

Corso di recupero di Fisica 2016/2017

Dario Madeo

Lezione del 09/06/2017

**Slides disponibili all'indirizzo
<http://www.dii.unisi.it/~madeo/crf/crf1617.html>**

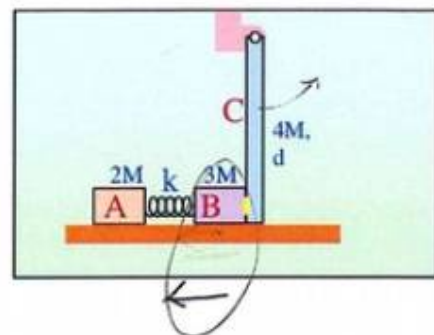
Esercizio estratto dall'esame di Fisica 1 del 15 Maggio 2017 (1)

Esercizio 1 ($\alpha, \beta, \gamma \in \{1, 2, 3, 4\}$)

Due corpi A e B, rispettivamente di massa αM e βM sono fermi su un piano orizzontale liscio (vd figura). Essi sono connessi tra loro per mezzo di una molla di costante elastica k . Inizialmente la molla è a riposo ed il centro di massa di A+B è in $x=0$.

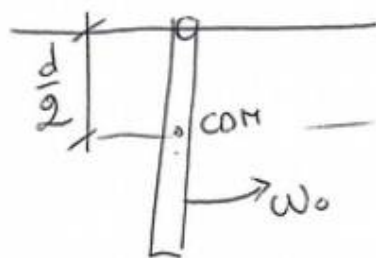
Il corpo B è a contatto con l'estremo di una sbarretta omogenea C di massa γM e lunghezza d imperniata all'estremo opposto, e fra B e C c'è una carica esplosiva. All'istante $t=0$ la carica esplode separando B da C. Successivamente, C compie mezzo giro e arriva con velocità nulla alla sua posizione di equilibrio instabile. Determinare:

- l'energia cinetica di B e di C subito dopo l'esplosione;
- la massima compressione della molla nelle oscillazioni che seguono;
- gli istanti t_n ai quali la molla è a riposo e la posizione del centro di massa di A+B a tali istanti.

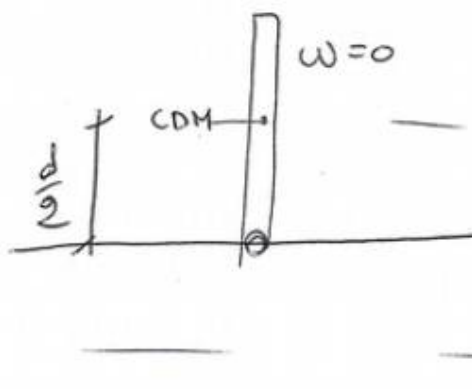


Analizziamo la sbarretta C

$$I = \frac{4M d^2}{3}$$



①



②

Si conserva l'energia meccanica

$$K_1 + U_1 = K_2 + U_2$$

$$K_1 = \frac{1}{2} I \omega_0^2$$

$$K_2 = 0$$

$$U_1 = 4Mg \cdot 0 = 0$$

$$U_2 = 4Mg d$$

In (1) ho:

- energia cinetica non nulla ($K_1 > 0$)
- energia potenziale nulla ($U_1 = 0$)

In (2) ho:

- energia cinetica nulla ($K_2 = 0$)
- energia potenziale non nulla ($U_2 = 4Mg d$)

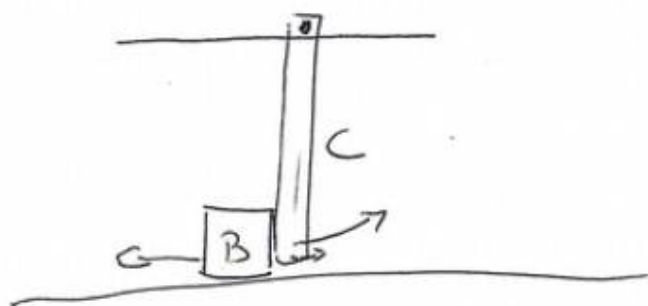
$$\Rightarrow K_1 = U_2$$

$$\frac{1}{2} I \omega_0^2 = 4Mgd$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{8Mgd}{I}}$$

$$K_2 = \frac{1}{2} I \omega_0^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{8Mgd}{1} = 4Mgd$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2 \cdot 8Mgd \cdot 3}{4Md^2}} = \sqrt{\frac{6g}{d}}$$



Dopo ~~l'esplosione~~ l'esplosione,
si conserva
il momento
angolare.

Prima dell'esplosione il M.A. è nullo.
Dopo l'esplosione il M.A. è

Momento angolare dopo l'esplosione

$$L_C - L_B$$

Notare il segno dei momenti angolari!!!
Infatti C ruota in senso antiorario (segno +),
B "ruota" (in realtà trasla soltanto) in senso
orario (segno -).

$$\Rightarrow L_C - L_B = 0 \Rightarrow L_C = L_B$$

$$L_C = I \omega_0 = \frac{4Md^2}{3} \sqrt{\frac{6g}{d}}$$

N.B. Il momento angolare
Prima dell'esplosione è nullo
poichè nessuna massa si muove!

$$L_B = \underline{3M v_0 d}$$

$$(L = p \cdot \text{braccio})$$

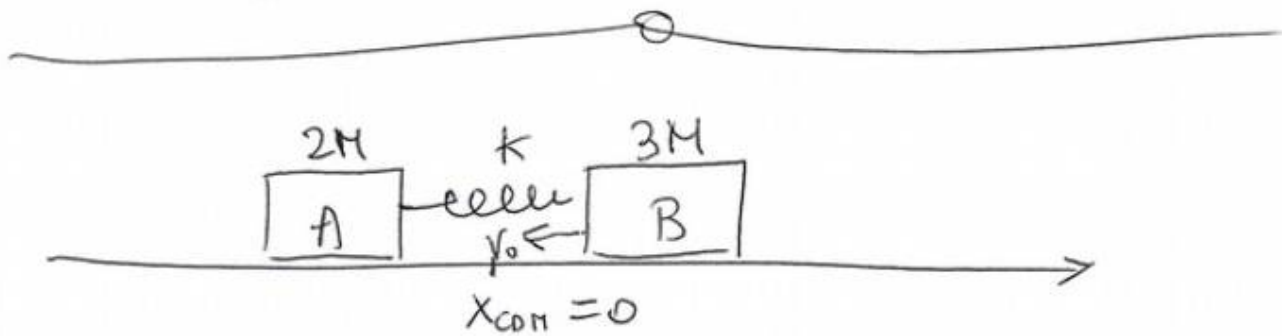
Se l'oggetto trasla, allora possiamo calcolare il suo momento angolare come il prodotto della sua quantità di moto per il braccio (distanza della massa dal fulcro).

$$L_C = L_B$$

$$\frac{4Md^2}{3} \sqrt{\frac{6g}{d}} = 3M v_0 d$$

$$\boxed{v_0 = \frac{4d}{9d} \sqrt{\frac{6g}{d}}}$$

$$K_B = \frac{1}{2} \cdot 3M \cdot v_0^2 = \dots$$



$x_A(t)$ e $x_B(t)$ evolvono nel tempo.

$\Rightarrow x_{com}(t)$ evolve nel tempo.

$$x_{com}(t) = \frac{2M x_A(t) + 3M x_B(t)}{2M + 3M}$$

$$= \frac{2x_A(t) + 3x_B(t)}{5}$$

$$\dot{X}_{CDM}(t) = \frac{2 \dot{x}_A(t) + 3 \dot{x}_B(t)}{5}$$

$$\ddot{X}_{CDM}(t) = \frac{2 \ddot{x}_A(t) + 3 \ddot{x}_B(t)}{5} \quad *$$

ODE che regolano la dinamica

~~3M\ddot{x}_B~~
$$\begin{cases} 2M\ddot{x}_A = -K(x_A - x_B) \\ 3M\ddot{x}_B = -K(x_B - x_A) \end{cases} \quad **$$

Sys. del 4° ordine! $\Rightarrow$ Ha 4 modi

Sostituisco ** in *

$$\begin{aligned} \ddot{X}_{CDM}(t) &= \frac{2 \left(-\frac{K}{2M} (x_A - x_B) \right) + 3 \left(-\frac{K}{3M} (x_B - x_A) \right)}{5} \\ &= \frac{-\frac{K}{M} x_A + \frac{K}{M} x_B - \frac{K}{M} x_B + \frac{K}{M} x_A}{5} = 0 \end{aligned}$$

I 4 modi sono:

1) $\cos \omega t$

2) $\sin \omega t$

3) 1

4) t

} Oscillazioni

} MRU del CDM

Poichè l'accelerazione del CDM è nulla, posso concludere che esso si muove di moto rettilineo uniforme (MRU)!!!

$$x(t) = \underbrace{x_0}_1 + \underbrace{v_0 t}_t$$

$$x_A(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t + C + Dt$$

$$x_B(t) = E \cos \omega t + F \sin \omega t + G + Ht$$

Le leggi orarie della Posizione dei due corpi è la somma di 4 contributi (4 modi).

$$x_A(0) = A + C$$

$$x_B(0) = E + G$$

$$x_{\text{CDM}}(0) = \frac{2x_A(0) + 3x_B(0)}{5} = 0$$

$$2(A + C) + 3(E + G) = 0$$

Da notare che questo calcolo mi serve a poco, poichè non conosco la posizione iniziale dei due corpi... Tuttavia, questo non è importante visto che siamo interessati a studiare il moto del centro di massa e la pulsazione delle oscillazioni.

$$x_{\text{CDM}}(t) = \frac{2x_A(t) + 3x_B(t)}{5} \quad \text{non ha sin e cos}$$

La legge oraria del CDM non ha sin e cos... infatti si muove di MRU!

$$2(A \cos \omega t + B \sin \omega t + \dots) + 3(E \cos \omega t + F \sin \omega t + \dots) = 0$$

$$\begin{cases} 2A + 3E = 0 \\ 2B + 3F = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A = -\frac{3E}{2} \\ B = -\frac{3F}{2} \end{cases}$$

$$x_A(t) = -\frac{3E}{2} \cos \omega t - \frac{3F}{2} \sin \omega t + C + Dt$$

$$x_B(t) = E \cos \omega t + F \sin \omega t + G + Ht$$

$$\dot{x}_{CDM}(t) = \frac{2 \dot{x}_A(t) + 3 \dot{x}_B(t)}{5}$$

$$\dot{x}_{CDM}(0) = \frac{2 \dot{x}_A(0) + 3 \dot{x}_B(0)}{5} = \frac{3}{5} v_0$$

$$\boxed{\dot{x}_{CDM}(0) = \frac{3}{5} v_0}$$

$$\boxed{x_{CDM}(t) = 0 + \frac{3}{5} v_0 t} \quad \leftarrow x_{CDM}(0) = 0$$

$$x_{CDM}(t) = \frac{2 x_A(t) + 3 x_B(t)}{5}$$

$$= \frac{2(C + Dt) + 3(G + Ht)}{5}$$

$$x_{CDM}(0) = \frac{2C + 3G}{5} = 0$$

$$\boxed{C = -\frac{3}{2} G}$$

$$\dot{x}_{\text{COM}}(t) = \frac{2\dot{x}_A(t) + 3\dot{x}_B(t)}{5}$$

$$\dot{x}_{\text{COM}}(t) = \frac{2 \cdot D + 3 \cdot H}{5} = \frac{3}{5} v_0$$

$$D = \frac{3v_0 - 3H}{2}$$

$$x_A(t) = -\frac{3E}{2} \cos \omega t - \frac{3F}{2} \sin \omega t - \frac{3}{2} G + D \left(\frac{3v_0 - 3H}{2} \right) t$$

$$x_B(t) = E \cos \omega t + F \sin \omega t + G + Ht$$

$$x_A(t) = -\frac{3}{2} x_B(t) + \frac{3v_0}{2} t$$

$$3M \ddot{x}_B = -Kx_B + Kx_A$$

$$3M (-E\omega^2 \cos \omega t - F\omega^2 \sin \omega t) =$$

$$-K (E \cos \omega t + F \sin \omega t + G + Ht)$$

$$+ K \left(-\frac{3}{2} E \cos \omega t - \frac{3}{2} F \sin \omega t - \frac{3}{2} G - \frac{3}{2} Ht + \frac{3}{2} v_0 t \right)$$

$$+ \cancel{3M} \omega^2 = + \cancel{K} + \frac{3}{2} \cancel{K}$$

$$\boxed{(3M) \omega^2 = K + \frac{3}{2} K}$$

$$M_B \omega^2 = K + \frac{M_B}{M_A} K$$

$$M_B \omega^2 = K \left(1 + \frac{M_B}{M_A} \right)$$

$$M_B \omega^2 = K \left(\frac{M_A + M_B}{M_A} \right)$$

$$\omega^2 = K \left(\frac{M_A + M_B}{M_A M_B} \right)$$

$$\boxed{\omega^2 = \frac{K}{\mu}}$$

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{K}{\mu}}}$$

Risultato: il sistema oscilla con una pulsazione che dipende dalla cosiddetta “massa ridotta”

1) CDM si muove di MRU con velocità $\frac{3}{5} v_0$

2) Il sistema oscilla con pulsazione

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{\mu}}$$

$$\mu = \frac{2M \cdot 3M}{2M + 3M} = \frac{6M}{5}$$

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{5k}{6M}}}$$

T è il tempo che ci vuole a fare un'oscillazione

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Torna a riposo dopo mezza oscillazione

$$0, \frac{T}{2}, T, \frac{3}{2}T, 2T, \dots$$

$t_0 \quad t_1 \quad t_2 \quad t_3 \quad t_4$

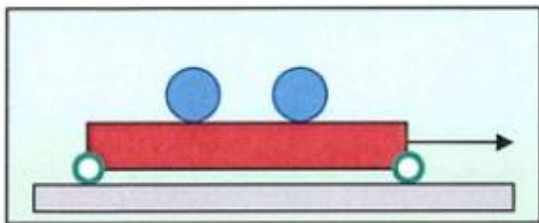
$$t_n = \frac{n}{2} T = \frac{n}{2} \frac{2\pi}{\omega} = \frac{n\pi}{\omega} = n\pi \sqrt{\frac{6M}{5k}}$$

In che posizione sta il COM @ t_n ?

$$X_{\text{COM}}^{(t_0)} = \frac{3}{5} v_0 t \quad \leftarrow \text{Legge oraria MRU}$$

$$X_{\text{COM}}(t_n) = \frac{3}{5} v_0 n \pi \sqrt{\frac{6H}{5K}}$$

Esercizio estratto dall'esame di Fisica 1 del 13 Febbraio 2017



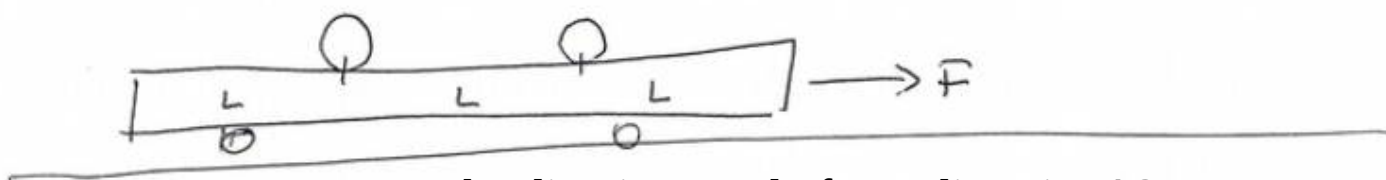
Esercizio 2

Su un binario orizzontale liscio può muoversi un carrello di massa trascurabile e lunghezza $3L$. Sopra il carrello poggiano due cilindri di massa M e raggio R aventi l'asse orizzontale e perpendicolare alla direzione del binario. Tali cilindri possono compiere moto di puro rotolamento sopra il

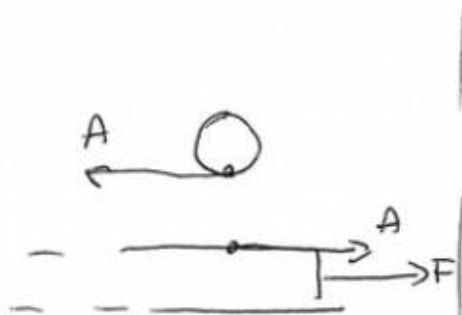
carrello. A $t=0$ un cilindro si trova a distanza L da un estremo del carrello, l'altro è in posizione simmetrica (vd figura) ed i tre corpi sono immobili. Una forza costante F è applicata al carrello verso destra. A quale istante cade il primo dei cilindri? Quanto lavoro è stato svolto da F fino a tale istante? Verificare che il lavoro calcolato in termini di forza e spostamento eguaglia l'energia cinetica dei cilindri.

Assumo che la massa del carrello sia m .

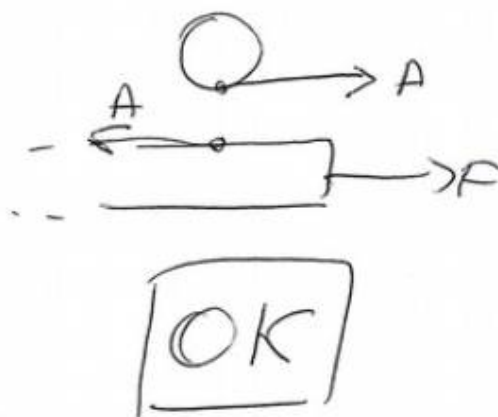
$$I = \frac{1}{2} MR^2 \quad (\text{inerzia di un cilindro})$$



In che direzione va la forza di attrito A ?

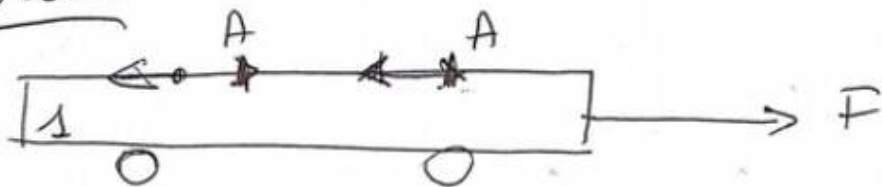


Non è possibile



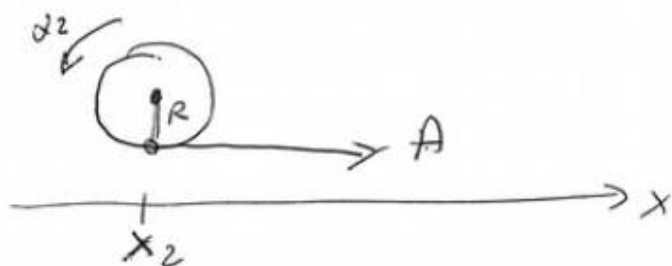
Infatti, non è possibile che l'attrito "aiuti" la forza esterna F !!!

Cerrello



$$m \ddot{x}_1 = F - 2A$$

Un cilindro



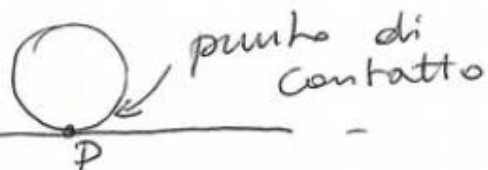
α₃, x₃
per
l'altro
cilindro

$$\begin{aligned} M \ddot{x}_2 &= A \\ I \alpha_2 &= RA \end{aligned}$$

Cilindro 1

$$\begin{aligned} M \ddot{x}_3 &= A \\ I \alpha_3 &= RA \end{aligned}$$

Cilindro 2



$$a_P = \ddot{x}_2 + \alpha_2 R$$

Il punto di contatto è solidale al cerrello.

$$a_P = \ddot{x}_3$$

$$\Rightarrow \ddot{x}_1 = \ddot{x}_2 + \alpha_2 R$$

Cal. 1

$$\ddot{x}_2 = \ddot{x}_3 + \alpha_3 R$$

Cal. 2.

Mi aspetto che:

$$\ddot{x}_2 = \ddot{x}_3, \quad \alpha_2 = \alpha_3$$

Nota $\boxed{x_2(t) \neq x_3(t)}$
 $\dot{x}_2(t) = \dot{x}_3(t)$

$$\theta_2(t) = \theta_3(t)$$

$$\omega_2(t) = \omega_3(t)$$

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = F - 2A \\ M\ddot{x}_2 = A \\ I\alpha_2 = RA \\ \ddot{x}_3 = \ddot{x}_2 + \alpha_2 R \end{cases}$$

$\ddot{x}_1, \ddot{x}_2, \alpha_2$ e A
4 incognite
 e
 4 equazioni.

$$A = \frac{FM}{2M+3m}$$

$$\ddot{x}_1 = \frac{3F}{2M+3m}$$

$$\ddot{x}_2 = \frac{F}{2M+3m}$$

$$\alpha_2 = \frac{2F}{R(2M+3m)}$$

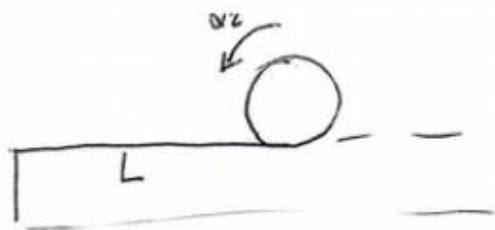
se
 $m \rightarrow 0$

$$A = \frac{F}{2}$$

$$\ddot{x}_1 = \frac{3F}{2M}$$

$$\ddot{x}_2 = \frac{F}{2M}$$

$$\alpha_2 = \frac{F}{RM}$$



Il moto rotatorio del cilindro è unif. accelerato.

$$\Theta(t) = \frac{1}{2} \alpha_2 t^2$$

Spazio percorso

$$S(t) = \frac{\cancel{2R} R \alpha_2 t^2}{2}$$

Cade quando $S(t) = L$

$$\frac{R}{2} \alpha_2 t^2 = L$$

$$t = \sqrt{\frac{2L}{R\alpha_2}} = \sqrt{\frac{2L R M}{R F}} = \sqrt{\frac{2LM}{F}}$$

Il carrello si sposta verso dx con moto unif. accelerato.

$$x_1(t) = \frac{1}{2} \ddot{x}_1 t^2$$

$$= \frac{1}{2} \ddot{x}_1 \left(\sqrt{\frac{2LM}{F}} \right)^2$$

$$= \frac{1}{2} \frac{3F}{2M} \frac{2LM}{F} = \frac{3}{2} L = \Delta x$$

Il lavoro compiuto da F è

$$W = F \Delta x = \frac{3}{2} FL$$

K_c : energia cinetica di un cilindro

$$K_c = \frac{1}{2} M \underset{\uparrow}{v}^2 + \frac{1}{2} I \underset{\uparrow}{\omega}^2$$

$\underline{v)}$ v è di COM, il COM ha acc. $\ddot{x}_2 = \frac{F}{2M}$

$$\begin{aligned} \dot{x}_2(t) &= \ddot{x}_2 t && \text{legge oraria della} \\ & && \text{velocità di un} \\ & && \text{corpo che si muove} \\ & && \text{di M.U.A.} \\ &= \frac{F}{2M} \sqrt{\frac{2LM}{F}} = v \end{aligned}$$

$\underline{\omega)}$ Il cilindro ruota con $\alpha_2 = \frac{F}{RM}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \omega_2(t) &= \alpha_2 t \\ &= \frac{F}{RM} \sqrt{\frac{2LM}{F}} \end{aligned}$$

NB: MUA = moto uniformemente accelerato!

$$K_c = \frac{1}{2} M \left(\frac{F}{2M} \sqrt{\frac{2LM}{F}} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} MR^2 \right) \left(\frac{F}{2M} \sqrt{\frac{2LM}{F}} \right)^2$$

$$= \frac{1}{2} M \frac{F^2}{4M^2} \frac{2LM}{F} + \frac{1}{2} MR^2 \frac{F^2}{2M^2} \frac{2LM}{F}$$

$$= \frac{FL}{4} + \frac{FL}{2} = \frac{3}{4} FL$$

$$W = \frac{3}{2} FL = 2 \cdot K_c \quad \checkmark$$

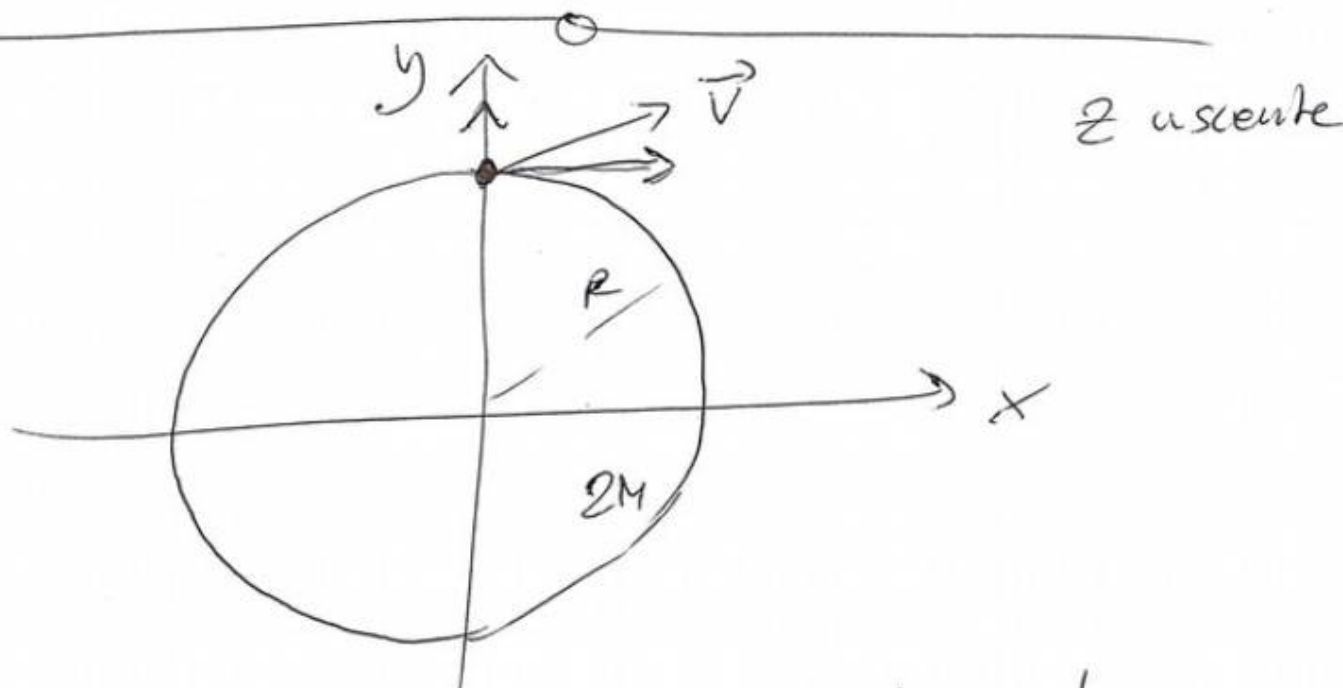
Esercizio estratto dall'esame di Fisica 1 del 17 Maggio 2017

Esercizio 2 ($\alpha, \beta, \gamma \in \{1, 2, 3\}$)

Un bambino di massa M è seduto da solo su una giostra di massa $2M$ [o $4M, 6M$] e raggio R (disco omogeneo con sedie di massa trascurabile poste sul bordo). Il centro della giostra è in $O=(0,0,0)$ e l'asse di rotazione è verticale. A $t=0$ la giostra è ferma ed il bambino è in posizione $(0, R, 0)$ [o $(R, 0, 0)$].

Il bambino è armato: estrae una pistola e spara un proiettile di massa $m \ll M$ con velocità $\underline{V}=(\alpha v_0, \beta v_0, \gamma v_0)$. Interviene lo sceriffo, il quale arriva dopo un intervallo di tempo Δt . In quale punto troverà il proiettile? Quanti giri ha fatto il bambino al suo arrivo? Se lo sceriffo vuole arrestare la giostra (e il bambino) in mezzo giro, esercitando un momento torcente costante τ , quanto deve valere τ ?

[Indicare con g l'accelerazione di gravità; si assuma che la giostra e il bambino siano ad altezza trascurabile sul piano orizzontale sopra cui cade (in modo perfettamente anelastico) il proiettile]



A Δt , il proiettile casca a terra!

$$x(t) = \alpha v_0 t$$

$$y(t) = \beta v_0 t + R$$

$$z(t) = \gamma v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$\Rightarrow z(\Delta t) = 0 \quad \Rightarrow \gamma v_0 \Delta t - \frac{1}{2} g \Delta t^2 = 0$$

$$\Delta t = 0$$

$$\Delta t = \frac{2 \gamma v_0}{g}$$

Momento angolare prima: 0

"

"

dopo: $L_G - L_P$

$$\Rightarrow L_G - L_P = 0 \quad \Rightarrow \underline{L_G = L_P}$$

~~La~~

$$L_G = I \omega =$$

$$= (I_G + I_B) \omega = 2MR^2 \omega$$

$$I_G + I_B$$

$$I_G = \frac{2MR^2}{2}$$

$$I_B = MR^2$$

$$L_P = m \alpha v_0 R$$

$$\Rightarrow 2MR^2 \omega = m \alpha v_0 R$$

$$\boxed{\omega = \frac{m \alpha v_0 R}{2MR}}$$

La finestra ~~si muove~~ ruota uniformemente.

Qual'è l'energia cinetica delle piastre?

$$K = \frac{1}{2} I \omega^2$$

$$= \frac{1}{2} 2MR^2 \left(\frac{m\alpha V_0}{2MR} \right)^2$$

$$= \frac{\cancel{MR^2} m^2 \alpha^2 V_0^2}{4 \cancel{MR^2}} = \frac{m^2 \alpha^2 V_0^2}{4M}$$

$$W = \tau \Delta\theta = \tau \pi$$

$$\Delta\theta = \pi \quad (\text{mezzo giro})$$

$$\tau \pi = \frac{m^2 \alpha^2 V_0^2}{4M}$$

$$\boxed{\tau = \frac{m^2 \alpha^2 V_0^2}{4\pi M}}$$