Corso di recupero di Fisica 2016/2017

Dario Madeo

Lezione del 12/05/2017

Slides disponibili all'indirizzo
http://www.dii.unisi.it/~madeo/crf/crf1617.html

2° principio della dinamica

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

$\uparrow$

forza netta agente sul corpo

1) $\vec{F}$ costante
2) $\vec{F}(\vec{v})$
3) $\vec{F}(\vec{x})$
4) $\vec{F}(\vec{x}, \vec{v})$

Il sistema dinamico è autonomo

Non ho dipendenza esplicita del tempo.

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{x}} \quad , \quad \vec{v} = \dot{\vec{x}}$$

1) $\vec{F}$ costante

gravità
attrito dinamico
forza esterna costante

$$m\dot{\vec{v}} = \vec{F}$$

$$m\ddot{\vec{x}} = \vec{F}$$

2) $\vec{F}(\vec{v})$

attrito viscoso

$$m\dot{\vec{v}} = \vec{F}(\vec{v})$$

$$m\ddot{\vec{x}} = F(\dot{\vec{x}})$$

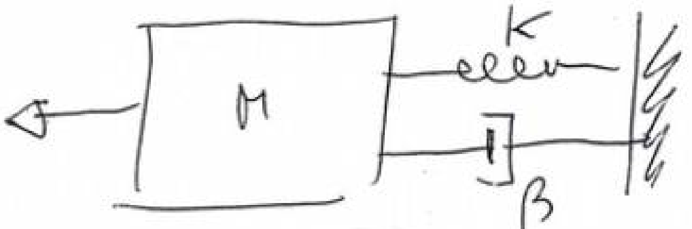
3) $\vec{F}(\vec{x})$

forze elastiche
forze dovute a potenziali
(forze conservative)

$$m\ddot{\vec{x}} = F(\vec{x})$$

4) $\underline{F(\vec{x}, v)}$ è un mix dei casi precedenti.

L'esempio classico è il sistema massa/molla/smorzatore:



$$M\ddot{x} = \boxed{\underbrace{-Kx - \beta v}_{F(x,v)} + F}$$

Eq. differenziali ordinarie (ODE)
lineari e omogenee del 1° ordine.
(trovare la velocità di un corpo)

$$m\dot{v} + \beta v = 0 \qquad m > 0$$

Polinomio caratteristico:

$$m D + \beta = 0$$

$$\boxed{\begin{array}{l} v^{(n)} \to D^n \\ v^{(0)} = v \Rightarrow D^0 = 1 \end{array}}$$

Radici del P.C. si dicono "modi del sistema".

$$D = -\frac{\beta}{m} \xrightarrow[\text{Il modo associato è}]{} e^{-\frac{\beta}{m}t}$$

Se $\beta = 0$

$$D = 0 \Longrightarrow 1$$

In generale, per $D \in \mathbb{R}$, il modo è

$$e^{Dt}$$

La soluzione generale è

$$v(t) = A e^{\lambda t} = \begin{cases} A e^{-\frac{\beta}{m} t} \\ A \end{cases}$$

con $A \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} m\dot{v} + \beta v = 0 \\ v(0) = v_0 \end{cases}$$ Problema di Cauchy.

1) $v(t) = A e^{-\frac{\beta}{m} t}$ $(\beta > 0)$

$v(0) = A e^{-\frac{\beta}{m} 0} = A = v_0$

$\Rightarrow \boxed{v(t) = v_0 e^{-\frac{\beta}{m} t}}$

2) $v(t) = A$ $(\beta = 0)$

$v(0) = A = v_0$

$\Rightarrow \boxed{v(t) = v_0}$

Moto rettilineo uniforme.

$m\dot{\vec{v}} = 0$

Non agisce nessuna forza (o la forza netta è 0)

ODE lineari e omogenee del II ordine

$$m\ddot{x}+\beta\dot{x}+kx=0$$

P. C. $\quad mD^2+\beta D+k=0$

Radici: $\quad D_{1,2}=\dfrac{-\beta\pm\sqrt{\beta^2-4km}}{2m}$.

Pongo (oggi) $k=0$

Modi

$D_1=0 \qquad 1$

$D_2=-\dfrac{\beta}{m} \qquad e^{-\frac{\beta}{m}t}$

$$x(t)=\underset{\uparrow\atop D_1}{A\cdot 1}+\underset{\uparrow\atop D_2}{Be^{-\frac{\beta}{m}t}} \qquad A,B\in\mathbb{R}$$

Se $\beta=0$

Modi

$D_1=0 \qquad 1$

$D_2=0 \qquad t$

$$x(t)=A+Bt$$

$$x(t) = A + B e^{-\frac{\beta}{m}t}$$

$$x(0) = x_0$$
$$v(0) = v_0$$

$$x(0) = A + B e^{-\frac{\beta}{m}0} = \boxed{A + B = x_0}$$

$$\dot{x}(t) = -\frac{B\beta}{m} e^{-\frac{\beta}{m}t} = v(t)$$

$$v(0) = -\frac{B\beta}{m} e^{-\frac{\beta}{m}0} = \boxed{\frac{-B\beta}{m} = v_0}$$

$$\begin{cases} A + B = x_0 \\ -\frac{B\beta}{m} = v_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = x_0 + \frac{m v_0}{\beta} \\ B = -\frac{v_0 m}{\beta} \end{cases}$$

$$x(t) = x_0 + \frac{m v_0}{\beta} - \frac{m v_0}{\beta} e^{-\frac{\beta}{m}t}$$

$$v(t) = v_0 e^{-\frac{\beta}{m}t}$$

$$x(t) = A + Bt \qquad \boxed{\beta = 0}$$

$$x(0) = x_0$$
$$v(0) = v_0$$

$$x(0) = A = x_0$$

$$\dot{x}(t) = B = v(t)$$

$$v(0) = B = v_0$$

$$x(t) = x_0 + v_0 t$$

$$v(t) = v_0$$

Moto rettilineo uniforme!

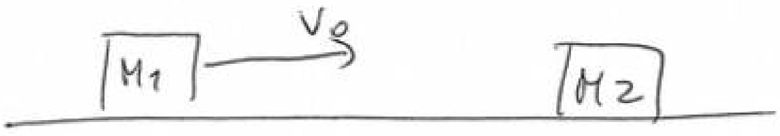
$$m\ddot{x} = 0$$

Estratto dall'esame di Fisica 1 del 18 Novembre 2016

Esercizio 2

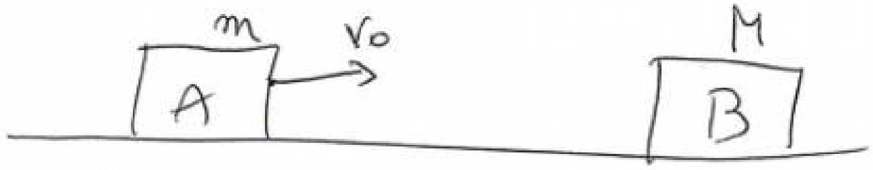
Un corpo A di massa m (nota) si muove su un binario orizzontale con velocità v_0 senza mai incontrare attrito. All'istante t=0 A urta elasticamente contro un corpo B di massa M inizialmente fermo. Anche B inizia a muoversi sul binario, però esso subisce l'effetto di una forza d'attrito viscoso descritto dalla relazione $F=-\gamma v$.

a) Per quali valori di M si avrà un secondo urto fra i due corpi?
b) Si considerino i valori di M per i quali non ha luogo un secondo urto. Quali valori, fra questi, fanno sì che B copra, rispettivamente, distanza minima o distanza massima?
c) Nel caso in cui, invece, il secondo urto abbia luogo, determinare (in funzione di M) l'istante a cui esso avviene, oppure spiegare le ragioni che rendono impossibile determinarlo.



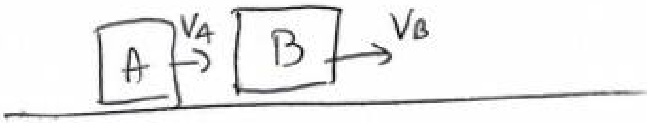
$\boxed{M_1}$ v_1 Dopo
$\boxed{M_2}$ v_2 l'urto ...

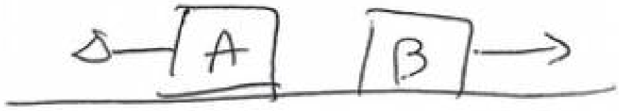
$$\begin{cases} V_1 = \dfrac{V_0 (M_1 - M_2)}{M_1 + M_2} \\[2ex] V_2 = \dfrac{2 M_1 V_0}{M_1 + M_2} \end{cases}$$



$$\begin{cases} V_A = \dfrac{V_0 (m - M)}{m + M} > 0 \quad \text{se } m > M \\[2ex] V_B = \dfrac{2 m V_0}{m + M} > 0 \end{cases}$$

$m > M$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $m < M$





Forse
Ho un secondo se $m > M$

Moto di A

$$x_A(t) = V_A t = \frac{V_0(m-M)}{m+M} t$$

Moto di B

$$M \ddot{x}_B = -\gamma \dot{x}_B \implies M\ddot{x}_B + \gamma \dot{x}_B = 0$$

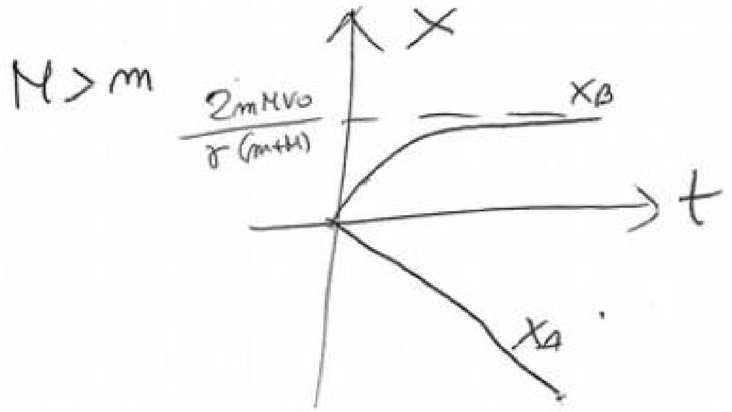
Cond. iniziali: $\quad x_B(0) = 0$

$$V_B(0) = V_B = \frac{2mV_0}{m+M}$$

$$x_B(t) = \frac{2mMV_0}{\gamma(m+M)}\left(1 - e^{-\frac{\gamma}{M}t}\right)$$

$x_A(t) = x_B(t)$ è la condizione per cui si ha un nuovo urto. In questo caso, non è possibile trovare l'istante dell'urto in forma chiusa (equazione trascendente).

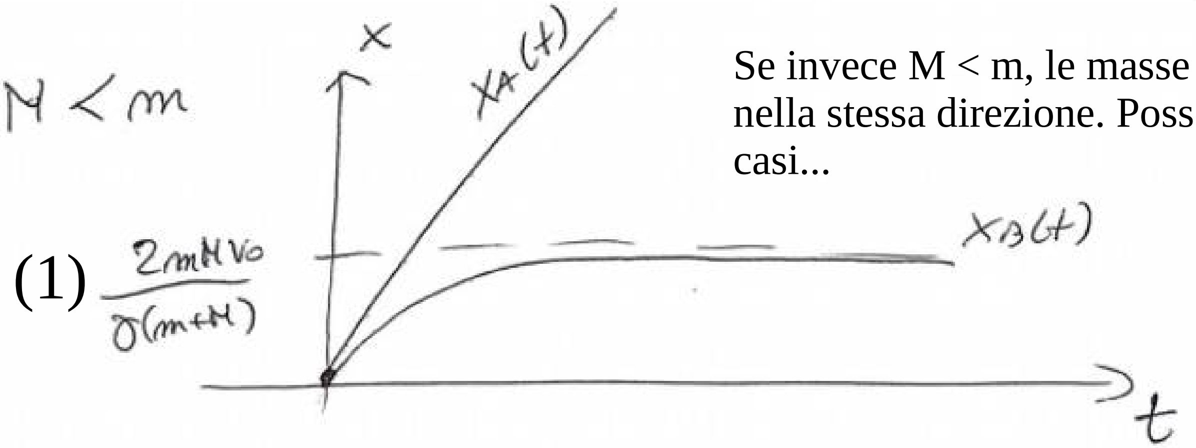
Disegnamo le possibili leggi orarie dei due corpi



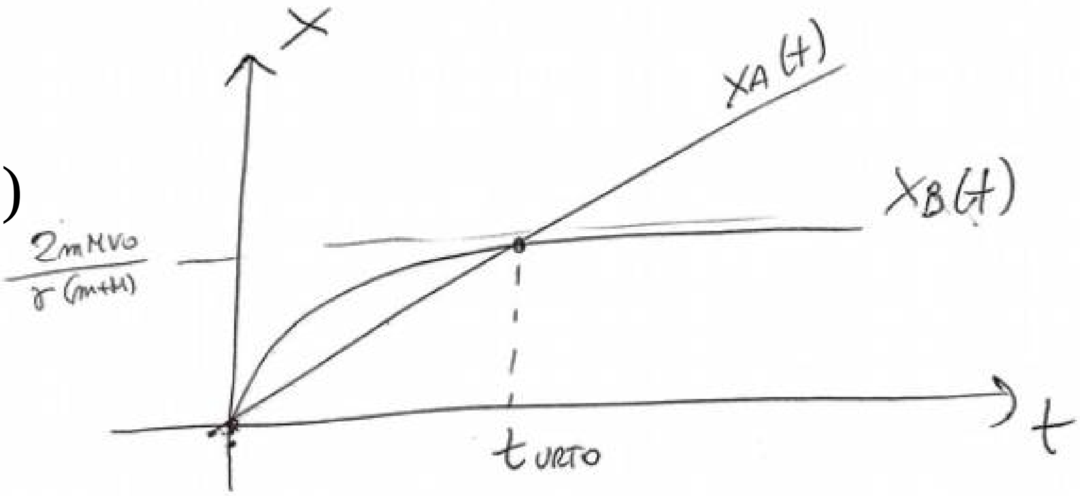
In questo caso, I due corpi si muovono in direzioni opposte, e un nuovo urto non è possibile.

Se invece M < m, le masse si muovono nella stessa direzione. Posso avere due casi...

(1)



(2)



$$V_A(0) = \frac{V_0(m-M)}{m+M} \qquad V_B(0) = \frac{2mV_0}{(m+M)}$$

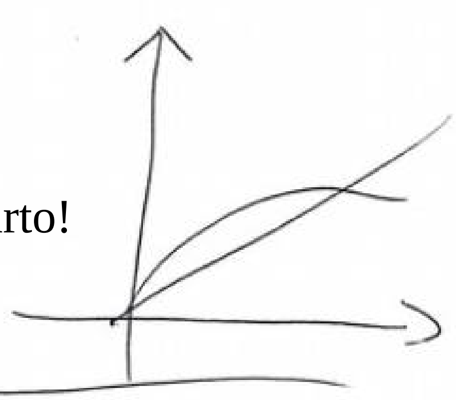
Il caso (1) è ovviamente da scartare. Infatti, potrebbe accadere se la velocità iniziale di A fosse maggiore di quella di B. Per il caso (2) si ha il contrario. In formule:

$$V_A(0) < V_B(0) \longrightarrow \frac{\cancel{V_0}(m-M)}{\cancel{m+M}} < \frac{2m\cancel{V_0}}{\cancel{m+M}} \longrightarrow m-M<2m \longrightarrow$$

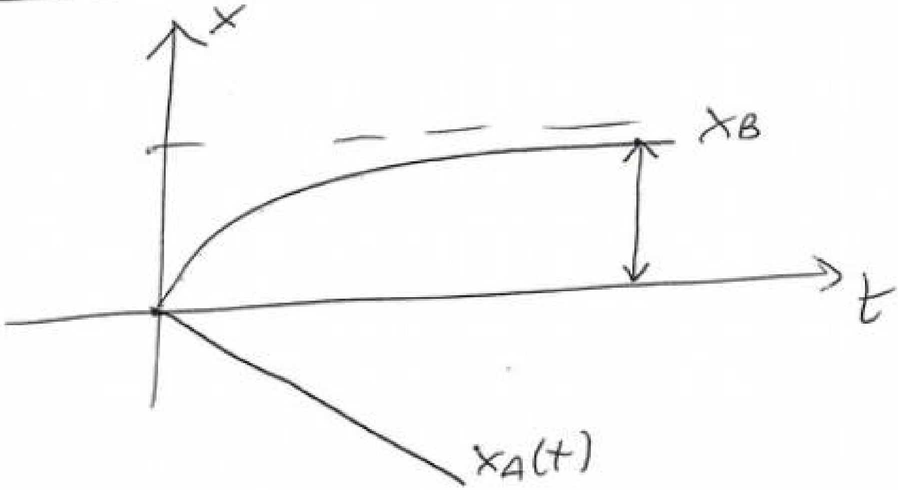
$\Rightarrow m + M > 0$

È sempre vero il 2° caso!

Dunque, per m>M, sicuramente ci sarà un secondo urto!



$M > m$



$$x_B(t) = \frac{2mMV_0}{\gamma(m+M)}\left(1 - e^{-\frac{\gamma}{M}t}\right)$$

$$\lim_{t\to+\infty} x_B(t) = \frac{2mMV_0}{\gamma(m+M)} = x_B(\infty)$$

$$\frac{\partial x_B(\infty)}{\partial M} = \frac{2mV_0}{\gamma}\,\frac{m+\cancel{M}-\cancel{M}}{(m+M)^2} = \frac{2m^2V_0}{\gamma(m+M)^2} > 0$$

L'insieme che considero è $M > m$

$$m < M < +\infty$$

$x_B(\infty)$ ha derivata rispetto ad M sempre positiva

Dunque, cresce sempre rispetto ad $M \Rightarrow$ Max e min si trovano sui bordi dell'insieme.

$$x_B(\infty)\Big|_{\substack{in\ m \\ (M=m)}} = \frac{\cancel{2m}\, m V_0}{\gamma\, \cancel{2m}} = \frac{m V_0}{\gamma}.$$

Valore minimo

$$x_B(\infty)\Big|_{\substack{in\ +\infty \\ (M\to+\infty)}}$$

$$\lim_{M\to+\infty} \frac{2mV_0}{\gamma}\,\frac{M}{M+m} =$$

$$= \lim_{M\to+\infty} \frac{2mV_0}{\gamma}\,\frac{\cancel{M}}{\cancel{M}(1+\underbrace{\tfrac{m}{M}}_{0})} = \frac{2mV_0}{\gamma}$$

Valore massimo

ODE lineari non omogenee del 1° grado

↓

termine non omogeneo costante

$$m\dot{v} + \beta v = z \qquad m>0.$$

1) PC dell'omogenea: $mD + \beta = 0 \Rightarrow D = -\frac{\beta}{m}$

2) La parte non omogenea ~~di mo~~ mi da altri modi.

Poiché z è costante, allora ho modo 1.

$$\boxed{\begin{array}{ll} D_1 = -\frac{\beta}{m} & \text{OMO} \\ D_2 = 0 & \text{N.OMO} \end{array}}$$

$\Downarrow$

$$v(t) = A e^{-\frac{\beta}{m}t} + B$$

		MODO
$\beta = 0$	OMO. $D_1 = 0$	1
	N. OMO. $D_2 = 0$	t

$v(t) = A + Bt$ Moto unif. accelerato

$m\dot{v} = z \qquad (m\dot{v} = mg)$

$v(t) = Ae^{-\frac{\beta}{m}t} + B \qquad \beta > 0$

$v(0) = v_0$

$v(0) = Ae^{-\frac{\beta}{m}0} + B = \boxed{A + B = v_0}$

$\dot{v}(t) = -\frac{\beta}{m} A e^{-\frac{\beta}{m}t}$

Sostituisco nella ODE

$m\dot{v} + \beta v = z$

$\cancel{m}\left(-\frac{\beta}{\cancel{m}} A e^{-\frac{\beta}{m}t}\right) + \beta\left(Ae^{-\frac{\beta}{m}t} + B\right) = z$

$\cancel{-\beta A e^{-\frac{\beta}{m}t}} + \cancel{\beta A e^{-\frac{\beta}{m}t}} + \beta B = z$

$\beta B = z \implies \boxed{B = \frac{z}{\beta}}$

$A = v_0 - B$

$\boxed{A = v_0 - \frac{z}{\beta}}$

$v(t) = \left(v_0 - \frac{z}{\beta}\right) e^{-\frac{\beta}{m}t} + \frac{z}{\beta}$

$v(t) = A + Bt \qquad \beta = 0$

$v(0) = v_0$

$v(0) = \boxed{A = v_0}$

$\dot{v}(t) = B$

Sostituisco nella ODE

$m\dot{v} = z$

$mB = z \implies \boxed{B = \frac{z}{m}}$

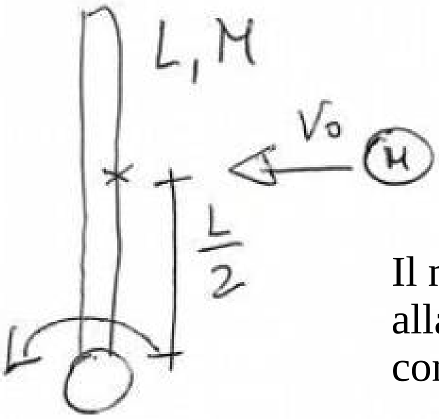
$\boxed{v(t) = v_0 + \frac{z}{m} t}$

Moto unif. acc.

Estratto dall'esame di Fisica 1 del 3 Aprile 2017

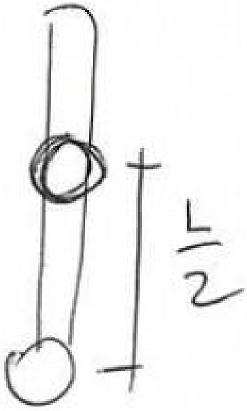
Esercizio 2

Una sbarretta omogenea di massa M e lunghezza L è imperniata ad un estremo. Essa giace su un piano orizzontale scabro ed è immersa in un fluido viscoso. All'istante t=0 essa, che è ferma, viene colpita da una particella di massa M la quale, giungendo con velocità V_0 in direzione perpendicolare alla sbarretta e parallela al piano, si conficca nel suo centro. Dopo l'urto, il sistema ruota sotto l'effetto dei due attriti, che comportano rispettivamente momenti frenanti di intensità $\tau_{radente}=\tau_0$ e $\tau_{viscoso}=\beta\omega$, dove ω è la velocità angolare della sbarretta e τ_0 e β sono costanti assegnate. Determinare l'istante al quale la sbarretta cessa di ruotare e la componente radiale della reazione vincolare ad ogni istante successivo all'urto.



$$I_S = \frac{1}{3}ML^2$$

Il momento di inerzia del corpo dopo l'urto è pari alla somma del momento di inerzia della sbarretta con il contributo dovuto alla particella:



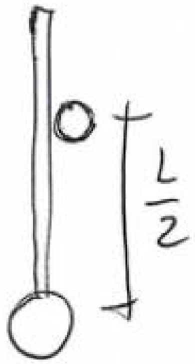
$$I = I_S + \boxed{M\left(\frac{L}{2}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{3}ML^2 + \frac{1}{4}ML^2 = \frac{7}{12}ML^2.$$

Il contributo della particella è pari alla sua massa per la sua distanza dal fulcro al quadrato.

~~l'urto~~ l'urto è anaelastico.

$\Rightarrow$ Si conserva il momento angolare



$\boxed{\text{Prima dell'urto:}}$

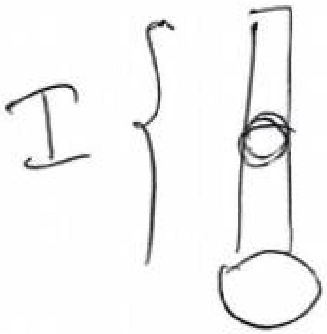
$$L_1 = M\frac{L}{2}\cdot V_0$$

$$= M\frac{L}{2}\frac{L}{2}\frac{V_0}{\frac{L}{2}}$$

$$= \frac{ML^2}{4}\,\frac{V_0}{\frac{L}{2}}$$

$$= I_M \cdot \omega_0$$

<u>Dopo l'urto</u>



$$L_2 = I\omega_0$$

$$\overset{L_1}{I\omega_0} \overset{=}{=} \overset{L_2}{\frac{MLV_0}{2}} \Rightarrow \omega_0 = \frac{6}{7}\frac{V_0}{L}.$$

$$I\dot{\omega} = -\tau_0 - \beta\omega$$

$$\boxed{I\dot{\omega} + \beta\omega = -\tau_0}$$

$$\omega(t) = -\frac{\tau_0}{\beta} + \left(\frac{6}{7}\frac{V_0}{L} + \frac{\tau_0}{\beta}\right) e^{-\frac{\beta}{I}t}$$

Quando si ferma la sbarretta?

$$\omega(t) = 0$$

$$-\frac{\tau_0}{\beta} + \left(\frac{6}{7}\frac{V_0}{L} + \frac{\tau_0}{\beta}\right) e^{-\frac{\beta}{I}t} = 0$$

$$\left(\frac{6}{7}\frac{V_0}{L} + \frac{\tau_0}{\beta}\right) e^{-\frac{\beta}{I}t} = \frac{\tau_0}{\beta}$$

$$e^{-\frac{\beta}{I}t} = \frac{7L\tau_0}{6V_0\beta + 7L\tau_0}$$

$$-\frac{\beta}{I}t = \log\left(\frac{7L\tau_0}{6V_0\beta + 7L\tau_0}\right)$$

$$t = -\frac{I}{\beta}\log\left(\frac{7L\tau_0}{6V_0\beta + 7L\tau_0}\right)$$

$$t = \frac{I}{\beta} \log\left(1 + \frac{6 V_0 \beta}{7 L \tau_0}\right).$$

Moto circolare non uniforme.

$$\Downarrow$$

$$\underset{\text{Centripeta}}{a_{CENT}} = \frac{V^2}{\left(L/2\right)}$$

$$a_{CENT} = \frac{V_T^2}{R_{CDM}}$$

nel caso di oggetti non puntiformi.

$$V = \omega \frac{L}{2}$$

$$a_{CENT} = \omega^2 \frac{L}{2}$$

$$a_{CENT}(t) = \omega^2(t) \frac{L}{2}$$

$$F_{CENT}(t) = 2 M a_{CENT}(t) = M L \omega^2(t).$$

La reazione vincolare sul fulcro è pari alla forza centripeta $F_{CENT}(t)$.