Corso di recupero di Fisica 2016/2017

Dario Madeo

Lezione del 26/05/2017

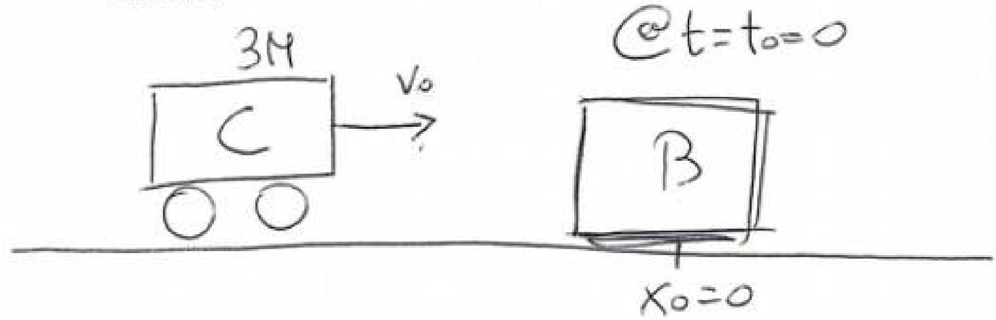
Slides disponibili all'indirizzo
http://www.dii.unisi.it/~madeo/crf/crf1617.html

Estratto dall'esame di Fisica 1 del 13 Febbraio 2017

Esercizio 1

Un carrello C di massa 3M si muove senza attriti, inizialmente a velocità v_0, su un binario orizzontale orientato lungo x. All'istante $t_0=0$ esso urta elasticamente contro un blocco B di massa M posizionato sul binario in $x_0=0$. Il blocco può strisciare sui binari, incontrando un attrito radente di coefficienti μ_D, μ_S.

a) Mostrare con una rappresentazione grafica sui piani x-t e/o v-t che, dopo il primo urto, avrà luogo un secondo urto.
b) Determinare l'istante t_1 e la posizione x_1 a cui ha luogo il secondo urto.
c) Individuare le posizioni x_n a cui avvengono tutti gli urti successivi.
d) A quanto tende la successione $\{x_n\}$? Si può dedurre tale limite ragionando solo su quantità fisiche?



Dopo il primo urto, C si muove con velocità V_C e B con velocità V_B.

$$\begin{cases} V_C = \dfrac{V_0\,(3M-M)}{3M+M} = \dfrac{V_0}{2} \\[2ex] V_B = \dfrac{2\cdot 3M\cdot V_0}{3M+M} = \dfrac{3}{2}V_0 \end{cases}$$

↳ Questo accade per $t=0^+$

Dopo $t=0$, C si muove di moto rettilineo uniforme con velocità pari a $\dfrac{V_0}{2}$.

Moto di B per $t > 0$ $(v > 0)$

$$\begin{cases} M\ddot{x}_B = -\mu_D M g \\ x_B(0) = 0 \\ \dot{x}_B(0) = \frac{3}{2}V_0 \end{cases} \Rightarrow$$

P.C.
$D_1 = D_2 = 0$
Modi (1 e t)
Non omogenea
Modo (t^2)

$$x_B(t) = A + Bt + Ct^2$$

$$x_B(0) = A = 0 \Rightarrow \boxed{A = 0}$$

$$\dot{x}_B(t) = B + 2Ct$$

$$\dot{x}_B(0) = \boxed{B = \frac{3}{2}V_0}$$

$$\ddot{x}_B(t) = 2C$$

Sostituisco nella ODE:

$$M(2C) = -\mu_D M g$$

$$\boxed{C = -\frac{\mu_D g}{2}}$$

$$\boxed{x_B(t) = \frac{3}{2}V_0 t - \frac{\mu_D g}{2}t^2}$$

Leggi orarie del corpo B

$$x_B(t) = \frac{3}{2} v_0 t - \frac{\mu_0 g}{2} t^2$$

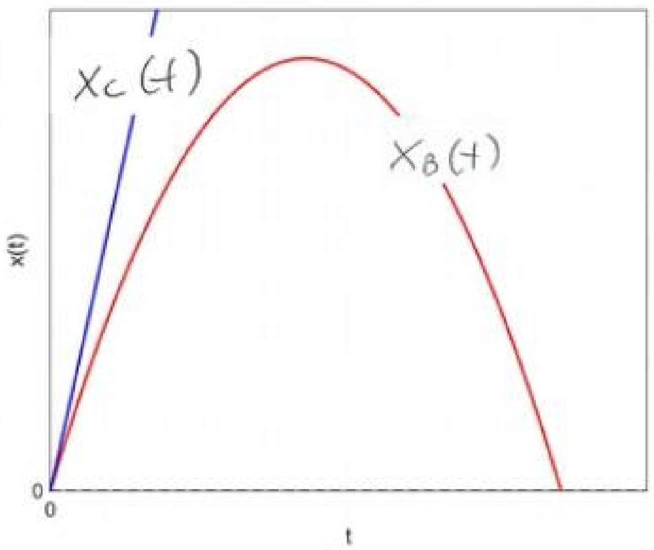
$$\dot{x}_B(t) = v_B(t) = \frac{3}{2} v_0 - \mu_0 g t$$

Leggi orarie del corpo C

$$x_C(t) = \frac{v_0}{2} t$$

$$\dot{x}_C(t) = \frac{v_0}{2}$$

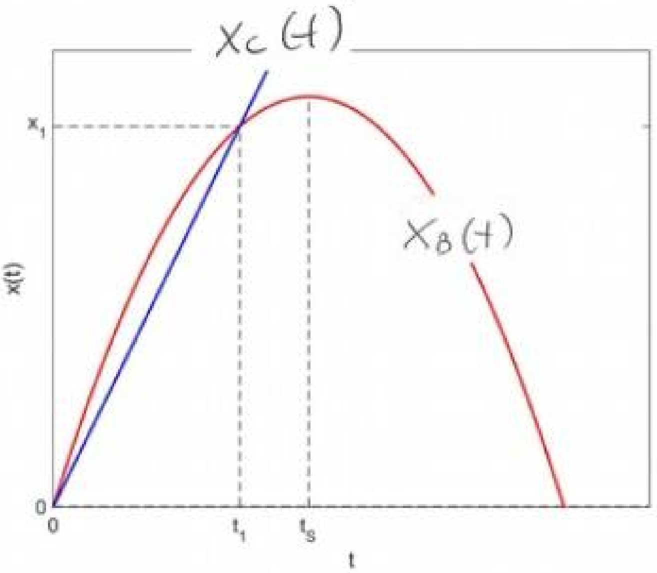
Graficamente, abbiamo 3 casi possibili:



Caso 1

Questo caso si verifica solo se la velocità iniziale di C è maggiore di quella di B. Nel nostro caso, questo non è verificato, in quanto:

$$v_C(0) = \frac{v_0}{2} < v_B(0) = \frac{3}{2} v_0$$

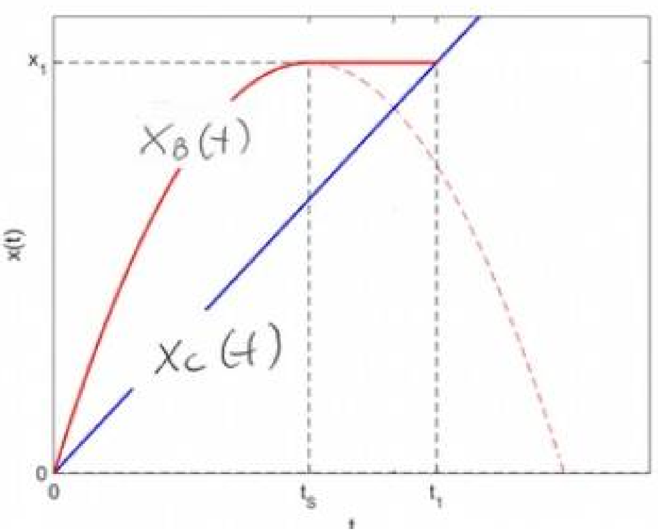


Caso 2

In questo caso i due corpi urtano all'istante t_1. Notare che questo avviene prima che il corpo B si fermi in maniera naturale all'istante t_S (istante di stop per il quale la velocità di B è nulla).

Il caso 2 è valido se:

$$t_1 < t_S$$



Caso 3

Questo caso l'istante di stop del corpo B avviene prima che si possa verificare l'urto vero e proprio. Da notare che una volta che il corpo B raggiunge velocità nulla all'istante t_S, esso rimarrà fermo in quella posizione, poichè la forza di attrito dinamico smette di agire (si ha attrito dinamico finchè il corpo ha una velocità non nulla). Se la forza di attrito permanesse, allora dovremmo concludere che il corpo, dopo essersi fermato, tornerà indietro (curva rossa trattegiata).

Caso 2 e Caso 3

Calcolo l'istante di stop:

$$v_B(t_S) = 0 \Rightarrow \frac{3}{2}v_0 - \mu_D g t_S = 0 \Rightarrow t_S = \frac{3v_0}{2\mu_D g}$$

Calcolo l'istante dell'urto:

$$x_B(t_1) = x_C(t_1) \Rightarrow \frac{3}{2}v_0 t_1 - \frac{\mu_D g}{2}t_1^2 = \frac{v_0}{2}t_1 \Rightarrow \frac{\mu_D g}{2}t_1^2 - v_0 t_1 = 0 \Rightarrow t_1 = \frac{2v_0}{\mu_D g}$$

(NOTA: il caso t1 = 0 è stato escluso)

A questo punto è chiaro che possiamo escludere il caso 2 poichè:

$$t_1 = \frac{2v_0}{\mu_D g} > t_S = \frac{3v_0}{2\mu_D g}$$

Dunque, il caso 3 è quello che effettivamente si verifica!

Nel caso 3, l'istante di stop è identico a quello che abbiamo calcolato prima:

$$t_S = \frac{3v_0}{2\mu_D g}$$

In particolare, il corpo B si è fermato nel punto:

$$x_1 = x_B(t_S) = \frac{3}{2}v_0 \frac{3v_0}{2\mu_D g} - \frac{\mu_D g}{2}\left(\frac{3v_0}{2\mu_D g}\right)^2 = \frac{9v_0^2}{8\mu_D g}$$

Per cui, i due corpi urtano quando:

$$x_B(t_1) = x_C(t_S) \Rightarrow \frac{v_0}{2}t_1 = \frac{9v_0^2}{8\mu_D g} \Rightarrow t_1 = \frac{9v_0}{4\mu_D g}$$

Sequenza di urti successivi

$v_B =$	0	$\frac{3}{2}v_0$
$v_C =$	v_0	$\frac{1}{2}v_0$

Urto 1 (t_0)

Il secondo urto è molto simile al primo. Infatti, prima del secondo urto, il corpo B è fermo, mentre C si muove di moto rettilineo uniforme. Stavolta però, la velocità prima dell'urto di C è dimezzata. Possiamo quindi concludere che:

$v_B =$	0	$\frac{3}{2}\frac{v_0}{2} = \frac{3}{4}v_0$
$v_C =$	$\frac{v_0}{2}$	$\frac{1}{2}\frac{v_0}{2} = \frac{v_0}{4}$

Urto 2 (t_1)

Stessa storia per il terzo urto:

$v_B =$	0	$\frac{3}{2}\frac{v_0}{4} = \frac{3}{8}v_0$
$v_C =$	$\frac{v_0}{4}$	$\frac{1}{2}\frac{v_0}{4} = \frac{v_0}{8}$

Urto 3 (t_2)

Generalizzando:

$v_B =$	0	$\frac{3}{2^n}v_0$
$v_C =$	$\frac{v_0}{2^{n-1}}$	$\frac{v_0}{2^n}$

Urto n (t_{n-1})

Nota
Il valore t1 calcolato nella slide precedente è il tempo trascorso tra il 1° ed il 2° urto, mentre x1 È lo spazio percorso dai due corpi tra il 1° ed il 2° urto.

Poichè il primo urto è avvenuto al tempo t0 = 0 nel punto x0 = 0, allora t1 e x1 <u>corrispondono anche</u> al tempo e alla posizione assoluti in cui avviene il primo urto.
Questa corrispondenza non è più vera per gli urti successivi.

Indichiamo dunque con Tn il tempo che passa tra l'urto n-1 e l'urto n, e con Sn lo spazio percorso dalle masse tra l'urto n-1 e l'urto n.

Per cui:

$$t_1 = T_1 \qquad x_1 = S_1$$

$$t_2 = t_1 + T_2 \qquad x_2 = x_1 + S_2$$

$$t_3 = t_2 + T_3 \qquad x_3 = x_2 + S_3$$

$$\dots$$

$$t_n = t_{n-1} + T_n \quad x_n = x_{n-1} + S_n$$

Possiamo generalizzare usando i risultati precedenti:

$$T_1 = t_1 = \frac{9v_0}{4\mu_D g} \qquad S_1 = x_1 = \frac{9v_0^2}{8\mu_D g}$$

$$T_2 = \frac{9\frac{v_0}{2}}{4\mu_D g} = \frac{9v_0}{8\mu_D g} \qquad S_2 = \frac{9\left(\frac{v_0}{2}\right)^2}{8\mu_D g} = \frac{9v_0^2}{32\mu_D g}$$

$$T_3 = \frac{9\frac{v_0}{4}}{4\mu_D g} = \frac{9v_0}{16\mu_D g} \qquad S_3 = \frac{9\left(\frac{v_0}{4}\right)^2}{4\mu_D g} = \frac{9v_0^2}{64\mu_D g}$$

$$T_n = \frac{9\frac{v_0}{2^{n-1}}}{4\mu_D g} = \frac{9v_0}{2^{n+1}\mu_D g} \qquad S_n = \frac{9\left(\frac{v_0}{2^{n-1}}\right)^2}{4\mu_D g} = \frac{1}{4^n}\frac{9v_0^2}{2\mu_D g}$$

Inoltre:

$$x_n = x_{n-1} + S_n = x_{n-2} + S_n + S_{n-1} = x_0 + S_n + S_{n-1} + \ldots + S_1 = x_0 + \sum_{i=1}^{n} S_i = \sum_{i=1}^{n} S_i$$

poichè x0 = 0 (posizione iniziale).

$$X_n = \sum_{i=1}^{n} S_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{9}{2} \frac{V_0^2}{\mu_0 g} \left(\frac{1}{4}\right)^i$$

$$= \frac{9}{2} \frac{V_0^2}{\mu_0 g} \boxed{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{4}\right)^i}$$

Th

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} q^i = \frac{q - q^{n+1}}{1-q}}$$

$$X_n = \frac{9}{2} \frac{V_0^2}{\mu_0 g} \left(\frac{\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{4}} \right)$$

$$\lim_{n \to \infty} X_n = \frac{9}{2} \frac{V_0^2}{\mu_0 g} \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4}}$$

$$= \frac{9}{2} \frac{V_0^2}{\mu_0 g} \cdot \frac{1}{3} = \boxed{\frac{3}{2} \frac{V_0^2}{\mu_0 g}}$$

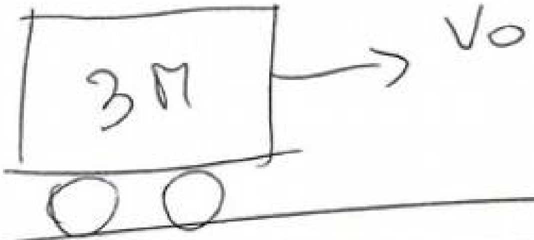
Posizione finale

Lavoro compiuto: $-\mu_0 M g$

$0 \longrightarrow \frac{3}{2}\frac{v_0^2}{\mu_0 g}$

$$L = -\cancel{\mu_0} M \cancel{g} \frac{3}{2} \frac{v_0^2}{\cancel{\mu_0 g}} = -\frac{3}{2} M v_0^2$$

Notare che il lavoro corrisponde
All'energia cinetica iniziale
Del sistema, ma cambiata di segno
(energia bruciata dall'attrito)



$$K_i = \frac{1}{2} 3 M v_0^2$$

Nota teorica

$$\sum_{i=0}^{n} q^i = \frac{1 - q^{n+1}}{1-q} \qquad \forall q \in \mathbb{R}$$

$$\sum_{i=1}^{n} q^i = \sum_{i=0}^{n} q^i - q^0$$

$$= \frac{1-q^{n+1}}{1-q} - 1$$

$$= \frac{1 - q^{n+1} - 1 + q}{1-q} = \frac{q - q^{n+1}}{1-q}$$

Se $|q|<1$ ...

$$\sum_{i=0}^{\infty} q^i = \frac{1}{1-q} \quad ; \quad \sum_{i=1}^{\infty} q^i = \frac{q}{1-q} .$$

Caso $F = F(t)$

↳ Sistema dinamico non autonomo.

Il sistema si dice non autonomo quando esso dipende esplicitamente dal tempo t.

$$\boxed{F = \alpha + \beta t}$$

Di seguito considereremo questa forza dipendente dal tempo t.

1) $M\dot{v} = \alpha + \beta t$

PC $MD = 0 \Rightarrow D = 0$

Modo prodotto da $D = 0$ è 1.

Non omo. $\underbrace{\alpha}_{} + \underbrace{\beta t}_{}$

Dovrei avere i modi:

- $1 \to t$
- $t \to t^2$

$v(t) = A + Bt + Ct^2$

2) $M\ddot{x} = \alpha + \beta t$

PC $MD^2 = 0 \Rightarrow D_1 = D_2 = 0$

Modi: 1 e t

Non omo:

Modi:

- $1 \to t \to t^2$
- $t \to t^2 \to t^3$

$x(t) = A + Bt + Ct^2 + Dt^3$

Alt.

$$M\dot{v} = \alpha + \beta t$$

$$M\frac{dv}{dt} = \alpha + \beta t$$

$$M\,dv = (\alpha + \beta t)\,dt$$

$$M\int_{v(0)}^{v(t)} dv = \int_0^t (\alpha + \beta t)\,dt$$

$$M\left(v(t) - v(0)\right) = \alpha t + \beta\frac{t^2}{2}$$

qui ho var. separabili!

$$\boxed{v(t) = v(0) + \frac{\alpha}{M}t + \frac{\beta}{2M}t^2}$$

Qui non ho var. sep.

$$\boxed{M\dot{v} + \gamma v = \alpha + \beta t}$$

$$M\frac{dv}{dt} + \gamma v = \alpha + \beta t$$

$$M\frac{dv}{dt} = \alpha + \beta t - \gamma v$$

P.C. $\quad D = -\frac{\gamma}{M}$ $\quad$ NON OM.

$$\Downarrow$$

$$e^{-\frac{\gamma}{M}t} \qquad 1 \qquad t$$

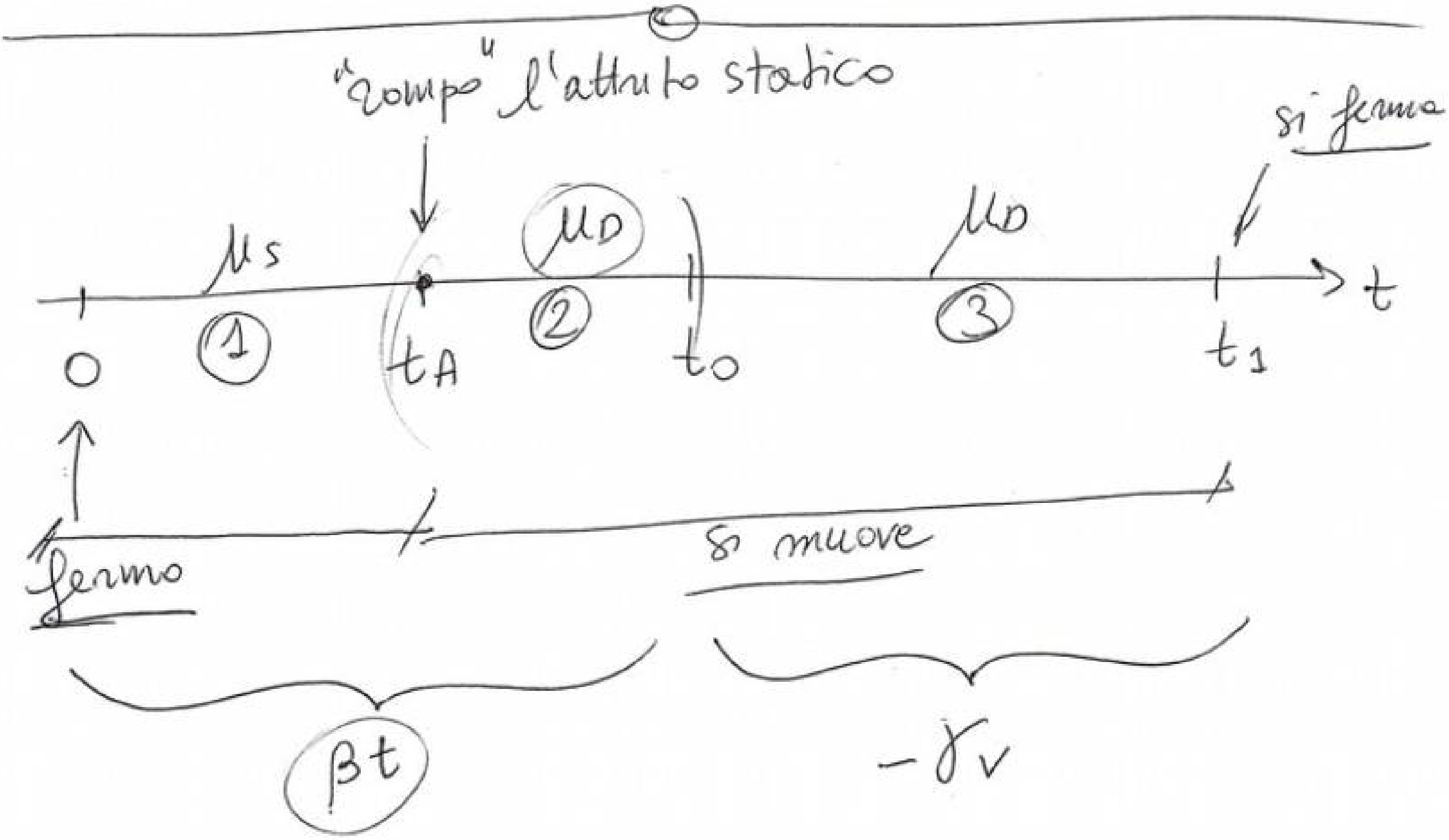
$$v(t) = Ae^{-\frac{\gamma}{M}t} + B + Ct$$

Esercizio estratto dall'esame di Fisica 1 del 26 Settembre 2016

Esercizio 2

Un corpo di massa M parte da fermo e si muove strisciando lungo una traiettoria rettilinea e orizzontale. Oltre all'attrito radente descritto dai parametri μ_S e μ_D, esso subisce una forza crescente linearmente con il tempo $F(t)=\beta t$ nell'intervallo di tempo da $t=0$ a $t=t_0$. Dopo t_0, la forza $F(t)$ cessa e al suo posto interviene un attrito di natura viscosa che si somma a quello radente ed è descritto dalla relazione $F_v=-\gamma v$. Calcolare l'energia dissipata per attrito radente fra 0 e t_0 ed il lavoro svolto dalla forza $F(t)$. Scrivere l'equazione di moto per la velocità nella seconda fase, e determinare l'istante t_1 al quale l'oggetto si ferma.

[Per alleggerire le notazioni, si consiglia di definire qualche quantità intermedia]



(1) Attrito statico $> \beta t$

$$\mu_S M g > \beta t$$

La fase (1) finisce quando $\mu_S M g = \beta t$

$$\boxed{t_A = \frac{\mu_S M g}{\beta}}$$

② $M\dot{v} = -\mu_D M g + \beta t$

$$M\,dv = (-\mu_D M g + \beta t)\,dt$$

$$dv = \left(-\mu_D g + \frac{\beta}{M} t\right) dt$$

$$v(t_A) = 0$$

$$\int_{v(t_A)}^{v(t)} dv = \int_{t_A}^{t} \left(-\mu_D g + \frac{\beta}{M} t\right) dt$$

$$v(t) - \cancelto{0}{v(t_A)} = -\mu_D g (t - t_A) + \frac{\beta}{2M}(t^2 - t_A^2)$$

$$v(t) = -\mu_D g (t - t_A) + \frac{\beta}{2M}(t^2 - t_A^2)$$

$$x(t) = \int_{t_A}^{t} v(t)\,dt$$

$$v(t) = \frac{\beta}{2M} t^2 - \mu_D g t + \left(\mu_D g t_A - \frac{\beta t_A^2}{2M}\right)$$

$$x(t) = \int_{t_A}^{t} \left(\frac{\beta}{2M} t^2 - \mu_D g t + \left(\mu_D g t_A - \frac{\beta t_A^2}{2M} \right) \right) dt$$

$$= \frac{\beta}{6M}(t^3 - t_A^3) - \frac{\mu_D g}{2}(t^2 - t_A^2) + \left(\mu_D g t_A - \frac{\beta t_A^2}{2M} \right)(t - t_A)$$

Calc... il lavoro compiuto d... μ_D.

$$L = \int_{t_A} \left(-\mu_D \ldots \right) x(t)\, dt = \ldots$$

$$= \ldots \frac{\mu_D g}{24}(t_0 - t_A)^3 \left[4(\ldots t_A - \mu_D M g) + \beta(t_0 - t_A) \right]$$

ERRATA CORRIGE
La forza di attrito dinamico è costante. Non è necessario integrare! Inoltre, il precedente integrale non torna nemmeno dimensionalmente...

Più semplicemente:

$$L = F_A S$$

dove:

$$F_A = -\mu_D g M$$

$$S = x(t_0) = \frac{\beta}{6M}(t_0^3 - t_A^3) - \frac{\mu_D g}{2}(t_0^2 - t_A^2) + \left(\mu_D g t_A - \frac{\beta t_A^2}{2M} \right)(t_0 - t_A)$$

Fase 3 tra t_0 e t_1 ho che:

$$\begin{cases} M\dot{v} = -\mu_D M g - \gamma v \\ v(t_0) = V_{t_0} \end{cases}$$

$$\begin{cases} M\dot{v} + \gamma v = -\mu_D M g \\ v(t_0) = V_{t_0} \end{cases}$$

P.C. $\quad MD + \gamma = 0 \quad \Rightarrow \quad D = -\frac{\gamma}{M}$

$\Rightarrow e^{-\frac{\gamma}{M}t}$.

Non. omo $\quad$ Modo 1

$$v(t) = A e^{-\frac{\gamma}{M}t} + B$$

$$v(t_0) = A e^{-\frac{\gamma}{M}t_0} + B = V_{t_0}$$

$$\dot{v}(t) = -\frac{A\gamma}{M} e^{-\frac{\gamma}{M}t}$$

Sostituisco nella ODE:

$$\cancel{M}\left(-\frac{A\gamma}{\cancel{M}} e^{-\frac{\gamma}{M}t}\right) = -\mu_D M g - \gamma A e^{-\frac{\gamma}{M}t} - \gamma B$$

$$\gamma B = -\mu_D M g \quad \Rightarrow \quad \boxed{B = -\frac{\mu_D M g}{\gamma}}$$

$$\begin{cases} B = -\dfrac{\mu_D M g}{\gamma} \\ A e^{-\frac{\gamma}{M} t_0} + B = V_{t_0} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} B = -\dfrac{\mu_D M g}{\gamma} \\ A = (V_{t_0} - B) e^{\frac{\gamma}{M} t_0} \end{cases}$$

$$A = \left(V_{t_0} + \frac{\mu_D M g}{\gamma}\right) e^{\frac{\gamma}{M} t_0}$$

$$V(t) = \left(V_{t_0} + \frac{\mu_D M g}{\gamma}\right) e^{-\frac{\gamma}{M}(t - t_0)} - \frac{\mu_D M g}{\gamma}.$$

Si ferma a $t_1 \Rightarrow V(t_1) = 0$

$$\Big(V_{t_0} + \underbrace{\frac{\mu_D M g}{\gamma}}_{V_L}\Big) e^{-\frac{\gamma}{M}(t - t_0)} - \frac{\mu_D M g}{\gamma} = 0$$

$$(V_{t_0} + V_L) e^{-\frac{\gamma}{M}(t - t_0)} - V_L = 0$$

$$e^{-\frac{\gamma}{M}(t - t_0)} = \frac{V_L}{V_{t_0} + V_L}$$

$$-\frac{\gamma}{M}(t-t_0) = \ln \frac{V_L}{V_{t_0}+V_L}$$

$$\frac{\gamma}{M}(t-t_0) = \ln \frac{V_{t_0}+V_L}{V_L}$$

...

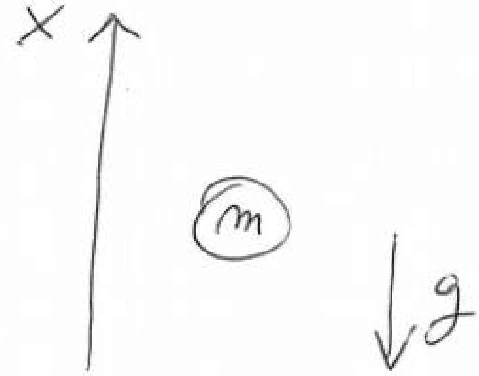
Esercizio estratto dall'esame di Fisica 1 del 15 Maggio 2017 (3)

Esercizio 3

Una sfera di massa m viene lanciata verticalmente verso l'alto con velocità v_0. Oltre che alla forza peso essa è sottoposta ad una forza viscosa dipendente linearmente dalla velocità della pallina stessa: $F=-\gamma v$. Per quanto tempo sale?

Si assuma ora che il coefficiente γ sia proporzionale alla sezione della sfera e che questa venga lasciata cadere da una grande altezza insieme ad un'altra avente raggio doppio [triplo, quadruplo, metà] e costituita di materiale con densità doppia [tripla, quadrupla, metà]. Per tempi molto lunghi, a quale valore tende il rapporto fra le velocità [le energie cinetiche] delle due sfere?

$$\begin{cases} M\dot{v} = -\gamma v - Mg \\ v(0) = v_0 \end{cases}$$



Cerco $v(t) = 0$.

Sezione di una sfera di raggio R è πR^2.

$\gamma = K \pi R^2$ $\qquad K > 0$

$$V_L = \frac{Mg}{\gamma}$$

$$\frac{V_{L2}}{V_{L1}} = \frac{\dfrac{M_2 \cancel{g}}{\gamma_2}}{\dfrac{M_1 \cancel{g}}{\gamma_1}} = \frac{M_2 \gamma_1}{M_2 \gamma_2}$$

$$\gamma_1 = K\pi R^2$$

Triplico il raggio

$$\gamma_2 = K\pi (3R)^2 = K\pi 9 R^2$$

$$\rho_1 = \rho$$

Raddoppio la densità

$$\rho_2 = 2\rho$$

$$M_1 = \frac{4}{3}\pi\rho R^3$$

$$M_2 = \frac{4}{3}\pi\, 2\rho\, (3R)^3 = \frac{4}{\cancel{3}_1}\pi\, 2\rho\, \cancel{27}^{9} R^3$$

$$= 72\pi\rho R^3$$

$$\frac{V_{L2}}{V_{L1}} = \frac{72\cancel{\pi}\cancel{\rho}\cancel{R^3} \cdot \cancel{K\pi R^2}}{\frac{4}{3}\cancel{\pi}\cancel{\rho}\cancel{R^3} \cdot \cancel{K\pi}\, 9 \cancel{R^2}} = \frac{72}{12} = 6$$