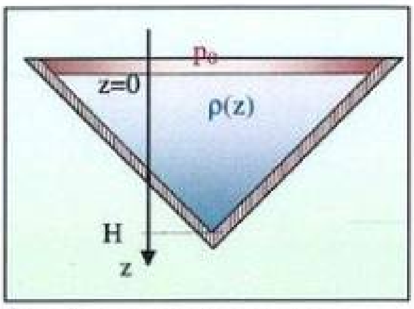
Corso di recupero di Fisica 2016/2017

Dario Madeo

Lezione del 05/05/2017

Slides disponibili all'indirizzo
http://www.dii.unisi.it/~madeo/crf/crf1617.html

Estratto dall'esame di Fisica 1 del 18 Novembre 2015

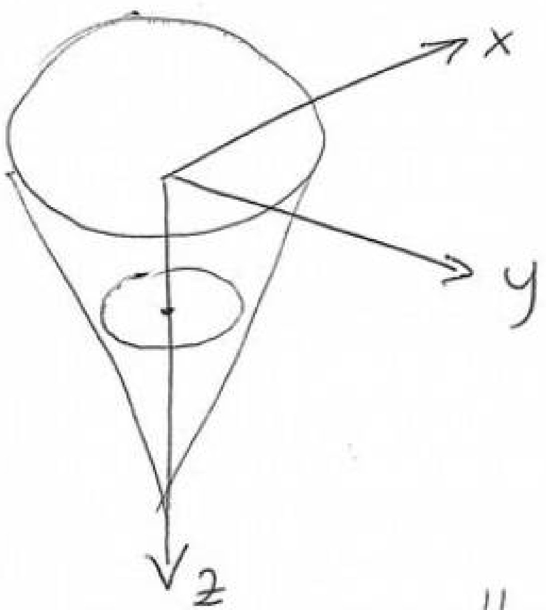


Esercizio 3 (solo per esame da 9cfu)
Un recipiente conico è sezionato da piani orizzontali in cerchi il cui raggio eguaglia la distanza di tali piani dal vertice (in altri termini, l'intersezione del cono con un piano passante dal suo asse forma un angolo retto, come rappresentato in figura). Il recipiente è superiormente aperto e contiene liquido non omogeneo, che è stratificato cosicché la densità maggiore è quella degli strati più profondi. Si sa che la pressione dipende dalla distanza z dal vertice secondo la legge $p(z)=p_0+\alpha z+\beta z^2$, dove p_0 è la pressione atmosferica α e β sono costanti positive e z è la profondità misurata a partire dalla superficie superiore del liquido. Il vertice del cono è a profondità z=H. Qual è la massa totale del liquido?

Il cono può essere visto come un cilindro in cui il raggio varia con la quota z!!!

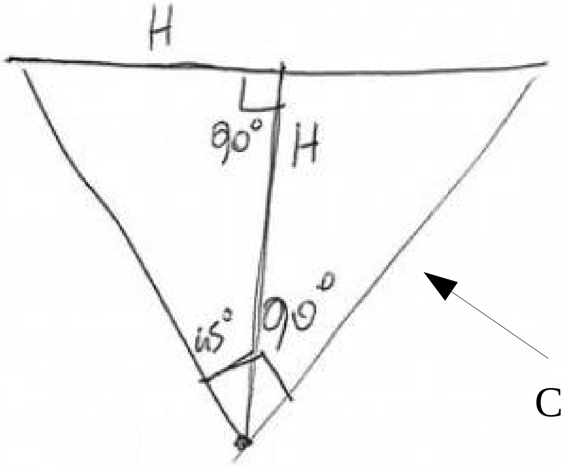
$$\begin{cases} x = r(z)\cos\theta \\ y = r(z)\sin\theta \\ z = z \end{cases}$$

Il raggio dipende dalla quota z.



Come trovo r(z)?

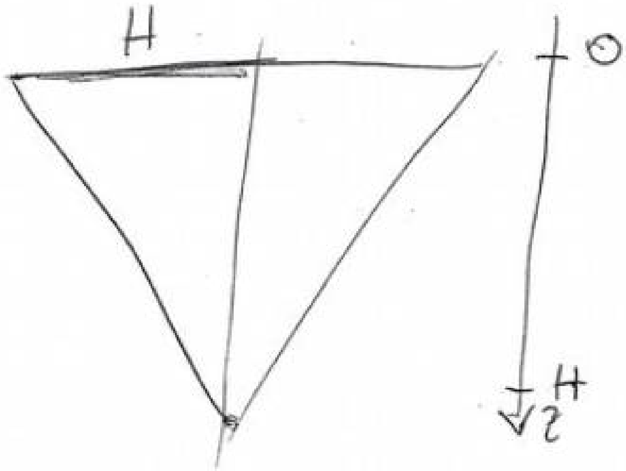
Devo sapere quanto vale r(z) in 2 punti diversi!



Cono visto dal lato

Per stabilire la relazione che lega il raggio a z, uso la formula della retta passante per due punti:

z	$r(z)$
0	H
H	0



$$\boxed{\frac{z-0}{H-0} = \frac{r-H}{0-H}}$$

$$\frac{z}{H} = \frac{r-H}{-H}$$

$$z = \frac{r-H}{-1}$$

$$-z = r-H$$

$$\boxed{r = H - z}$$

In generale

z	r
z_1	r_1
z_2	r_2

$$\frac{z-z_1}{z_2-z_1} = \frac{r-r_1}{r_2-r_1}$$

$$\boxed{dx\,dy\,dz = r\,dr\,d\theta\,dz}$$

Per quanto riguarda **l'integrazione**, lavoriamo come se stessimo considerando un cilindro, ma con un vincolo: bisogna integrare **prima in dr e poi in dz**! Infatti, r dipende da z...

$$\underset{(\theta)}{\int_0^{2\pi}} \; \underset{(z)}{\int_0^{H}} \; \underset{(r)}{\int_0^{H-z}} \dots$$

Pressione idrostatica

$$p(z) = p_0 + \alpha z + \beta z^2 \qquad \text{(DATO)}$$

Legge di Stevino

$$\underbrace{p(z) = p_0 + \rho g z}_{\text{vale per fluidi omogenei}} \qquad \rho = \text{densità del fluido.}$$

Vale per fluidi omogenei

$\Rightarrow \rho$ è costante.

Ma nel problema ρ dipende da z!

Formula da usare per fluidi stratificati:

$$\boxed{p(z) = p_0 + g\int_0^z \rho(z)\,dz}$$

Nel caso semplice in cui $\rho(z) = \rho$

$$p(z) = p_0 + g\int_0^z \rho\,dz = p_0 + g\rho\int_0^z dz$$

$$= p_0 + g\rho z.$$

...cioè ritrovo la legge di Stevino!

$$p(z) = p_0 + g\int_0^{z} \rho(z)\,dz$$ LEGGE

$$p(z) = p_0 + \alpha z + \beta z^2$$ DATO

$$\cancel{p_0} + g\int_0^{z} \rho(z)\,dz = \cancel{p_0} + \alpha z + \beta z^2$$

$$\boxed{\int_0^{z} \rho(z)\,dz = \frac{\alpha z + \beta z^2}{g}}$$

Per risolvere la precedente equazione, assumo che $\Phi(z)$ (funzione non nota) sia la primitiva di $\rho(z)$. Assumo anche che $\Phi(0)$ sia noto.

$$\phi(z) : \frac{d\,\phi(z)}{dz} = \rho(z)$$

$$\phi(z) - \phi(0) = \frac{\alpha z + \beta z^2}{g}$$

$$\boxed{\phi(z) = \frac{\alpha z + \beta z^2}{g} + \phi(0)}$$

A questo punto, derivo la primitiva:

$$\rho(z) = \frac{d}{dz}\phi(z) = \frac{\alpha + 2\beta z}{g} + 0$$

$$\boxed{\rho(z) = \frac{\alpha + 2\beta z}{g}}$$

Ora che conosco la densità, posso calcolare la massa del fluido!

$$M = \int_0^{2\pi}\int_0^{H}\int_0^{H-z} \rho(z)\, r\, dr\, dz\, d\theta$$

$$= \underbrace{\int_0^{2\pi} d\theta}\ \int_0^{H}\int_0^{H-z} \frac{\alpha+2\beta z}{g}\, r\, dr\, dz .$$

$$= 2\pi \int_0^{H} \frac{\alpha+2\beta z}{g} \int_0^{H-z} r\, dr\, dz$$

$$= 2\pi \int_0^{H} \frac{\alpha+2\beta z}{g} \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^{H-z} dz$$

$$= 2\pi \int_0^{H} \frac{\alpha+2\beta z}{g} \frac{(H-z)^2}{2}\, dz$$

$$= \dots \frac{\pi H^3}{6g}(2\alpha + H\beta) .$$

Se il dato fosse stato : $\boxed{p(z) = p_0 + \alpha z}$

Legge di Stevino "classica": $\boxed{p(z) = p_0 + \rho g z}$

$$\rho g = \alpha \Rightarrow \boxed{\rho = \frac{\alpha}{g}}$$

É come aver posto $\beta = 0$

$$M = \frac{\pi H^3}{6g}(2\alpha + H\beta)$$

$\beta = 0$

$$M = \frac{\pi H^3}{6g} 2\alpha = \frac{\pi H^3}{3\cancel{g}} \rho \cancel{g} = \frac{\pi H^3 \rho}{3}$$

Volume del cono: $\boxed{\dfrac{\pi R^2 H}{3}}$

$(R = H)$

$$\underbrace{\frac{\pi H^3}{3}}_{V} \underbrace{\rho}_{\text{densità}} = M$$

Questo è il risultato che avrei potuto calcolare senza integrali se la densità del liquido fosse stata costante!

Estratto dall'esame di Fisica 1 del 18 Novembre 2013

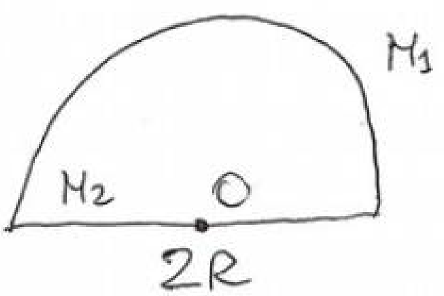
Esercizio 2

Del filo omogeneo (densità lineare λ_0) viene piegato a forma di "D" per costruire un corpo rigido. Più precisamente, il corpo è formato da una semicirconferenza e dal suo diametro. Sia O il centro del diametro e 2R la sua lunghezza. Il corpo si muove su un piano verticale, potendo ruotare intorno ad un asse (orizzontale) β passante da O, senza incontrare attriti.

a) Calcolare la massa del corpo e il suo momento d'inerzia rispetto al punto O.

b) Calcolare il centro di massa

c) Calcolare il momento di inerzia di un'asse passante per il C.di M.



$$M = M_1 + M_2$$

$$M_1 = \pi R \lambda_0$$

$$M_2 = 2R\lambda_0$$

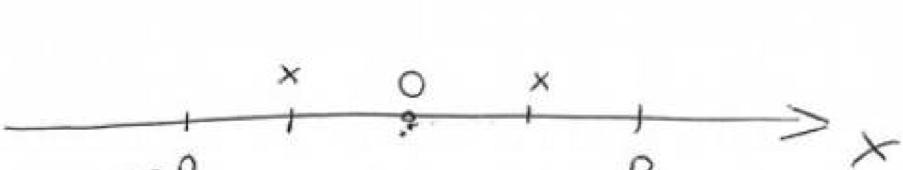
$$M = R\lambda_0 (2+\pi).$$

$$\left[\lambda_0 = \frac{kg}{m}\right]$$

Momento di inerzia

· Per la massa M_1, la d è pari ad R, per ogni punto!

· Per la massa M_2, la d è pari a $|x|$.



$$I_1 = \int_0^{\pi} d^2 \underbrace{\lambda_0 R\, d\theta}_{dm} = \int_0^{\pi} R^3 \lambda_0 \, d\theta$$

$$I_2 = \int_{-R}^{R} d^2 \underbrace{\lambda_0 dx}_{dm} = \int_{-R}^{R} x^2 \lambda_0 \, dx$$

$$I_1 = R^3 \lambda_0 \pi$$

$$I_2 = \lambda_0 \frac{2}{3} R^3 \quad \Longrightarrow \underline{I} = I_1 + I_2 = R^3 \lambda_0 \left(\pi + \frac{2}{3}\right)$$

<u>Nel caso 2</u>

<u>1D</u> $\quad dm = \lambda_0 \, dx$

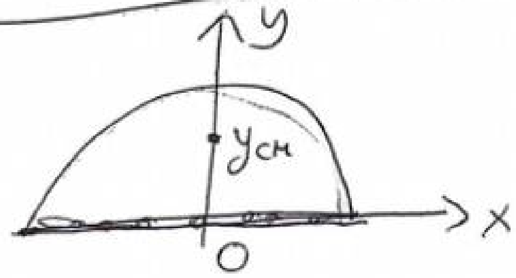
<u>2D</u> $\quad dm = \sigma \, dx\, dy$

<u>3D</u> $\quad dm = \rho \, dx\, dy\, dz$

<u>Nel caso 1</u>

$$dm = \lambda_0 \underline{ds} = \lambda_0 \underline{R\, d\theta}$$

Centro di massa



$$x_{CM} = 0$$

$$y_{CM} = \frac{1}{M}\int y\, dm$$

$$= \frac{1}{M}\left[\underbrace{\cancel{\int_{-R}^{R} y\, \lambda_0 dx\Big|_{y=0}}}_{\text{LINEARE}} + \underbrace{\int_0^{\pi} R\sin\theta\ \lambda_0 R d\theta}_{\text{CURVA}}\right] \qquad \cancel{} \to 0$$

$$= \frac{1}{M}\int_0^{\pi} \lambda_0 R^2 \sin\theta\, d\theta$$

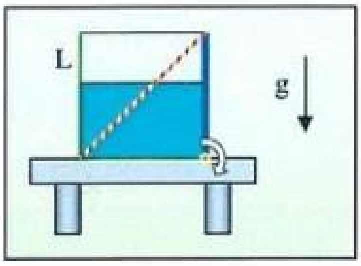
$$= \frac{\lambda_0 R^2}{M}\left[-\cos\theta\right]_0^{\pi} = \frac{2\lambda_0 R^2}{M}$$

$$= \frac{2\cancel{\lambda_0} R^{\cancel{2}}}{\cancel{R}\cancel{\lambda_0}(2+\pi)} = \frac{2R}{2+\pi} \quad (>0)$$

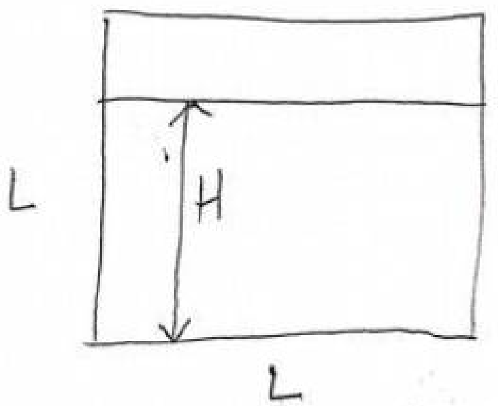
Estratto dall'esame di Fisica 1 del 9 Settembre 2016

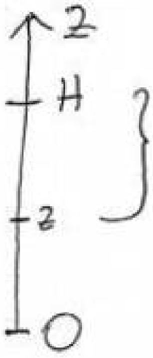
Esercizio 3

Un recipiente cubico di lato L, superiormente aperto, poggia su un piano orizzontale. Una delle facce laterali del recipiente è una paratia che può ruotare intorno ad uno spigolo di base. Tale paratia viene tenuta in posizione mediante una corda connessa al centro del suo lato superiore ed al centro dello spigolo opposto. Calcolare la tensione della corda in funzione del volume di liquido V presente nel recipiente (sia ρ la densità di tale liquido).



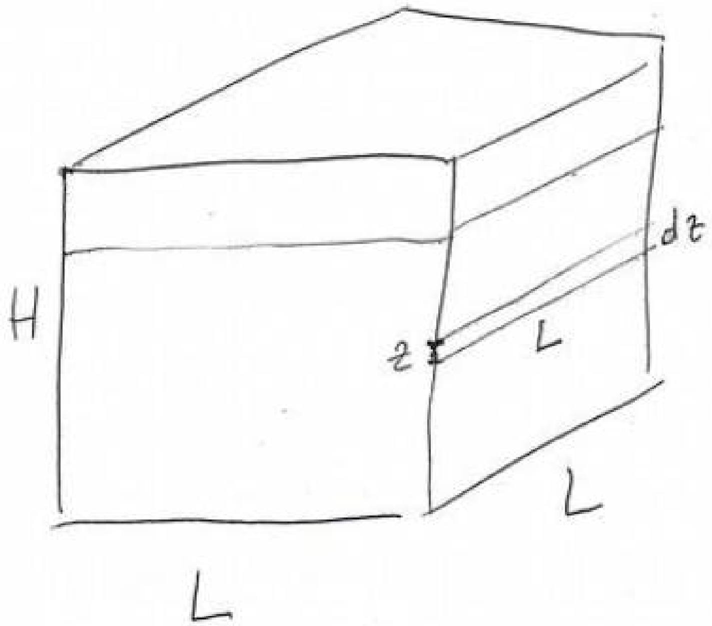
Pressione idrostatica: $p(z) = \rho g z$





H-z è la profondità!

$$\boxed{p(z) = \rho g (H-z)}$$



p(z) è la pressione che agisce sull'area Ldz!

$$P = \frac{F}{A}$$

P pressione, F forza, A area

$$F = PA$$

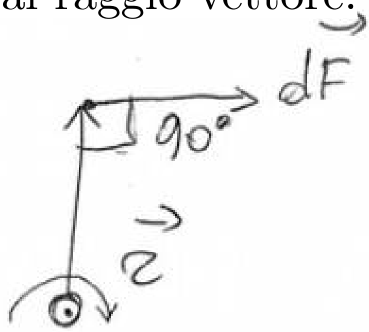
$$\boxed{dF = p(z)\, L\, dz}$$

Momento di una forza: $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$

Se ho N forze: $\vec{\tau} = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times \vec{F}_i$

Il momento torcente che si ha in ogni punto z è: $d\vec{\tau} = \vec{r} \times d\vec{F}$

Per costruzione, si ha che la forza è ortogonale al raggio vettore.



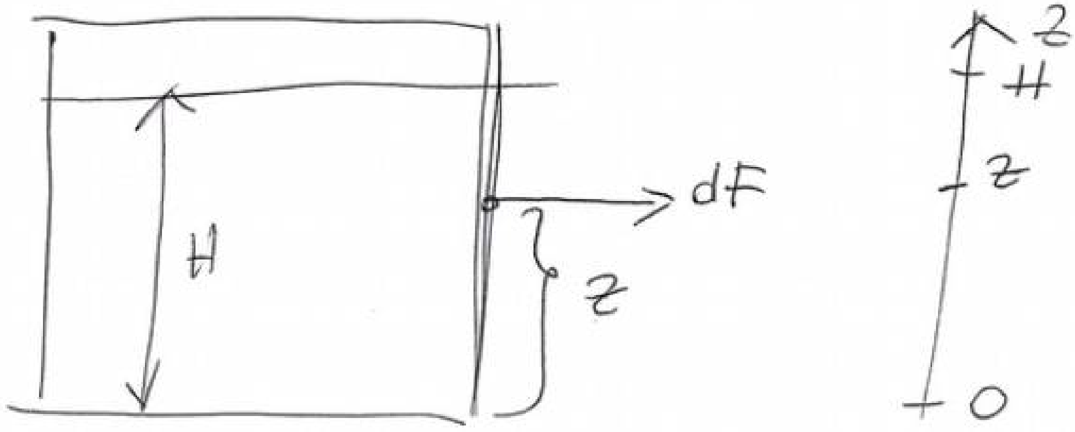
Calcolo il modulo del momento torcente: $d\tau = r dF \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = r dF$

Per trovare il momento torcente totale, devo sommarli tutti.

Ma non posso usare semplicemente una sommatoria!

Devo integrare $d\tau$ lungo l'asse z!

$$\tau = \int d\tau = \int r dF$$



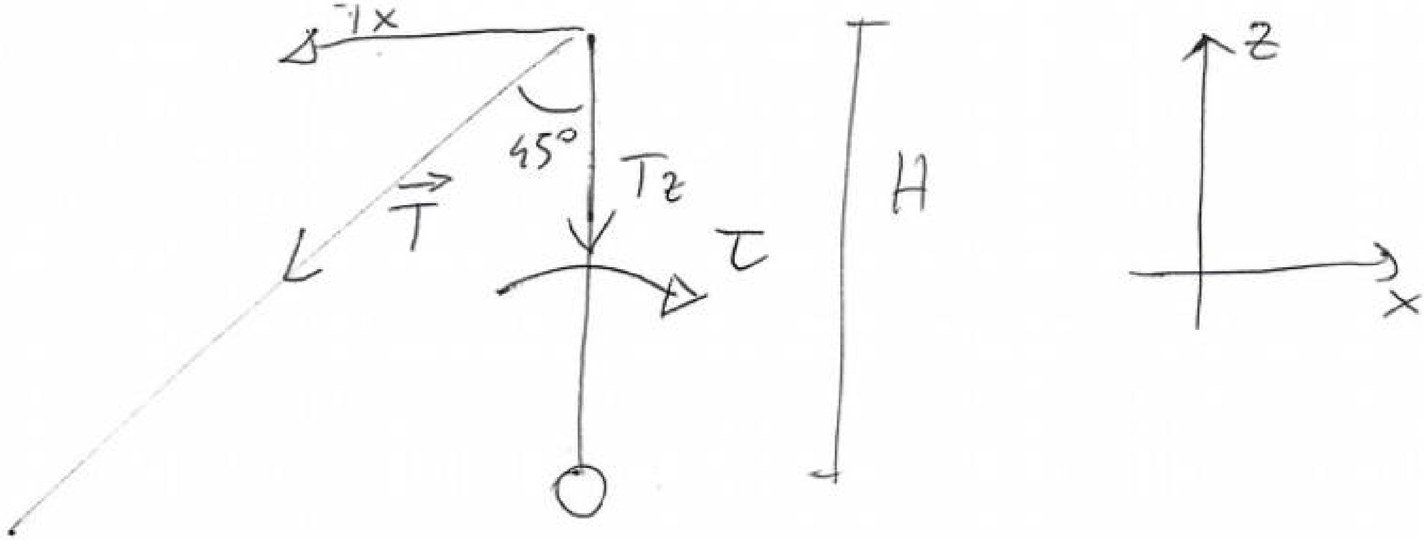
$$\tau = \int_0^H z\, dF = \int_0^H z\, p(z)\, L\, dz$$

$$= \int_0^H z \rho g (H - z) L\, dz = \dots = \frac{\rho g L H^3}{6}$$

Volume del liquido? $V = L^2 H$

$$H = \frac{V}{L^2}$$

$$\tau = \frac{\rho g L}{6} \left(\frac{V}{L^2} \right)^3 = \frac{\rho g V^3}{6 L^5}.$$



$$\vec{T} = T \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

$$\tau_{fune} = H \cdot T\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Solo $\cancel{F}_x$ contribuisce alla rotazione!

$$\tau_{fune} = H \cdot \cancel{F}_x$$

Eq. statico: $\tau + \tau_{fune} = 0$

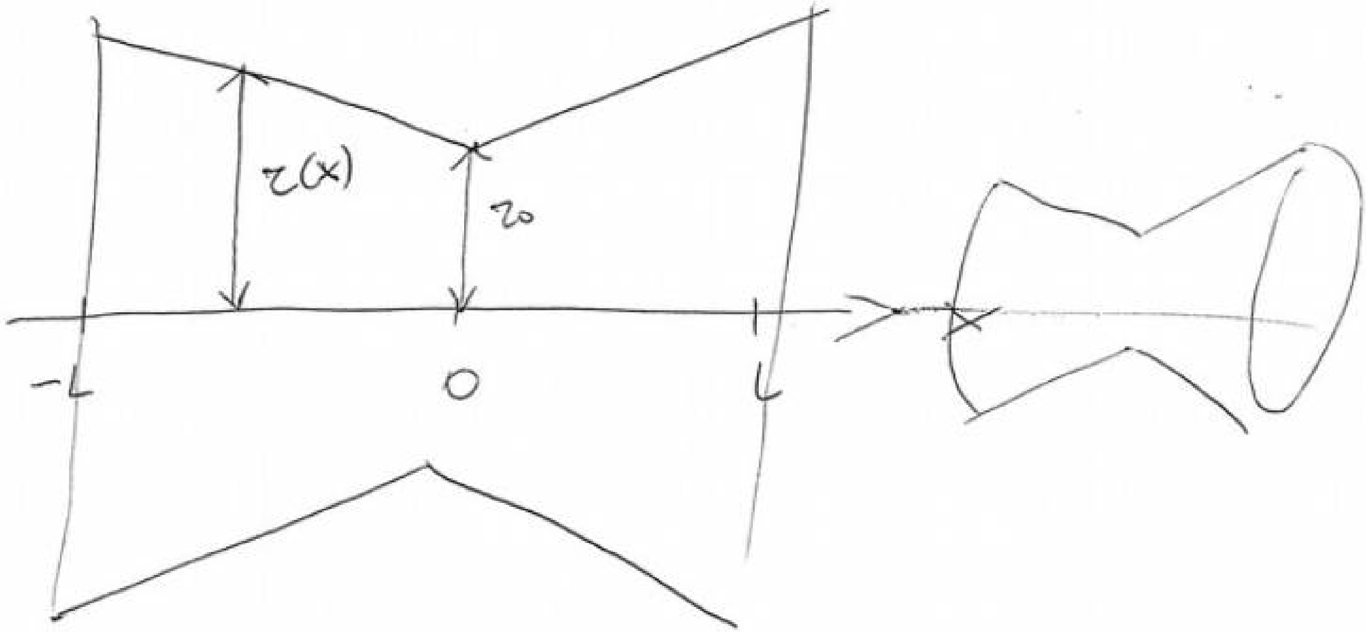
$$\frac{\rho g V^3}{6 L^5} - \frac{\sqrt{2}\, T H}{2} = 0$$

$$\Rightarrow T = \frac{\rho g V^3}{3 L^6 \sqrt{2}}.$$

Estratto dall'esame di Fisica 2 del 26 Settembre 2016

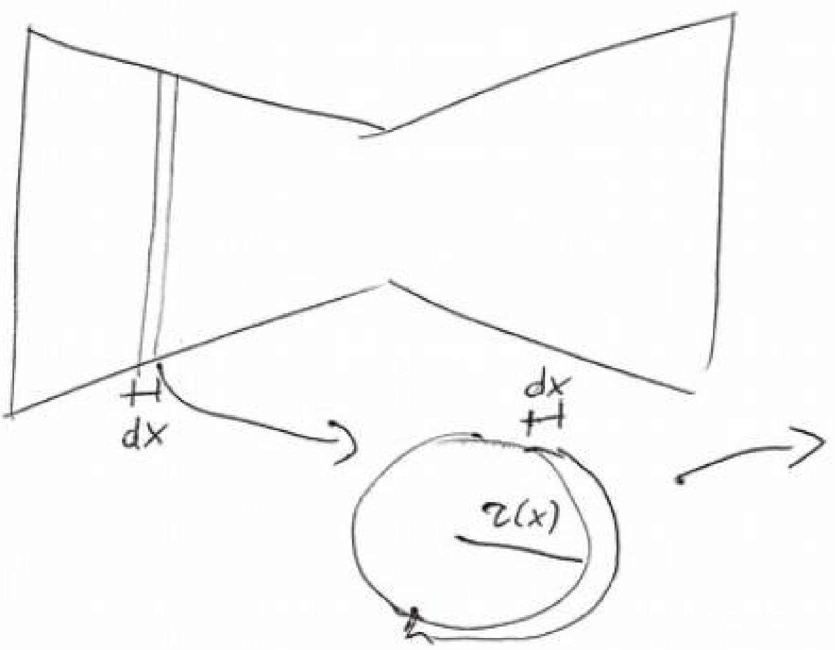
Esercizio 3

Si ha un lungo filo rettilineo costituito di materiale omogeneo (resistività ρ) avente lunghezza 2L e giacente sull'asse x, con il centro sull'origine (quindi il filo va da $x=-L$ a $x=+L$). Il filo ha sezione circolare il cui raggio è variabile, dipendendo da x secondo la legge $\boxed{r(x) = r_0\sqrt{1+(x/L)^2}}$. Il filo è molto sottile, ovvero $r_0 \ll L$. Agli estremi del filo viene applicata una forza elettromotrice costante V, così che esso è percorso da corrente in condizioni stazionarie. Calcolare l'intensità del campo magnetico sulla superficie del filo lontano dalgi estremi, cioè per x tali che $|x| \ll L$. Inoltre, calcolare la potenza dissipata sul filo nel tratto compreso fra $x=0$ e $x=L/\sqrt{3}$.



II legge di Ohm

$$R = \rho \frac{L}{A}$$



Calcolo la resistenza
dR di una "fettina infitesima"
di filo...

$$dR = \rho \frac{dx}{\pi r^2(x)}$$

$$dR = \rho \frac{dx}{\pi r^2(x)}$$

Calcolo la resistenza totale integrando in dR!!!

$$R = \int dR = \int_{-L}^{L} \rho \frac{dx}{\pi r^2(x)}$$

$$= \int_{-L}^{+L} \rho \frac{dx}{\pi r_0^2 \left(1+\left(\frac{x}{L}\right)^2\right)} = \frac{\rho}{\pi r_0^2} \int_{-L}^{+L} \frac{dx}{1+\left(\frac{x}{L}\right)^2}$$

$$s = \frac{x}{L}, \quad x = sL, \quad dx = L\,ds$$

$$\begin{cases} x = -L \implies s = -1 \\ x = +L \implies s = +1 \end{cases}$$

$$R = \frac{\rho}{\pi r_0^2} \int_{-1}^{1} \frac{L\,ds}{1+s^2} = \frac{\rho L}{\pi r_0^2} \int_{-1}^{1} \frac{ds}{1+s^2}$$

$$= \frac{\rho L}{\pi r_0^2} \Big[\text{atan}\Big]_{-1}^{1} = \frac{\rho L}{2 r_0^2}.$$