Corso di recupero di Fisica 2016/2017

Dario Madeo

Lezione del 19/05/2017

Slides disponibili all'indirizzo
http://www.dii.unisi.it/~madeo/crf/crf1617.html

Caso $\vec{F} = \vec{F}(\vec{x})$

ODE lineari omogenee del 2° ordine

$$m\ddot{x} = -Kx \quad \Rightarrow \quad \boxed{\ddot{x} + \omega^2 x = 0}$$

$$\omega^2 = \frac{K}{m}$$

Polinomio caratteristico: $D^2 + \omega^2 = 0$

$$D = \pm i\omega \quad , \quad i = \sqrt{-1}$$

Modi

$\cos\omega t$ $\quad$ $\sin\omega t$

$$\Rightarrow \boxed{x(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t}$$

$$\boxed{x(t) = M\cos(\omega t + \varphi)}$$

$M =$ modulo del vettore $\begin{bmatrix} A \\ -B \end{bmatrix}$

$\varphi =$ angolo del vettore $\begin{bmatrix} A \\ -B \end{bmatrix}$

Problema di Cauchy

$$\begin{cases} \ddot{x} + \omega^2 x = 0 \\ x(0) = x_0 \\ \dot{x}(0) = v_0 \end{cases}$$

$$x(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t$$

$$x(0) = A\cos 0 + B\sin 0 = A = x_0.$$

$$\dot{x}(t) = -A\omega\sin\omega t + B\omega\cos\omega t$$

$$\dot{x}(0) = -A\omega\sin 0 + B\omega\cos 0 = B\omega = v_0$$

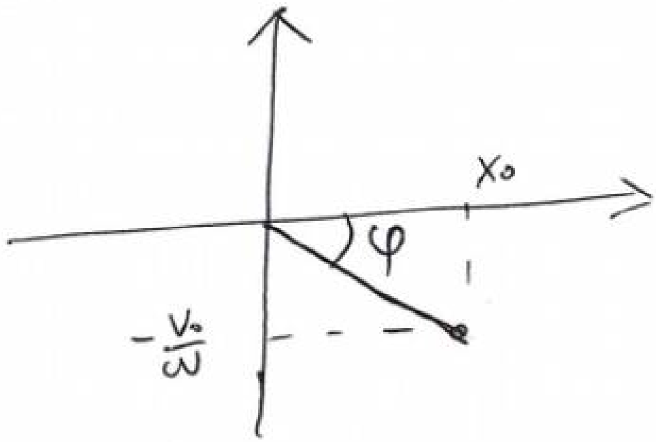
$$\Rightarrow B = \frac{v_0}{\omega}$$

$$\Rightarrow \boxed{x(t) = x_0\cos\omega t + \frac{v_0}{\omega}\sin\omega t}$$

$$\boxed{x(t) = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}\cos(\omega t + \varphi)}$$

[φ è più complicata da calcolare]

φ è l'angolo del vettore $\begin{bmatrix} A \\ -B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ -\frac{v_0}{\omega} \end{bmatrix}$



$M = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}$ è l'ampiezza massima e dipende da x_0, v_0, ω.

Se $v_0 = 0 \Rightarrow \boxed{M = x_0} \Longrightarrow$

L'ampiezza massima corrisponde alla condizione iniziale!

NOTA $\qquad D = \pm i\omega \qquad \mathrm{Re}[D] = 0$

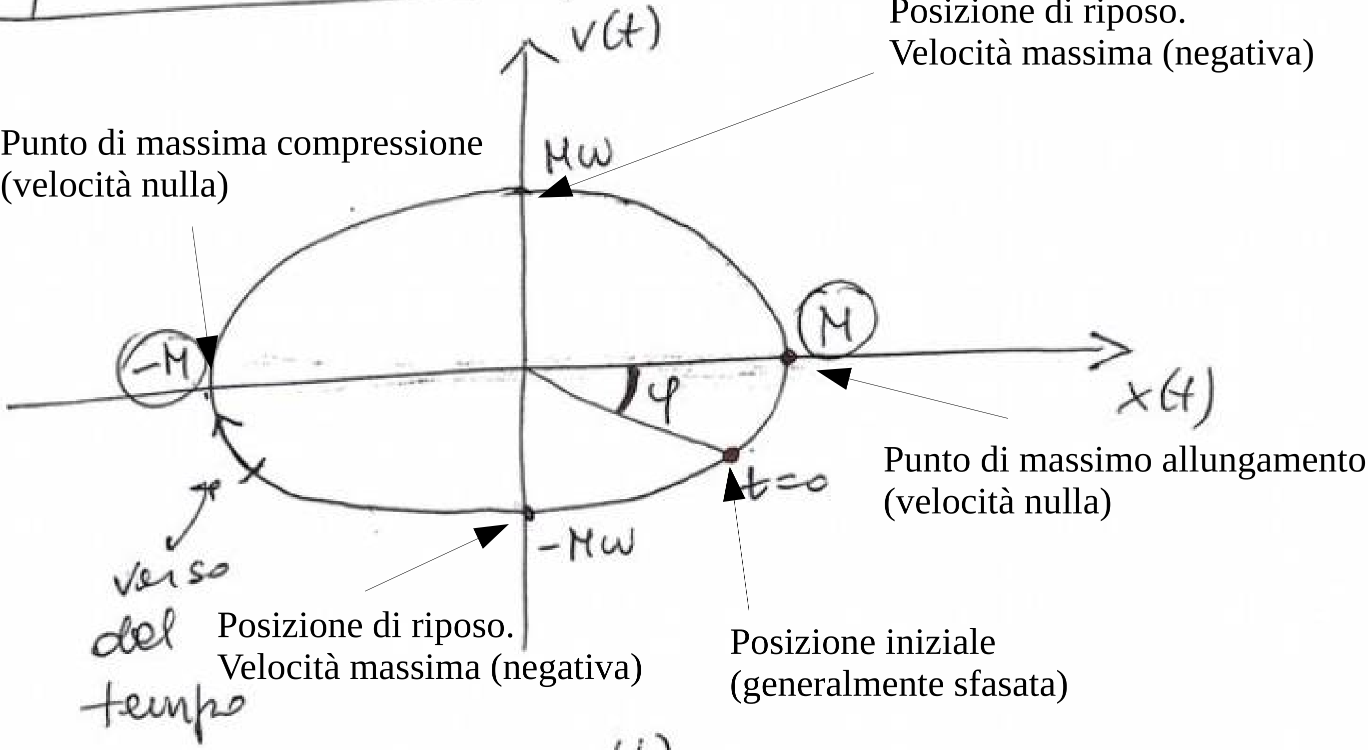
$\mathrm{Im}[D] = \omega \neq 0$

$\mathrm{Re}[D] = 0 \Rightarrow$ stabilità marginale

$\mathrm{Im}[D] \neq 0 \Rightarrow$ oscillazioni

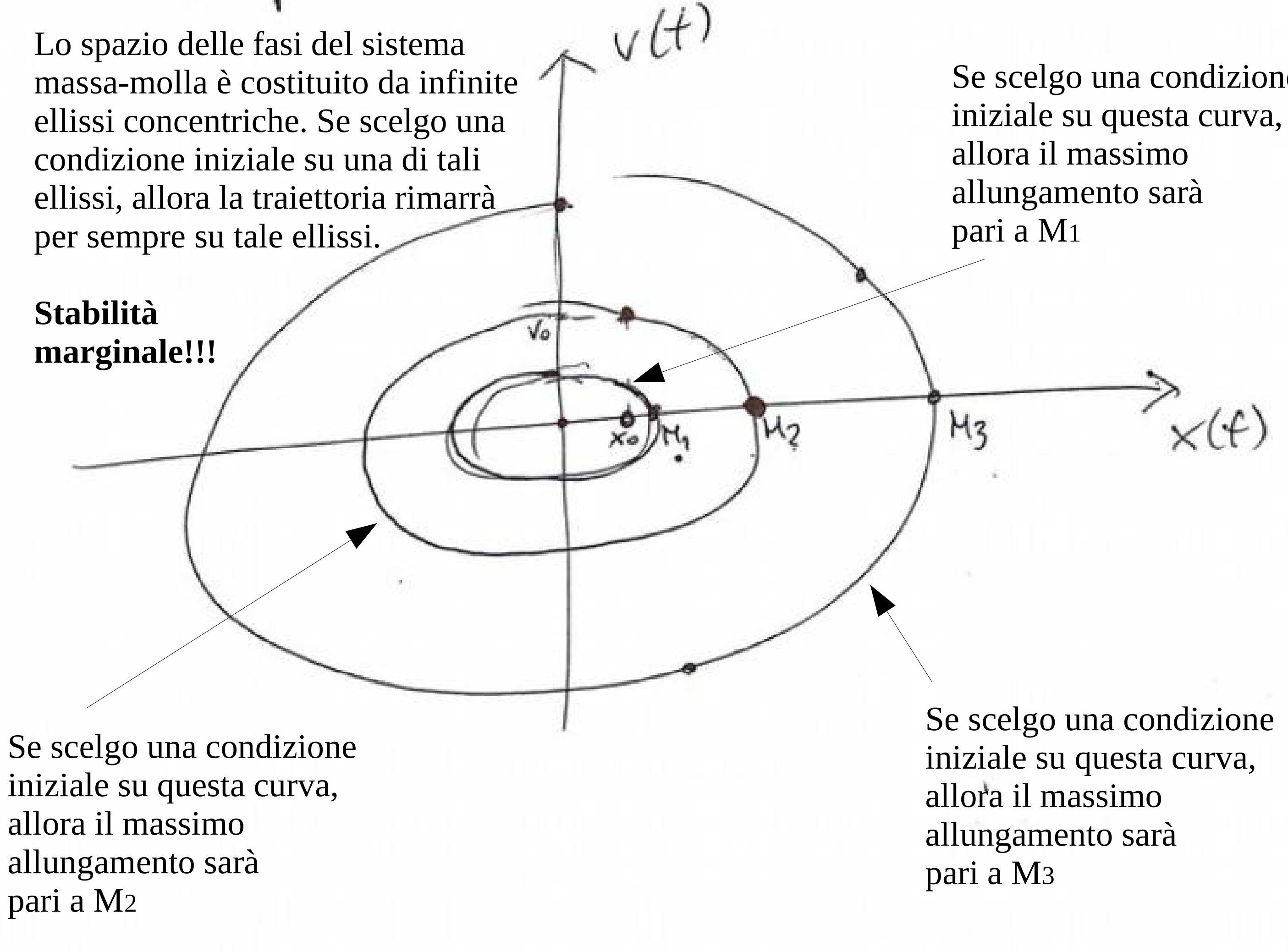
$$\begin{cases} x(t) = M\cos(\omega t + \varphi) \\ v(t) = -M\omega \sin(\omega t + \varphi) \end{cases}$$

Spazio delle fasi



Lo spazio delle fasi del sistema massa-molla è costituito da infinite ellissi concentriche. Se scelgo una condizione iniziale su una di tali ellissi, allora la traiettoria rimarrà per sempre su tale ellissi.

Stabilità marginale!!!



Problema di Cauchy

$$(1)\begin{cases} \ddot{x} + \omega^2 x = 0 \\ x(0) = A_{MAX} \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{x(t) = A_{MAX} \cos(\omega t)}$$

$$(2)\begin{cases} \ddot{x} + \omega^2 x = 0 \\ x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = V_0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} x(t) &= \frac{V_0}{\omega} \sin(\omega t) \\ &= -\frac{V_0}{\omega} \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}}$$

(1) In questo caso, abbiamo scelto di far partire il sistema sull'ellisse caratterizzata da un allungamento massimo pari a A_{max}.In particolare, stiamo partendo proprio dalla posizione di massimo allungamento.

(2) In questo caso, abbiamo scelto di far partire il sistema sull'ellisse caratterizzata da un allungamento massimo pari a V_0/ω. In particolare, stiamo partendo dalla posizione di riposo (x=0) con velocità iniziale V_0.

Caso non omogeneo

$$M\ddot{x} = -Kx + z$$

Nota: z è una forzacostante che non dipende nè da x, nè da v.

$$\ddot{x} = -\omega^2 x + \frac{z}{M} \qquad \omega^2 = \frac{K}{M}$$

P.C. $\quad D_1 = -i\omega$

$\quad D_2 = +i\omega \quad \Rightarrow \boxed{x(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t + C}$

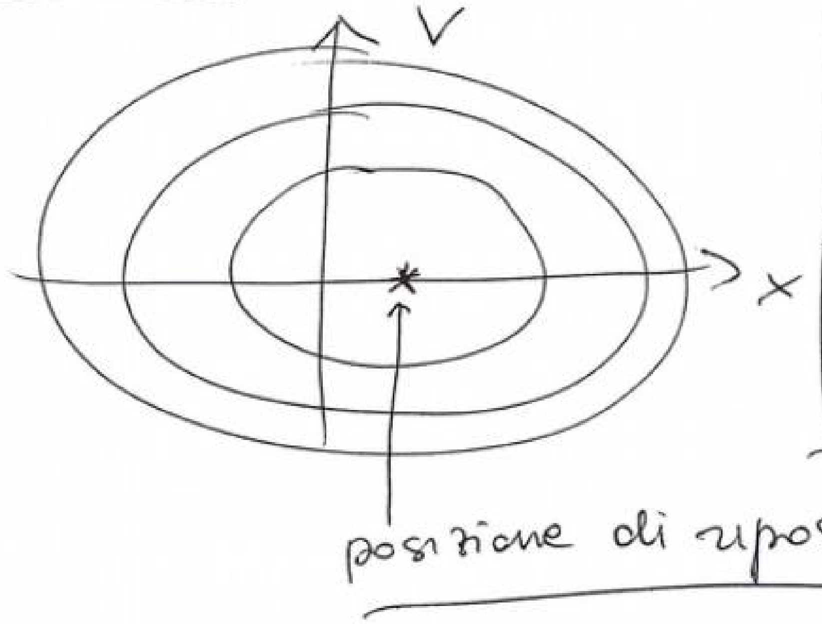
NON OM. $\quad D_3 = 0$

$$\boxed{x(t) = M\cos(\omega t + \varphi) + C}$$

Es

$$M\ddot{x} = -K(x-L) \Rightarrow M\ddot{x} = -Kx + \overset{z}{KL}$$

Piano delle fasi



z mi shifta lungo x il piano delle fasi

$M\ddot{x} = -K(x-L)$ L: posizione di riposo

$M\ddot{x} = -Kx + KL$

$\rightarrow \quad z = KL$

$$\frac{z}{\omega^2 M} = \frac{KL}{\frac{K}{\cancel{M}} \cdot \cancel{M}} = L \quad \text{(vero!)}$$

$M\ddot{x} = -Kx + Mg$ BILANCIA

$$z = Mg \quad \Rightarrow \quad \frac{z}{\omega^2 M} = \frac{Mg}{\frac{K}{\cancel{M}}\cancel{M}} = \frac{Mg}{K}$$

Posizione di riposo

Problema di Cauchy

$$\begin{cases} \ddot{x} + \omega^2 x = \frac{z}{M} \\ x(0) = x_0 \\ \dot{x}(0) = v_0 \end{cases}$$

$x(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t + C$

$x(0) = A\cos 0 + B\sin 0 + C = \boxed{A + C = x_0}$

$\dot{x}(t) = -A\omega\sin\omega t + B\omega\cos\omega t$

$\dot{x}(0) = -A\omega\sin 0 + B\omega\cos 0 = \boxed{B\omega = v_0}$

$\ddot{x}(t) = -A\omega^2\cos\omega t - B\omega^2\sin\omega t$

Sostituisco nella ODE:

$$\cancel{-A\omega^2\cos\omega t} \cancel{- B\omega^2\sin\omega t} + \omega^2\left[\cancel{A\cos\omega t} + \cancel{B\sin\omega t} + C\right] = \frac{z}{M}$$

$$\omega^2 C = \frac{z}{M} \implies \boxed{C = \frac{z}{\omega^2 M}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} A &= x_0 - \frac{z}{\omega^2 M} \\ B &= \frac{v_0}{\omega} \\ C &= \frac{z}{\omega^2 M} \end{aligned}}$$

$$x(t) = \left(x_0 - \frac{z}{\omega^2 M}\right)\cos\omega t + \frac{v_0}{\omega}\sin\omega t + \frac{z}{\omega^2 M}$$

posizione di riposo del sistema

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \frac{Z}{M}$$

$$\Rightarrow x(t) = \left(x_0 - \frac{Z}{\omega^2 M}\right)\cos\omega t + \frac{v_0}{\omega}\sin\omega t + \frac{Z}{\omega^2 M}$$

$\boxed{\begin{array}{c}\text{posizione della massa nel tempo.} \\ \neq \\ \text{allungamento della molla nel tempo.}\end{array}}$

<u>Allungamento</u> $\qquad y = x - \frac{Z}{\omega^2 M}$

$$\ddot{y} = \frac{d^2}{dt^2}\left(x - \frac{Z}{\omega^2 M}\right) = \ddot{x}.$$

$$\ddot{y} + \omega^2 x = \frac{Z}{M}$$

$$\ddot{y} = \frac{Z}{M} - \omega^2 x$$

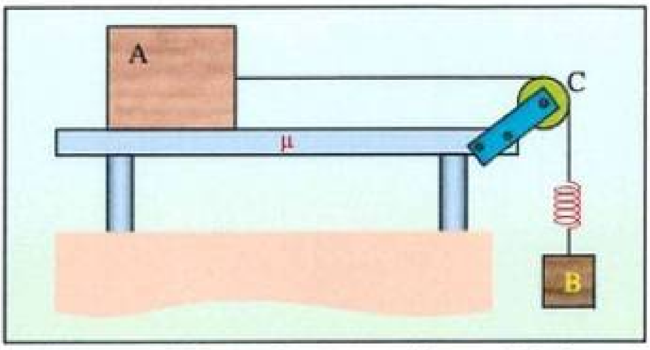
$$\ddot{y} = \omega^2\left(\frac{Z}{\omega^2 M} - x\right)$$

$$\ddot{y} = -\omega^2\left(x - \frac{Z}{\omega^2 M}\right) \Rightarrow \boxed{\ddot{y} = -\omega^2 y}$$

Nonostante la dinamica del corpo sia regolata da una ODE non omogenea, l'allungamento della molla è descritto da una ODE omogenea!!!

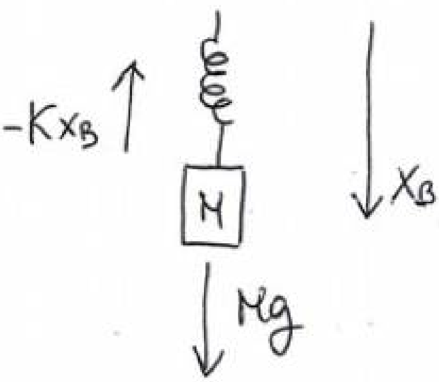
Estratto dall'esame di Fisica 1 del 12 Luglio 2016

Esercizio 1



Un corpo A di massa 54M poggia su un piano orizzontale scabro (μ_S=1/[redacted]3, μ_D=1/5), ed è connesso come in figura ad una corda ideale di massa trascurabile che, tramite la carrucola C (cilindro omogeneo di massa 2M e raggio R) sostiene una molla di costante elastica k e massa trascurabile a cui è sospeso un corpo B di massa M il quale oscilla in direzione verticale.
Qual è la massima ampiezza delle oscillazioni di B compatibile con il fatto che A resti immobile?
Per tale valore dell'ampiezza, qual è l'intensità massima della forza esercitata dall'asse della carrucola?

Analisi delle forze agenti sul corpo B



$$M\ddot{x}_B = Mg - Kx_B$$

$$M\ddot{x}_B = -K\left(x_B - \frac{Mg}{K}\right)$$

posizione di riposo del corpo B.

$$x^* = \frac{Mg}{K}$$

Allungamento della molla:

$$y = x - x^*$$

$$\begin{cases} M\ddot{y} = -Ky \\ y(0) = A_{MAX} \\ \dot{y}(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{c} y(t) = A_{MAX}\cos\omega t \\ \omega = \sqrt{\frac{K}{M}} \end{array}}$$

A_{max} è un'incognita del problema. Allora facciamo partire il sistema massa-molla sull'ellisse che caratterizzata da allungamento massimo pari a A_{max}...

$$y(t) = A_{MAX} \cos \omega t$$

$$\ddot{y}(t) = -A_{MAX}\, \omega^2 \cos \omega t$$

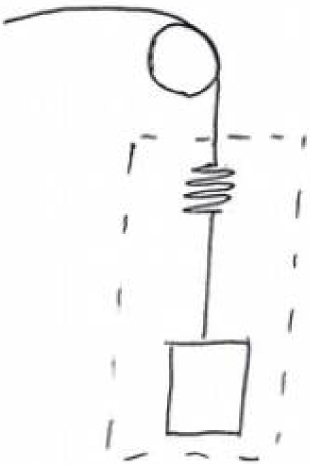
$$\parallel$$

$$\ddot{x}_B(t) = \underline{-A_{MAX}\, \omega^2 \cos \omega t}$$

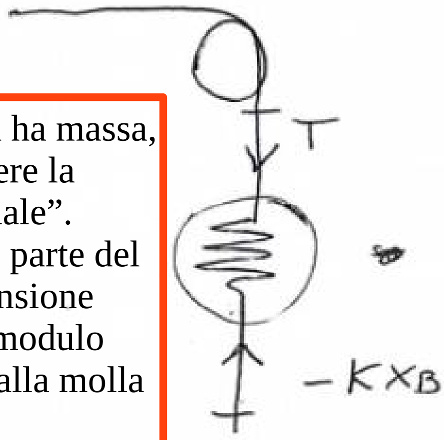
Acc. dell'Allungamento

Acc. della Posizione di B

Tensione sulla carrucola e molla



Poichè la molla non ha massa, non possiamo scrivere la sua "seconda cardinale". Dunque, la molla fa parte del filo, e pertanto la tensione deve uguagliare in modulo la forza esercitata dalla molla stessa.



$$|T| = |K x_B|$$

$$M \ddot{x}_B = Mg - K x_B \Rightarrow K x_B = Mg - M\ddot{x}_B$$

$$|T| = |Mg - M\ddot{x}_B|$$

$$|T_{MAX}| = |Mg - M \ddot{x}_{B\,MAX}|$$

$$|T_{MAX}| = |Mg - M(-A_{MAX}\,\omega^2)|$$

$$\boxed{|T_{MAX}| = M(g + A_{MAX}\,\omega^2)}$$

All. max:

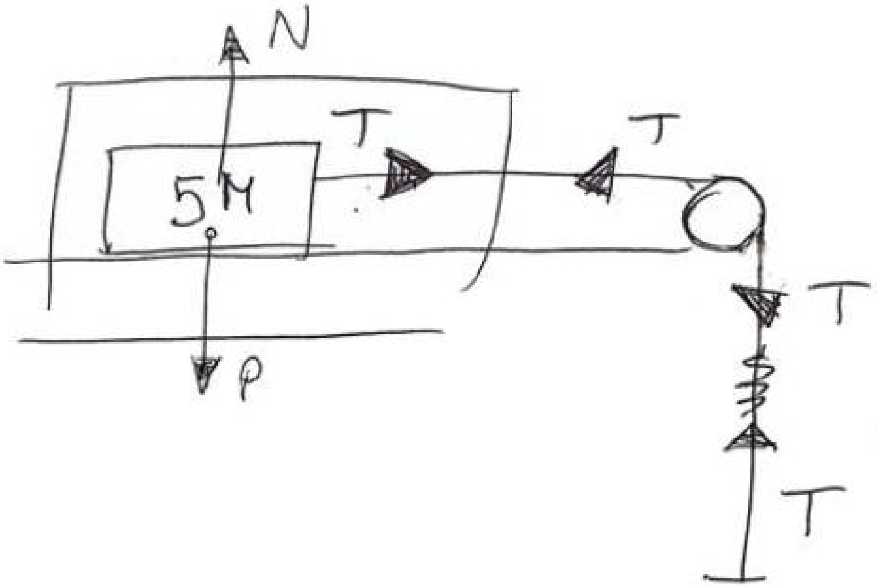
$$y_{MAX} = A_{MAX}$$

$$\Downarrow$$

Acc. max

$$\ddot{y}_{MAX} = -A_{MAX}\,\omega^2$$

Corpo A e tensione



Il corpo A rimane fermo se la tensione massima T_{max} non supera l'attrito statico a cui A è soggetto.

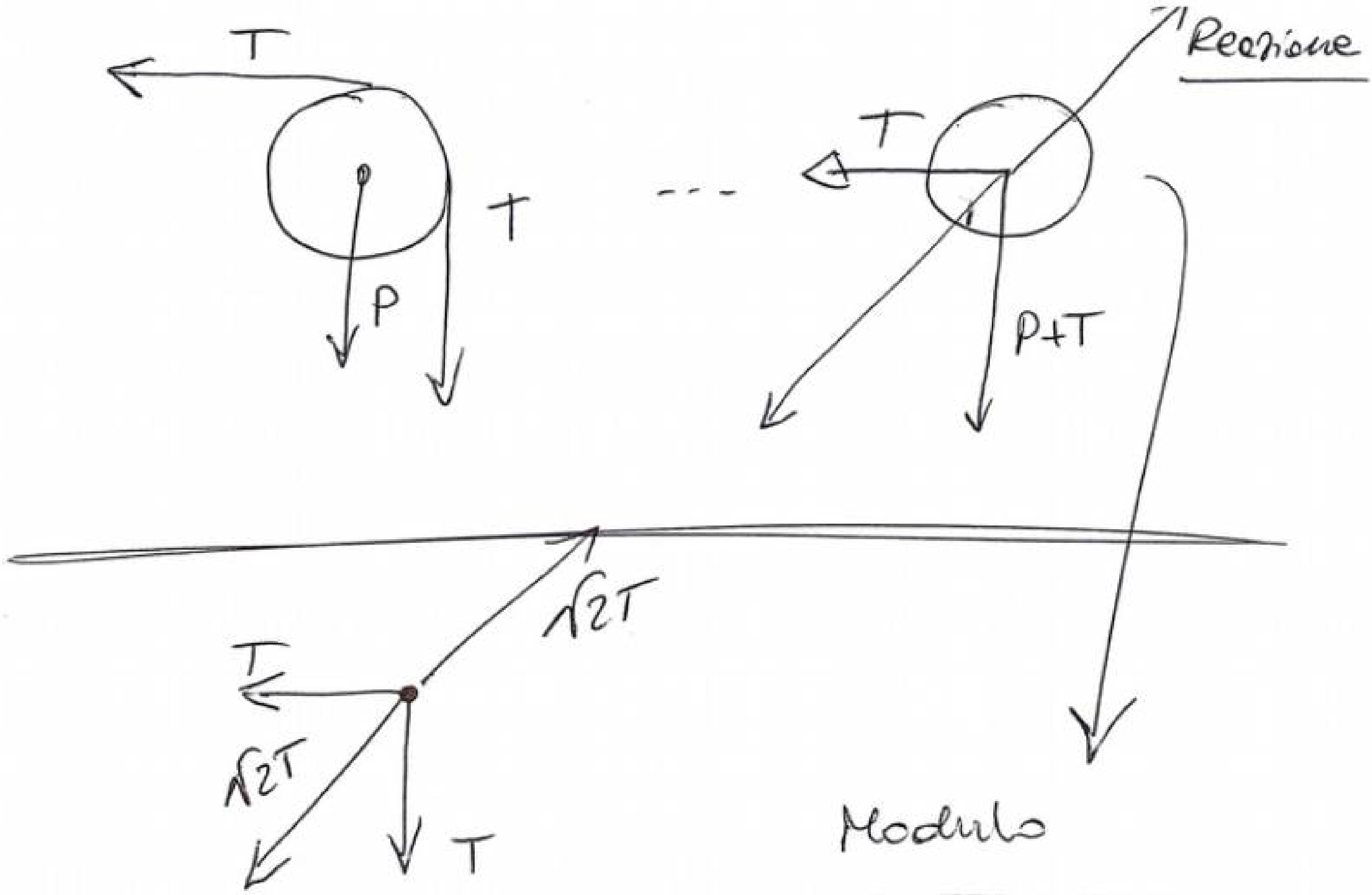
$$T_{MAX} < \mu_s N$$

$$\cancel{M}(g + A_{MAX}\omega^2) < \frac{1}{3} 5\cancel{M}g$$

$$A_{MAX}\omega^2 < \frac{5}{3}g - g$$

$$A_{MAX}\frac{K}{M} < \frac{2}{3}g$$

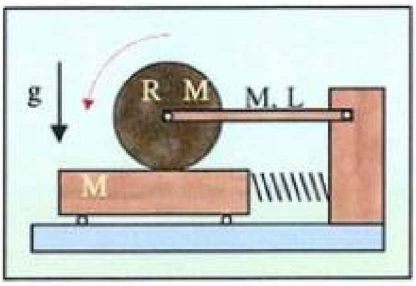
$$\boxed{A_{MAX} < \frac{2Mg}{3K}}$$



Modulo

$$\sqrt{T^2 + (P+T)^2}$$

Estratto dall'esame di Fisica 1 del 26 Settembre 2016

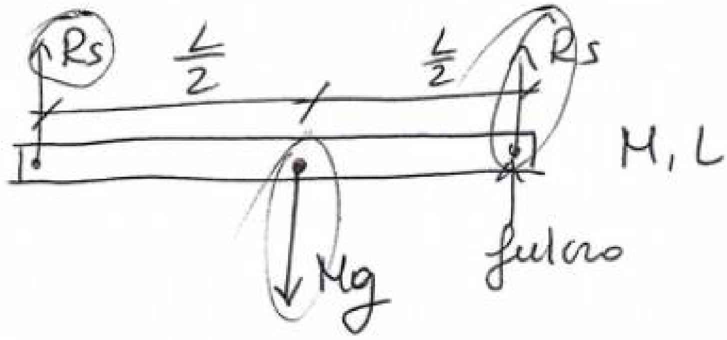


Esercizio 1

Una lastra di massa M può muoversi su un piano orizzontale senza incontrare attriti. Sopra la lastra poggia un cilindro di raggio R e massa M che ruota intorno al suo asse, il quale è tenuto fermo mediante una sbarretta orizzontale di massa M e lunghezza L imperniata agli estremi. La lastra è connessa a una molla di costante elastica k. Il cilindro non striscia mai sulla lastra.

a) Scrivere le equazioni di moto per lastra e cilindro.
b) Determinare la frequenza con cui oscilla il sistema.
c) Qual è la massima ampiezza possibile delle oscillazioni della lastra, se il coefficiente d'attrito tra cilindro e lastra è $\mu_S=1/2$.

Sbarretta



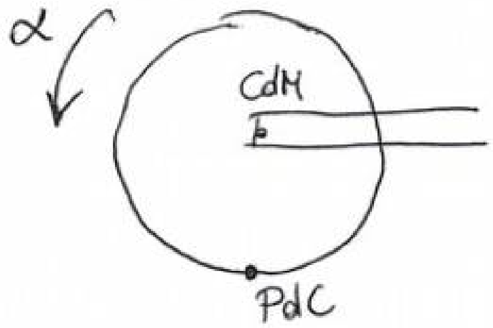
È ferma ⇒ Calcolo i momenti rispetto ad un fulcro.

$$R_s \cdot L - Mg\frac{L}{2} = 0$$

La somma di tali momenti deve essere nulla

$$\boxed{R_s = \frac{Mg}{2}}$$

Cilindro



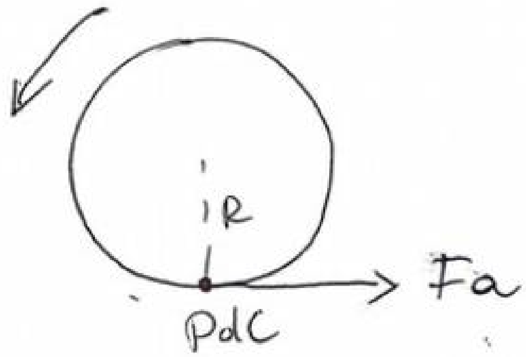
Ruota ma non trasla.

$a_{CdM} = 0$ Questo è vero perchè non trasla

$a_{PdC} = ?$ ✓

$\alpha = ?$ ✓

Rotazione - Agisce solo la forza F_a (attrito), la quale produce un momento torcente RF_a



$$\boxed{I\alpha = RF_a}$$

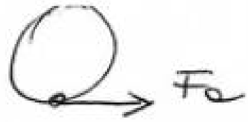
Accelerazione punto di contatto

$$\boxed{a_{PdC} = \alpha R}$$

$$V_T = \omega R$$
$$\alpha_T = \alpha R$$

In generale, $a_{PdC} = \alpha R + a_{CdM}$

Carrello



$$M\ddot{x} = -Kx - F_a$$

$$\begin{cases} 1) & M\ddot{x} = -Kx - F_a \\ 2) & I\alpha = RF_a \\ 3) & a_{pdc} = \alpha R \Rightarrow \ddot{x} = \alpha R \end{cases}$$

Fa non è nota

Niente slittamento: $\boxed{a_{pdc} = \ddot{x}}$

acc. del carrello

Dalla 2 $\Rightarrow F_a = \dfrac{I\alpha}{R}$

Dalla 3 $\Rightarrow \alpha = \dfrac{\ddot{x}}{R}$

$\longrightarrow \boxed{F_a = \dfrac{I\ddot{x}}{R^2}}$

$$I = \frac{MR^2}{2} \Rightarrow \boxed{F_a = \frac{M\cancel{R^2}\ddot{x}}{2\cancel{R^2}} = \frac{M\ddot{x}}{2}}$$

Dalla 1

$$M\ddot{x} = -kx - \frac{M\ddot{x}}{2} \Rightarrow \boxed{\frac{3}{2}M\ddot{x} = -Kx}$$

$$\omega^2 = \frac{2K}{3M}$$

ω è la puls. di tutto il sistema.

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2K}{3M}}.$$

$$\frac{3}{2} M\ddot{x} = -Kx$$

$x \equiv$ posizione del carrello $\equiv$ all. della molla. $(z=0)$

$$\ddot{x} = -\frac{2K}{3M}x$$

$$x(t) = A_{MAX}\cos\omega t$$

$$\ddot{x}(t) = -A_{MAX}\omega^2\cos\omega t$$

$x(t)$ è massimo $(A_{MAX}) \Rightarrow \ddot{x}(t)$ è massimo $= -A_{MAX}\omega^2$

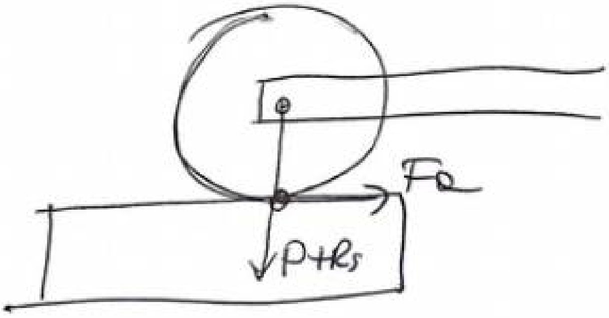
$$F_a = \frac{M\ddot{x}}{2}$$

$$F_{a\,MAX} = \frac{-MA_{MAX}\omega^2}{2} = -\frac{\cancel{M}A_{MAX}\,2K}{2\cdot 3\cancel{M}} = -\frac{A_{MAX}K}{3}$$

~~f. di attrito statico~~

f_s

$$|F_{a\,MAX}| < \mu_s N$$



$$N = P + R_s$$
$$= Mg + \frac{Mg}{2} = \frac{3}{2} Mg$$

$$|F_{a\,MAX}| < \mu_s \frac{3}{2} Mg$$

$$\frac{A_{MAX}\, K}{3} < \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} Mg$$

$$\boxed{A_{MAX} < \frac{9\, Mg}{4\, K}}$$