$

$$I_P = I_c + M d_{pc}^2$$

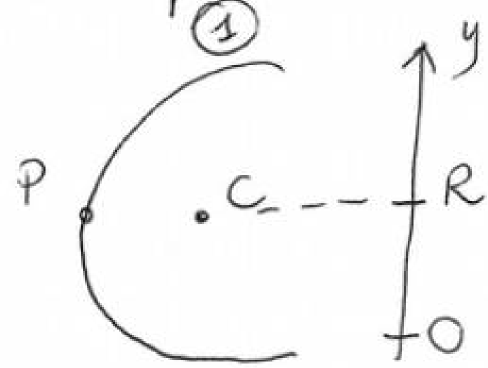
$$d_{pc} = R - d_{co}$$

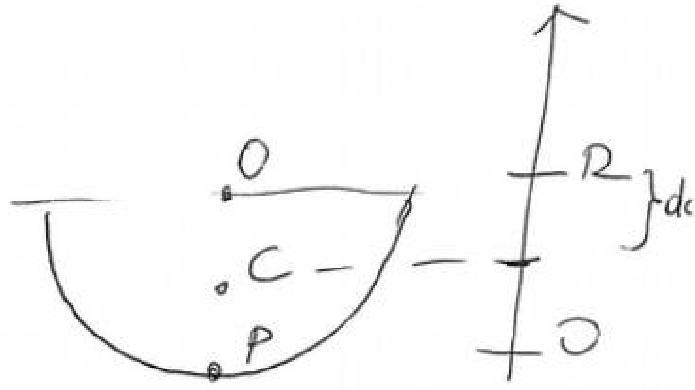


$d_{pc} = R - d_{co}$

$$I_P = \dots \quad MR^2\left(1-\frac{4}{\pi^2}\right) + MR^2\left(1-\frac{2}{\pi}\right)^2 = \dots$$

In entrambi i casi, si conserva l'energia meccanica.





$U_1 = MgR$ $\qquad$ $U_2 = Mg(R - d_{CO})$

$K_1 = 0$ $\qquad$ $K_2 = \frac{1}{2} I\omega^2$

$$U_1 = U_2 + K_2$$

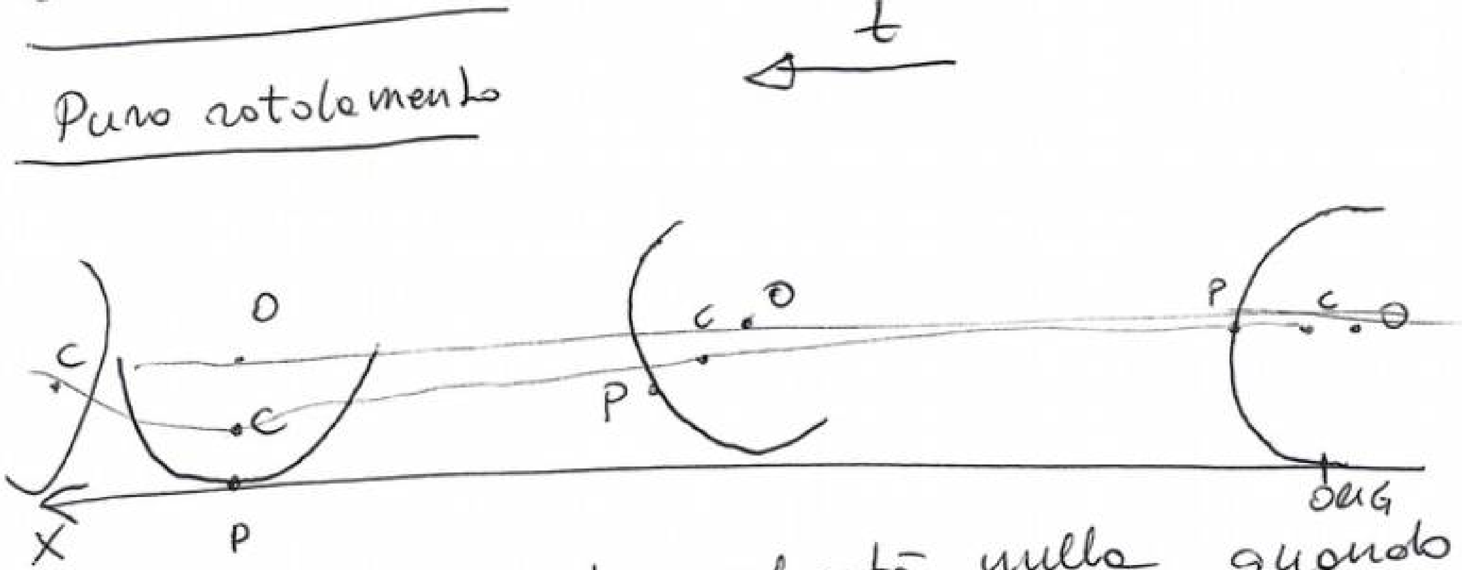
$$MgR = Mg(R - d_{CO}) + \frac{1}{2} I\omega^2$$

$$\frac{1}{2} I\omega^2 = Mg\, d_{CO}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{2Mg\, d_{CO}}{I}}.$$

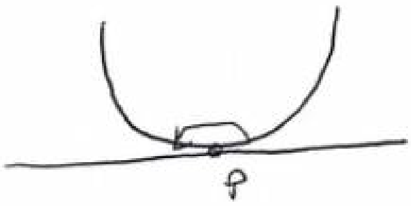
Quale I uso?

Puro rotolamento



Il COM ~~non si~~ ha velocità nulla quando P tocca il suolo!

Non ho cinetica traslazionale



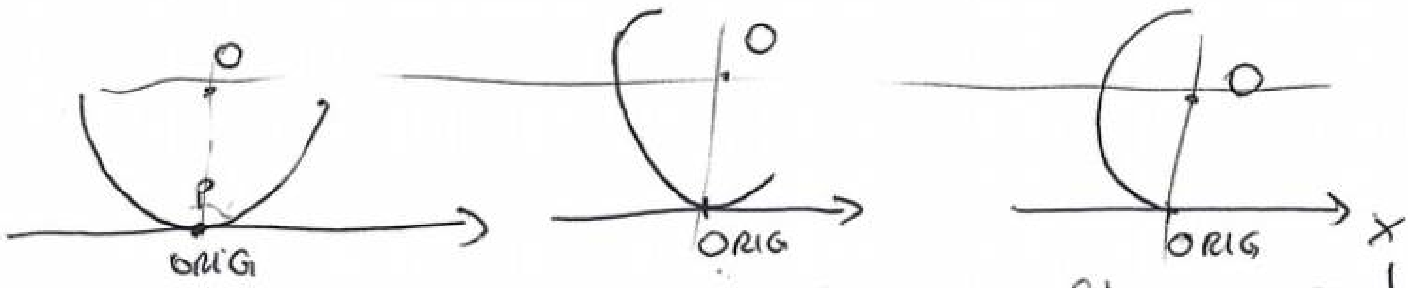
Il sys ruota intorno a P!

$$\omega = \sqrt{\frac{2Mg\, d\cos}{I_P}}$$

Niente attrito

L'oggetto scivola.

1) O non si muove mai!



La rotazione avviene lungo l'asse O!

$$\omega = \sqrt{\frac{2Mg\,d_{CO}}{I_O}}$$

Esercizio estratto dall'esame di Fisica 1 del 4 Novembre 2010

Esercizio 1

Una particella di massa M è vincolata a muoversi lungo l'asse x e su di essa agisce una forza conservativa cui è associata un'energia potenziale che dipende dall'ascissa x secondo la legge:

$$U(x)=Ax^2e^{-|x|/L},$$

dove L è una lunghezza assegnata ed A una costante da determinare.

a) Determinare quali e quante sono le posizioni d'equilibrio e, al variare di A, chiarire quante di esse sono di equilibrio stabile.

b) Considerando un valore di A per il quale esistono due posizioni d'equilibrio stabile x_1 e x_2, calcolare la velocità minima che deve avere la particella in x_1 per poter raggiungere x_2 e chiarire se, per velocità superiori a quella individuata, la particella tornerà poi in x_1 oppure se ne allontanerà indefinitamente.

c) Per un valore di A tale che esista una sola posizione di equilibrio stabile, determinare la frequenza di piccole oscillazioni intorno a tale posizione.

$$F = -U'(x)$$

Def x è una posizione di equilibrio se $F=0 \Rightarrow U'(x)=0$

Gli equilibri sono i punti stazionari del potenziale $U(x)$!

Def x, equilibrio, è stabile se

$$U''(x)>0 \qquad (x \text{ è un minimo locale di } U(x))$$

È indifferente se

$$U''(x)=0 \qquad (x \text{ è un flesso di } U(x))$$

È instabile se

$$U''(x)<0 \qquad (x \text{ è un massimo locale di } U(x))$$

$$U(x) = Ax^2 e^{-\frac{|x|}{L}}$$

$$U(x) = \begin{cases} Ax^2 e^{-\frac{x}{L}} & x \geq 0 \\ Ax^2 e^{\frac{x}{L}} & x < 0 \end{cases}$$

$$U'(x) = \begin{cases} 2Axe^{-\frac{x}{L}} - \frac{Ax^2}{L} e^{-\frac{x}{L}} & x \geq 0 \\ 2Axe^{\frac{x}{L}} + \frac{Ax^2}{L} e^{\frac{x}{L}} & x < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} Ae^{-\frac{x}{L}} \left(2x - \frac{x^2}{L} \right) & x \geq 0 \\ Ae^{\frac{x}{L}} \left(2x + \frac{x^2}{L} \right) & x < 0 \end{cases}$$

$$U''(x) = \begin{cases} -\frac{A}{L} e^{-\frac{x}{L}} \left(2x - \frac{x^2}{L} \right) + Ae^{-\frac{x}{L}} \left(2 - \frac{2x}{L} \right) & x \geq 0 \\ \frac{A}{L} e^{\frac{x}{L}} \left(2x + \frac{x^2}{L} \right) + Ae^{\frac{x}{L}} \left(2 + \frac{2x}{L} \right) & x < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} Ae^{-\frac{x}{L}} \left(\frac{x^2}{L^2} - \frac{4x}{L} + 2 \right) & x \geq 0 \\ Ae^{\frac{x}{L}} \left(\frac{x^2}{L^2} + \frac{4x}{L} + 2 \right) & x < 0 \end{cases}$$

Notare che la derivata di U(x) è continua in 0!!!

Equilibri : $U'(x) = 0$

1) $U'(x) = 0$ noto che $x \geq 0$

$$\underbrace{Ae^{-\frac{x}{L}}}_{\neq 0}\left(2x - \frac{x^2}{L}\right) = 0$$

$$2x - \frac{x^2}{L} = 0 \quad \begin{cases} x = 0 & \geq 0 \\ x = 2L & \geq 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} x_0 = 0 \\ x_2 = 2L \end{array} \quad \text{sono equilibri}}$$

2) $U'(x) = 0$ noto che $x < 0$

$$\underbrace{Ae^{\frac{x}{L}}}_{\neq 0}\left(2x + \frac{x^2}{L}\right) = 0$$

$$2x + \frac{x^2}{L} = 0 \quad \begin{cases} x = 0 & \not< 0 \\ x = -2L & < 0 \end{cases}$$

$$\boxed{x_1 = -2L \text{ è un equilibrio!}}$$

Analizziamo la stabilità degli equilibri.

$$U''(x_0) = U''(0) = A e^{-\frac{0}{L}}\left(\frac{0^2}{L^2} - \frac{4\cdot 0}{L} + 2\right)$$
$$= 2A$$

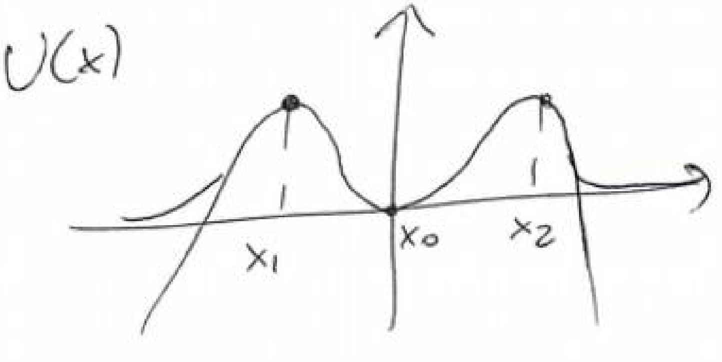
$$U''(x_2) = U''(2L) = A e^{-\frac{2L}{L}}\left(\frac{4L^2}{L^2} - \frac{4\cdot 2L}{L} + 2\right)$$
$$= -2Ae^{-2}$$

$$U''(x_1) = U''(-2L) = A e^{-\frac{2L}{L}}\left(\frac{4L^2}{L^2} - \frac{4\cdot 2L}{L} + 2\right)$$
$$= -2Ae^{-2}$$

Se $A > 0$ allora

x_0 è stabile

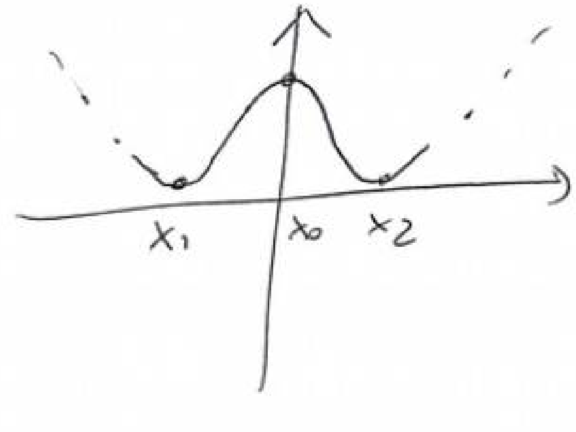
x_1, x_2 sono instabili



Se $A < 0$

x_0 è instabile

x_1, x_2 sono stabili



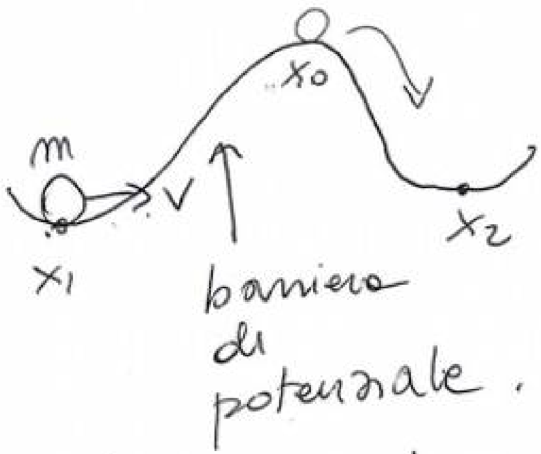
Se $A=0$ ...

$$U(x) = 0$$

$U'(x)=0 \quad \forall x \Rightarrow$ tutte le x sono equilibri

$U''(x)=0 \quad \forall x \Rightarrow$ tutti gli equilibri sono indifferenti.

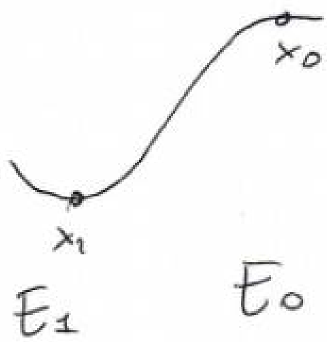
$A<0$, x_1 e x_2 sono stabili.



La supero se ho una velocità $v > \boxed{v_0}$, dove v_0 è la vel. che mi serve per raggiungere la cima con velocità finale nulla.

Siccome ho il potenziale, allora l'en. meccanica si conserva.

$$E_1 = E_0$$



$$U_1 + K_1 = U_0 + 0$$

$$U_1 = U(x_1) = U(-2L) = 4AL^2 e^{-2}$$

$$U_0 = U(x_0) = U(0) = 0$$

$$K_1 = \frac{1}{2} m v_0^2$$

$$4AL^2 e^{-2} + \frac{1}{2} m v_0^2 = 0$$

$$v_0 = \frac{2L}{e} \sqrt{\frac{-2A}{M}}$$ <u>NB</u> $A < 0$

$A > 0$, Calcolare la frequenza di piccole oscillazioni!

$$U(x) \simeq U(0) + U'(0)x + \frac{U''(0)x^2}{2} + \dots$$

$$= 0 + 0 + Ax^2$$

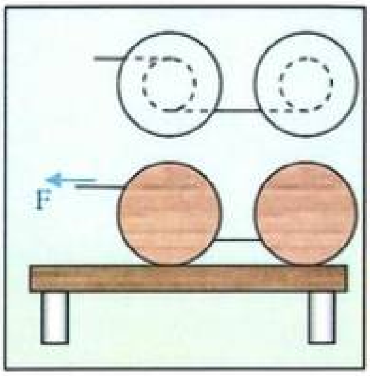
$$m\ddot{x} = -U'(x)$$

$$m\ddot{x} = -2Ax$$ → Ho linearizzato la forza

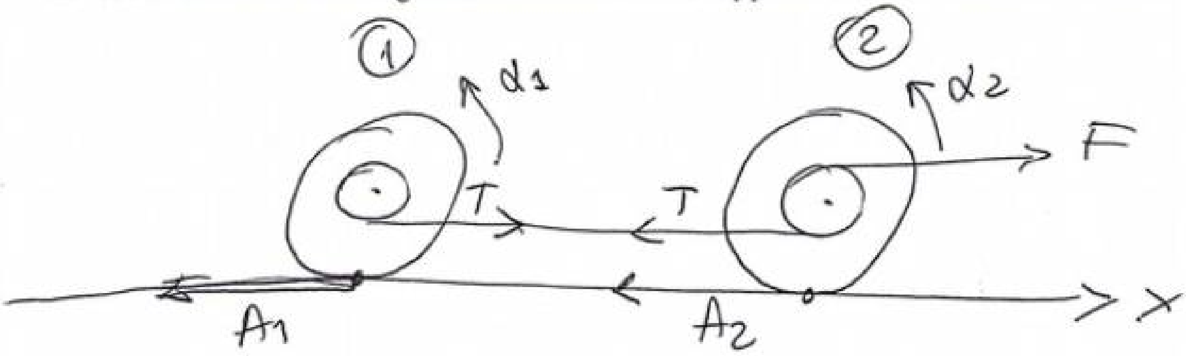
$$K = 2A$$

$$\Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{2A}{m}}$$ pulsazione per piccole oscillazioni

Esercizio estratto dall'esame di Fisica 1 del 17 Settembre 2015



Esercizio 2
Si hanno due rocchetti uguali inizialmente fermi. Ogni rocchetto è costituito da tre cilindri solidali e coassiali. Il cilindro intermedio ha raggio R e massa 2M mentre quelli laterali hanno raggio 2R e massa M. Questi oggetti sono sopra un piano orizzontale scabro sul quale rotolano senza strisciare. Una corda avvolta sul cilindro intermedio del rocchetto di sinistra (vd. figura) viene tirata con un'assegnata forza F. Un'altra corda avvolta come in figura, fa sì che anche l'altro rocchetto si metta in movimento. Calcolare l'accelerazione angolare di ciascun rocchetto, il lavoro svolto da F ad un generico istante t ed il rapporto fra le tensioni delle due corde.



Massa di un rocchetto: $4M$

Inerzia di un rocchetto: $5MR^2$ (rispetto all'asse del cilindro)

1

$$4M a_1 = T - A_1$$

$$5MR^2 \alpha_1 = TR - 2RA_1$$

$$a_{PDC1} = a_1 + 2R\alpha_1$$

Nota $a_{PDC1} = 0$

$$\boxed{a_1 = -2R\alpha_1}$$

$$\alpha_1 = -\frac{a_1}{2R}$$

(2)

$4Ma_2 = F - T - A_2$

$5MR^2\alpha_2 = -FR - TR - 2RA_2$

$\boxed{a_2 = -2R\alpha_2}$ $(a_{P0C2} = a_2 + 2R\alpha_2)$

$(a_{P0C2} = 0)$

$a_1 = a_2 = a$

$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$

$$\begin{cases} 4Ma = T - A_1 \\ T - A_1 = F - T - A_2 \\ 5MR^2\alpha = TR - 2RA_1 \\ TR - 2RA_1 = -FR - TR - 2RA_2 \\ a = -2R\alpha \end{cases}$$

$$A_1 = \frac{13}{14}F$$

$$A_2 = -\frac{15}{14}F$$

$$\alpha = -\frac{1}{14}\frac{F}{MR}$$

$$a = \frac{1}{7}\frac{F}{M}$$

$$T = \frac{3}{2}\frac{F}{M}$$

- Acc. angolare è $\alpha = - \dots \frac{F}{RM}$
- $T > A_1$
- $F > T + A_2$
- $A_2 < 0$ (da verificare)

Calcolare il rapp. tra le tensioni sulle funi:

$$\frac{T}{F} \qquad \left(T = \ldots F\right)$$

I 2 rocchetti hanno la stessa a.

In un tempo t, il sistema percorre uno spazio pari a

$$\Delta s = \frac{1}{2} a t^2 \qquad \left(a = \ldots \frac{F}{M}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \ldots \frac{F}{M} t^2$$

Il lavoro è

$$W = F \Delta s = \frac{1}{2} \ldots \frac{F^2}{M} t^2 .$$