

Corso di recupero di Fisica 2016/2017

Dario Madeo

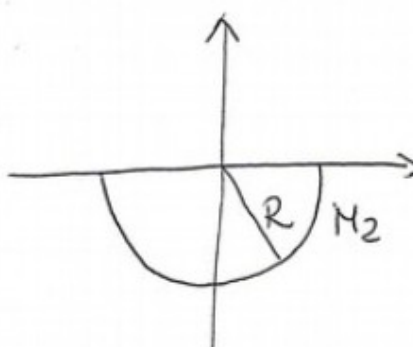
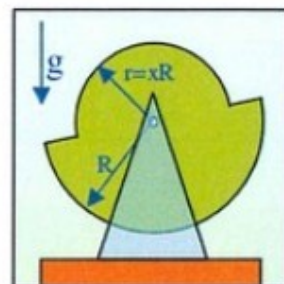
Lezione del 28/04/2017

**Slides disponibili all'indirizzo
<http://www.dii.unisi.it/~madeo/crf/crf1617.html>**

Estratto dall'esame di Fisica 1 del 28 Gennaio 2014

Esercizio 2

Da una lamiera piana, omogenea, di densità superficiale σ viene ritagliato un corpo costituito da due semicerchi concentrici, rispettivamente di raggio R e $r=xR$, con $x \in [0, 1]$, vedi figura. Quanto dista il centro di massa dall'asse? Questo corpo viene messo a compiere piccole oscillazioni intorno ad un asse orizzontale passante per il centro comune dei due semicerchi. Determinare la pulsazione $\Omega(x)$ di tali oscillazioni e, (facoltativo per l'esame da 9cfu) stabilire se esistono valori di x che la rendono massima o minima.



$$M_1 = \frac{\pi (xR)^2 \sigma}{2}$$

$$= \frac{\pi x^2 R^2 \sigma}{2}$$

$$M_2 = \frac{\pi R^2 \sigma}{2}$$

Il corpo è costituito da due oggetti che studio separatamente.

$$M_{TOTALE} = M_1 + M_2$$

$$= \frac{\pi x^2 R^2 \sigma}{2} + \frac{\pi R^2 \sigma}{2} = \frac{\pi R^2 \sigma}{2} (x^2 + 1)$$

1° oggetto	2° oggetto
x_{1CM}, y_{1CM}	x_{2CM}, y_{2CM}

Centro di massa di un sistema di due corpi

$$X_{CM} = \frac{X_{1CM} M_1 + X_{2CM} M_2}{M_1 + M_2}; \quad y_{CM} = \frac{y_{1CM} M_1 + y_{2CM} M_2}{M_1 + M_2}$$

Dobbiamo calcolare x_{cm1} , y_{cm1} , x_{cm2} , y_{cm2}

Per simmetria: $x_{cm1} = x_{cm2} = 0$

$$y_{cm1} = \frac{1}{M_1} \iint y \sigma \, dx \, dy$$

$$\boxed{\begin{aligned} dx \, dy \\ = \\ r \, d\theta \, dr \end{aligned}}$$

$$= \frac{1}{M_1} \int_0^R \int_0^\pi r \sin \theta \, \sigma \, r \, d\theta \, dr$$

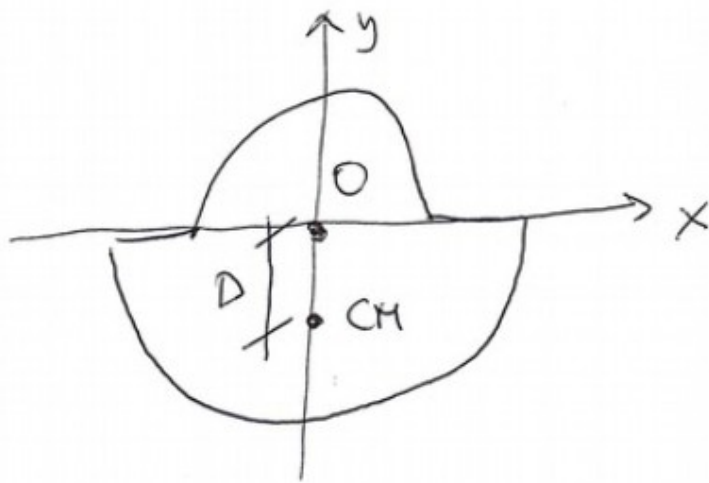
$$= \dots \frac{4 \times R}{3\pi}$$

$$y_{cm2} = \dots -\frac{4R}{3\pi} \quad \left(\begin{array}{l} \text{nell'integrale ho} \\ \theta \in [\pi; 2\pi] \end{array} \right)$$

$$y_{cm} = \frac{M_1 y_{cm1} + M_2 y_{cm2}}{M_1 + M_2}$$

$$= -\frac{4R}{3\pi} \frac{1 - x^3}{1 + x^2}$$

$$x_{cm} = 0$$



$$x_{cm} = 0$$

$$y_{cm} < 0$$

$$I_0 = \int d^2 dm$$

$d \equiv$ distanza di ogni mazzo dm dall'asse di rotazione.

$$= \underbrace{\int_0^\pi \int_0^{xR} r^2 \sigma r dr d\theta}_{\text{Contributo } M_1} + \underbrace{\int_\pi^{2\pi} \int_0^R r^2 \sigma r dr d\theta}_{\text{Contributo } M_2}$$

$$= \dots \frac{\sigma \pi R^4}{4} (1 + x^4)$$

Se l'asse rotazionale fosse stato CM...

$$I_{cm} = I_0 + D^2 M$$

$$D = \frac{4R}{3\pi} \frac{1-x^3}{1+x^2}$$

$$\dots I_{cm} = \dots$$

Coordinate cilindriche

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{cases} \quad (dx dy) dz = (r dr d\theta) dz$$

Densità di massa / carica

$$\rho(x, y, z)$$

$$\left[\frac{\text{Kg}}{\text{m}^3} \text{ o } \frac{\text{C}}{\text{m}^3} \right]$$

$$dm = \rho(x, y, z) dx dy dz$$

$$= \rho(r, \theta, z) r dr d\theta dz.$$

Si parla di simmetria cilindrica se

$$\rho(r, \theta, z) = \rho(r)$$

Le coordinate cilindriche sono uguali alle polari, ma in più hanno la coordinata z !

Estratto dall'esame di Fisica 1 del 15 Maggio 2013

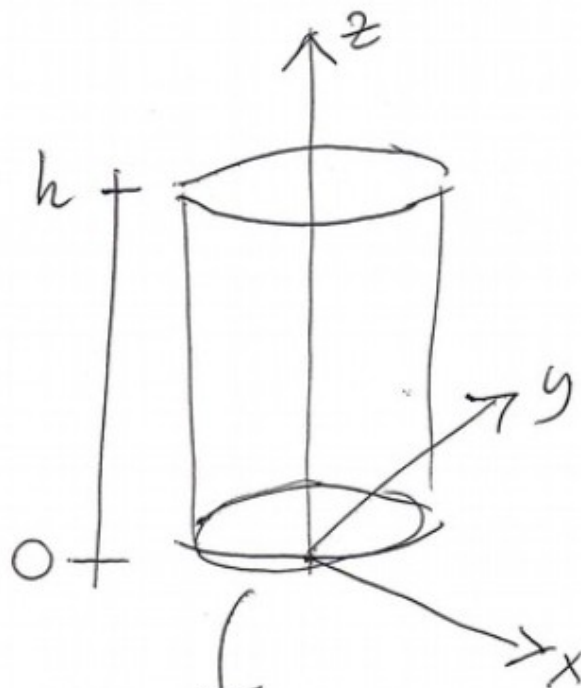
Esercizio 1

Un corpo di forma cilindrica ha raggio R ed altezza h . La massa non è omogeneamente distribuita, infatti la densità dipende dalla distanza dall'asse del cilindro secondo la legge $\rho(r) = \rho_0(1+r/R)$. Calcolare la massa M ed il momento d'inerzia I del corpo rispetto all'asse del cilindro.

$$M = \iiint \rho(x, y, z) dx dy dz$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^R \int_0^h \rho_0 \left(1 + \frac{r}{R}\right) r dz dr d\theta$$

$\uparrow$
r

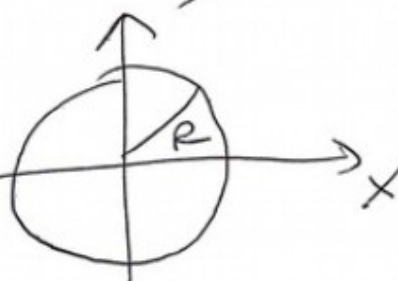


$$= \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \int_0^h dz \cdot \int_0^R \rho_0 \left(1 + \frac{r}{R}\right) r dr$$

$$= 2\pi h \rho_0 \left[\int_0^R r dr + \int_0^R \frac{r^2}{R} dr \right]$$

$\downarrow$

$$= 2\pi h \rho_0 \left[\frac{R^2}{2} + \frac{R^3}{3R} \right] = \frac{5}{3} \pi h \rho_0 R^2$$



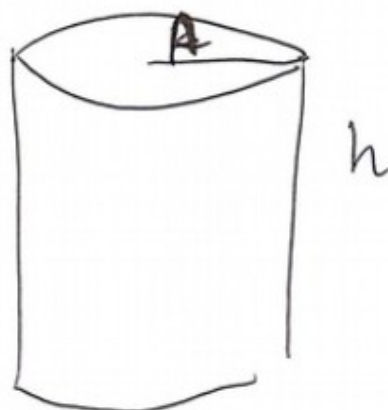
$$I = \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^R \rho_0 \left(1 + \frac{z}{R}\right) z^2 r dr d\theta dz$$

$$= \dots \frac{9}{10} \pi h \rho_0 R^4.$$

Estratto dall'esame di Fisica 2 del 9 Settembre 2016

Esercizio 1

Si ha una distribuzione di carica elettrostatica a simmetria cilindrica descritta $\forall r$ da $\rho(r) = \rho_0 \exp[-r^2/R^2]$, dove ρ_0 ed R sono due costanti positive assegnate mentre r è la generica distanza dall'asse di simmetria. Si ha inoltre una particella di massa m e carica $q_0 R^3$. La particella si muove verso l'asse di simmetria in direzione perpendicolare ad esso, essa attraversa l'asse della distribuzione per poi allontanarsene.



$$Q = \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^A \rho_0 e^{-\frac{r^2}{R^2}} r dr d\theta dz$$

$$= \int_0^h dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^A \rho_0 r e^{-\frac{r^2}{R^2}} dr$$

$$= 2\pi h \rho_0 \left(-\frac{R^2}{2} \right) \left(-\frac{2}{R^2} \right) \int_0^A r e^{-\frac{r^2}{R^2}} dr$$

$$= -\pi h \rho_0 R^2 \int_0^A \left(-\frac{2}{R^2} r \right) e^{-\frac{r^2}{R^2}} dr$$

$$\boxed{\int f' e^f = e^f}$$

$$= -\pi h \rho_0 R^2 \left[e^{-\frac{z^2}{R^2}} \right]_0^A$$

$$= \pi h \rho_0 R^2 \left(1 - e^{-\frac{A^2}{R^2}} \right).$$

Calcolo il campo elettrico a distanza A dall'asse usando il teorema di Gauss:

$$\underbrace{\oint (A)}_{\text{sup. laterale cilindro}} = \underbrace{2\pi Ah}_{\text{camp. elettrico in A}} \cdot \underbrace{E(A)}_{\text{camp. elettrico in A}} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow E(A) = \frac{\rho_0 R^2}{2A \epsilon_0} \left(1 - e^{-\frac{A^2}{R^2}} \right).$$

Coordinate sferiche

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \sin \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \varphi \end{cases} \quad \begin{aligned} r &\in [0; +\infty) \\ \varphi &\in [0; \pi] \\ \theta &\in [0; 2\pi] \end{aligned}$$

$$|\det J| = r^2 \sin \varphi$$

$$dx dy dz = r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\theta$$

Se ho simmetria sferica, allora

$$\rho(r, \theta, \varphi) = \rho(r).$$

$$\rho(r) = \frac{A r^5}{\cancel{r^5}}$$

Sfera di raggio R

$$M = \iiint \rho(x, y, z) dx dy dz$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^R \frac{A r^5}{\cancel{r^5}} r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\theta$$

$$\begin{aligned}
&= \left[\int_0^{2\pi} d\theta \right] \left[\int_0^{\pi} \sin \varphi d\varphi \right] \int_0^R \cancel{A} z^7 d\tau \\
&= 2\pi \left[-\cos \varphi \right]_0^{\pi} \left[\frac{A z^{+8}}{+8} \right]_0^R \\
&= 2\pi \left[-\cos \pi + \cos 0 \right] \left[\frac{A R^8}{8} \right] \\
&= \textcircled{4\pi} \left[\frac{A R^8}{8} \right]
\end{aligned}$$

$$\rho(r) = f$$

$$\begin{aligned}
M &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^R \rho z^2 \sin \varphi dr d\varphi d\theta \\
&= \left[\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \sin \varphi d\varphi \right] \int_0^R \rho z^2 d\tau \\
&= 4\pi \rho \frac{R^3}{3} = \rho \textcircled{\frac{4\pi R^3}{3}}
\end{aligned}$$



 Volume
 della sfera!

$$I = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^R r^2 \sin \varphi \rho(r) dr d\varphi d\theta$$

$$= 4\pi \int_0^R r^4 \rho(r) dr.$$

Se $\rho(r) = \rho$

$$= 4\pi \rho \frac{R^5}{5} = \frac{4\pi \rho R^5}{5}$$

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3$$

$$M = \rho V = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho$$

$$I = \left(\frac{4\pi}{3} \rho R^3 \right) \frac{R^2}{5} = \frac{4\pi \rho R^5}{15}$$

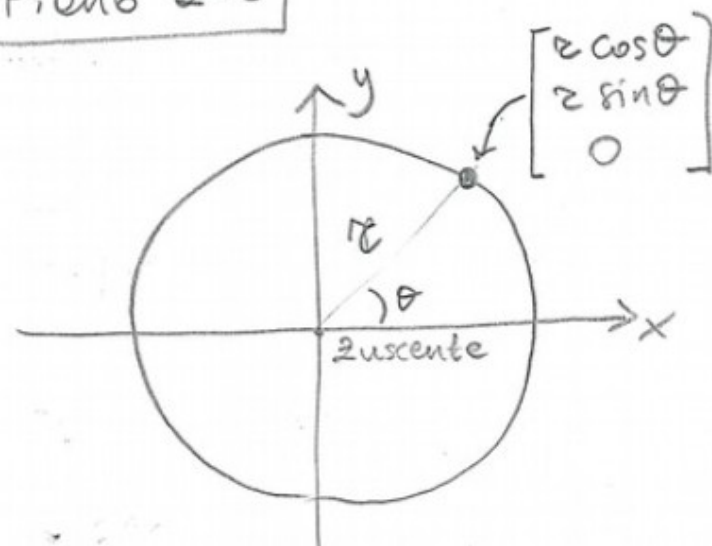
$$= \left[\frac{3}{5} M R^2 \right]$$

$$[I] = [Kg \cdot m^2]$$

Calcolo errato... infatti la distanza d tra ogni massa dm e l'asse di rotazione non è uguale a r^2 !...

Come visualizzare le coordinate sferiche!

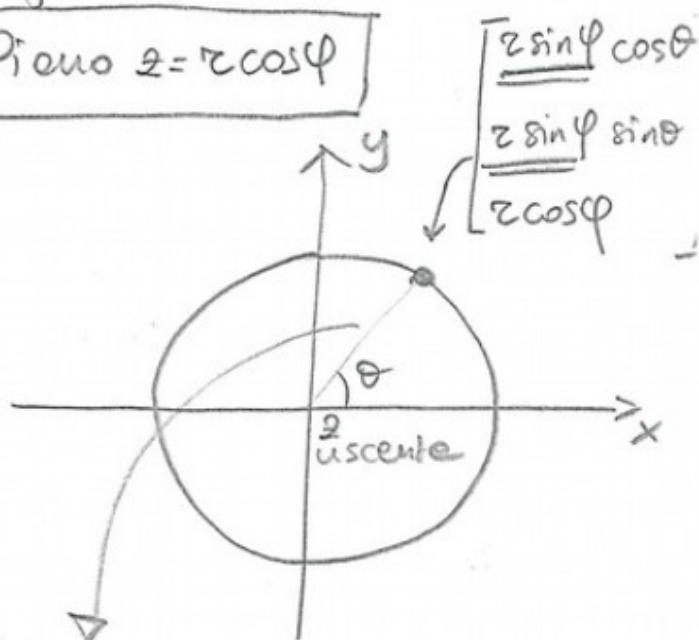
Piano $z=0$



In questo caso $\varphi = \frac{\pi}{2}$



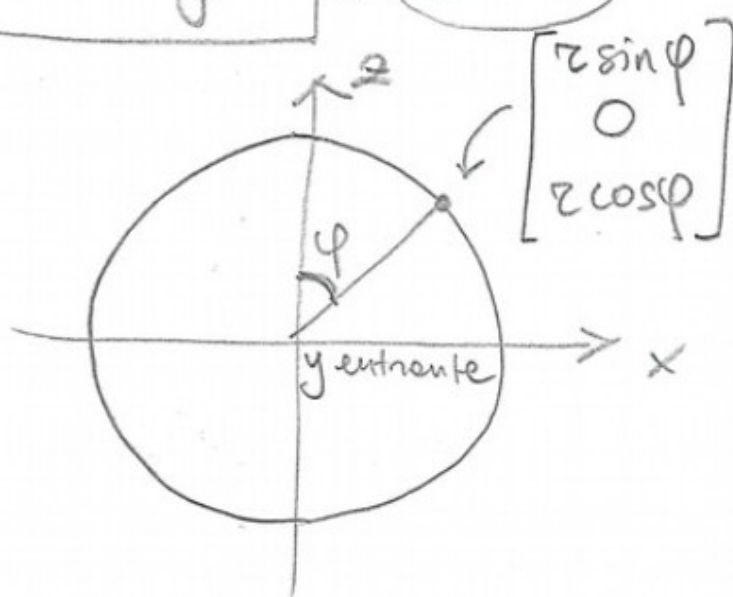
Piano $z=r \cos \varphi$



In questo caso, il raggio non è più r ma $r \sin \varphi$!

Questo raggio è massimo per $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

Piano $y=0 \Rightarrow \theta=0$



$\theta=0, \varphi=0$
POLO NORD

$\theta=0, \varphi=\pi$
POLO SUD

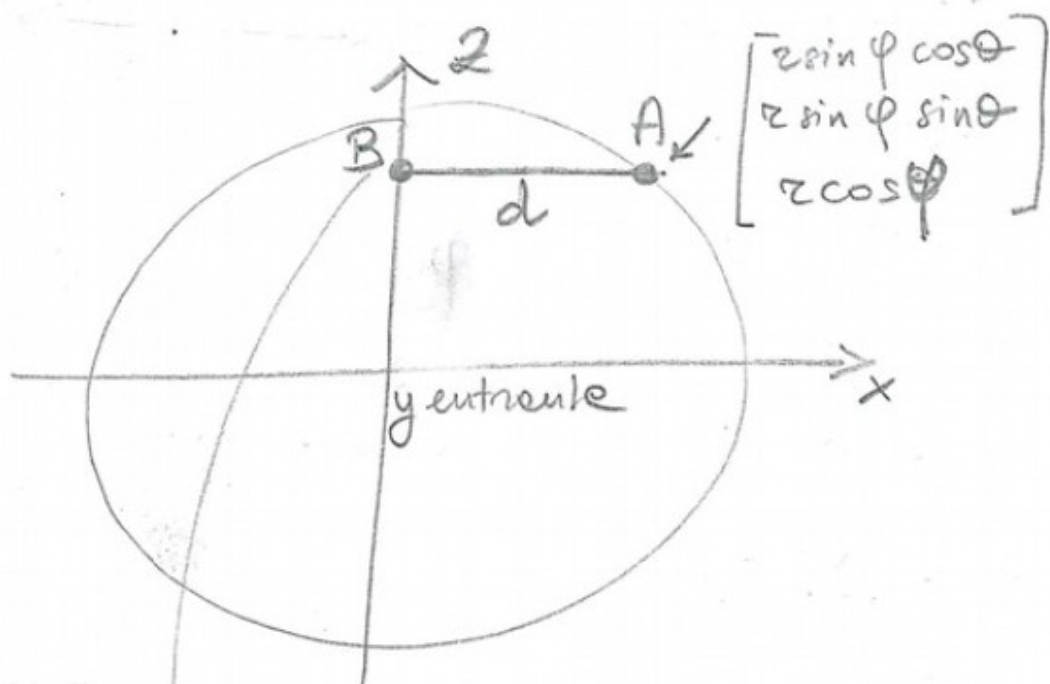
$\varphi = \frac{\pi}{2}$
EQUATORE

Da notare che l'angolo φ , detto anche colatitudine, è 0 sull'asse z ed è positivo allontanandoci dall'asse in senso orario!

Momento di inerzia di una sfera omogenea.

Asse di rotazione: asse z .

Quant'è d ? (distanze di ogni massa dall'asse)



d = distanze tra A e B

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ z \cos \varphi \end{bmatrix}$$

$$d = \sqrt{(A_x - B_x)^2 + (A_y - B_y)^2 + (A_z - B_z)^2} =$$

$$= \sqrt{z^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \theta + z^2 \sin^2 \varphi \sin^2 \theta + 0} =$$

$$= \sqrt{z^2 \sin^2 \varphi (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)} = \sqrt{z^2 \sin^2 \varphi} =$$

$$= z \sin \varphi!$$

$$I = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^R d^2\rho \, z^2 \sin\varphi \, dz d\varphi d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^R z^2 \sin^2\varphi \, \rho \, z^2 \sin\varphi \, dz d\varphi d\theta$$

$$= \rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \sin^3\varphi \, d\varphi \int_0^R z^4 \, dz$$

$$= \rho 2\pi \left(\int_0^{\pi} \sin^3\varphi \, d\varphi \right) \frac{R^5}{5} = \rho \frac{2\pi}{5} R^5 \int_0^{\pi} \sin^3\varphi \, d\varphi$$

$$\int_0^{\pi} \sin^3\varphi \, d\varphi = \int_0^{\pi} \sin\varphi \cdot \sin^2\varphi \, d\varphi = \int_0^{\pi} \sin\varphi (1 - \cos^2\varphi) \, d\varphi =$$

$$= \int_0^{\pi} \sin\varphi \, d\varphi + \int_0^{\pi} \underbrace{(-\sin\varphi) \cos^2\varphi \, d\varphi}$$

Questo integrale è
nello forma $\int f' f^n = \frac{f^{n+1}}{n+1}$

$$= \left[-\cos\varphi \right]_0^{\pi} + \left[\frac{\cos^3\varphi}{3} \right]_0^{\pi} =$$

$$= \cancel{1} - \cancel{(-1)}$$

$$= 1 + 1 + \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{3} \right) = \frac{4}{3}$$

Conclude as:

$$I = \rho \frac{2\pi R^5}{5} \int_0^\pi \sin^3 \varphi d\varphi = \rho \frac{2\pi R^5}{5} \cdot \frac{4}{3} =$$

$$= \frac{2}{5} \frac{4\pi R^3}{3} \rho R^2 =$$

$$= \frac{2}{5} V \rho R^2 = \frac{2}{5} M R^2.$$

Centro di massa

Se ho simmetria sferica, il centro di massa coincide sempre con il centro della sfera -

$$X_{CM} = \frac{1}{M} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^R (z \cos\theta \sin\varphi) \rho(r) r^2 \sin\varphi \, dr \, d\varphi \, d\theta$$

$\downarrow$
x

$$= \frac{1}{M} \int_0^{2\pi} \cos\theta \, d\theta \int_0^{\pi} \sin^2\varphi \, d\varphi \int_0^R r^3 \rho(r) \, dr.$$

$$\int_0^{2\pi} \cos\theta \, d\theta = \left[\sin\theta \right]_0^{2\pi} = 0 - 0 = 0$$

$$\Rightarrow X_{CM} = 0$$

Idem per $\boxed{y_{CM} = 0}$

$$\boxed{z_{CM} = 0}$$

$$z_{CM} = \frac{1}{M} \iiint z \rho(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$$

Esercizio 2

Si ha una distribuzione di carica a simmetria sferica centrata nell'origine di un sistema di assi cartesiani. Essa è descritta da $\rho(r)=\rho_0>0$ per $r<R$ e $\rho(r)=-\rho_0\exp(-r/R)$ per $r>R$. Si ha inoltre un campo magnetico omogeneo di intensità B_0 orientato lungo z . Una particella di massa M e carica negativa q compie orbite circolari di raggio $2R$ sul piano xy . Determinare i possibili periodi di rivoluzione. Confrontare i segni delle velocità corrispondenti ai vari possibili periodi individuati, discutendo il significato fisico di quanto emerge dal confronto.

Nella speranza di fare cosa utile, si riportano le primitive di alcune funzioni

$$\int e^x \exp(-x) dx = -e^{-x} \quad \int x \exp(-x) dx = -e^{-x}(x+1) \quad \int x^2 \exp(-x) dx = -e^{-x}(x^2+2x+2) \quad \int x^3 \exp(-x) dx = -e^{-x}(x^3+3x^2+6x+6)$$

$$\rho(r) = \begin{cases} \rho_0 & r < R \\ -\rho_0 e^{-\frac{r}{R}} & r > R \end{cases}$$

$$\int x^2 e^{-x} dx = -e^{-x}(x^2+2x+2)$$

$$Q(2R) = \iiint_{0 \leq r \leq 2R} \rho_0 r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\theta$$

$$+ \iiint_{r > R} (-\rho_0 e^{-\frac{r}{R}}) r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\theta$$

$$= \frac{4}{3} \pi R^3 \rho_0 + 4\pi \int_R^{2R} (-\rho_0 r^2 e^{-\frac{r}{R}}) dr$$

$$\int_R^{2R} r^2 e^{-\frac{r}{R}} dr$$

$$s = \frac{r}{R} \Rightarrow r = Rs$$

$$\Rightarrow dr = R ds$$

$$r=R \Rightarrow s=1$$

$$r=2R \Rightarrow s=2$$

$$\int_1^2 R^2 s^2 e^{-s} R ds = R^3 \int_1^2 s^2 e^{-s} ds$$

$$= R^3 \left[-e^{-s} (s^2 + 2s + 2) \right]_1^2$$

$$= R^3 \left[-e^{-2} 10 + e^{-1} 5 \right]$$

$$Q(2R) = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho_0 - 4\pi \rho_0 R^3 \left[-e^{-2} 10 + e^{-1} 5 \right]$$

$$= 4\pi R^3 \rho_0 \left[\frac{1}{3} - \frac{10}{e^2} + \frac{5}{e} \right]$$

Calcolo il campo elettrico a distanza $2R$ dal centro usando il teorema di Gauss:

$$\oint (2R) = \underbrace{4\pi (2R)^2}_{\text{superficie sfera}} \cdot E(2R) = \frac{Q(2R)}{\epsilon_0}$$

$$E(2R) = \frac{Q(2R)}{16\pi R^2 \epsilon_0} = \dots$$

Distribuzione sferica di carica discontinua in $r=0$:

$$\rho(r) = \frac{A}{r^k}$$

Carica contenuta in un'ipotetica sfera di raggio R :

$$\begin{aligned} Q(R) &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^R \frac{A}{r^k} r^2 \sin\varphi \, dr \, d\varphi \, d\theta = \\ &= 4\pi A \int_0^R r^{2-k} \, dr. \end{aligned}$$

Si ha che:

$$\int r^{2-k} \, dr = \begin{cases} \log|r| + c & \text{se } k=3 \\ \frac{r^{3-k}}{3-k} + c & \text{se } k \neq 3 \end{cases}$$

Tra queste funzioni, che è integrabile per $r=0$?

- $\log|r|$ non è integrabile.
- $\frac{r^{3-k}}{3-k}$ è integrabile se $3-k > 0 \Rightarrow k < 3$.

Quindi:

- per $k \geq 3$, le sfere di raggio R contiene carica infinita!
(situazione senza senso fisico)
- per $k < 3$, le sfere di raggio R contiene carica finita:

$$Q(R) = \frac{4\pi A}{3-k} R^{3-k}$$

Applico il Teorema di Gauss:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = 4\pi R^2 \cdot E(R) = \frac{Q(R)}{\epsilon_0}$$

↑ ↑
superficie campo
della sfera elettrico

$$E(R) = \frac{1}{4\pi R^2} \cdot \frac{4\pi A}{3-k} \frac{R^{3-k}}{\epsilon_0} = \frac{A}{\epsilon_0(3-k)} R^{3-k}.$$

Il campo $\vec{E}$ continuo per $R=0$?

$\vec{E}$ definito per $R=0$?

Valutiamo il comportamento di $E(R)$ per $R \rightarrow 0$.

Da notare che in tal maniera analizziamo solo il comportamento del modulo del campo.

La sua direzione invece $\vec{E}$ $\hat{r}$ è nota a causa della simmetria sferica del problema (direzione radiale).

$$\lim_{R \rightarrow 0} \frac{A}{\epsilon_0(3-k)} R^{1-k} = \begin{cases} 0 & \text{se } k < 1 \\ \frac{A}{\epsilon_0(3-k)} & \text{se } k = 1 \\ \infty & \text{se } k > 1 \end{cases}$$

Escludiamo ovviamente il caso $k > 1$.

Per $k < 1$ si ha che il campo è continuo ed è ben definito.

Per $k = 1$ si ha che il campo vale

$$\frac{A}{\epsilon_0(3-k)} \neq 0$$

~~Per la simmetria sferica il campo deve essere radiale~~

A causa della simmetria sferica però, il campo in $R=0$ non deve avere direzione, ~~Dunque~~ ovvero $\vec{E}(0) = (0, 0, 0)$.

Ma questo è in contraddizione con il ~~fatto che~~ abbiamo modulo del campo calcolato con il teorema di Gauss!

Possiamo quindi dire che il campo ha modulo continuo, ma direzione discontinua in $R=0$!