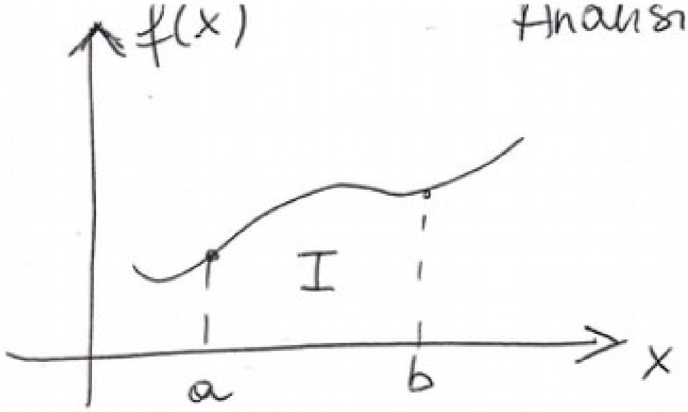
Corso di recupero di Fisica 2016/2017

Dario Madeo

Lezione del 07/04/2017

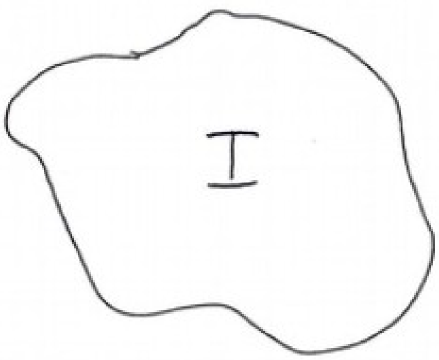
Slides disponibili all'indirizzo
http://www.dii.unisi.it/~madeo/crf/crf1617.html

Analisi 1



$$I = \int_a^b f(x)\,dx$$

Analisi 2



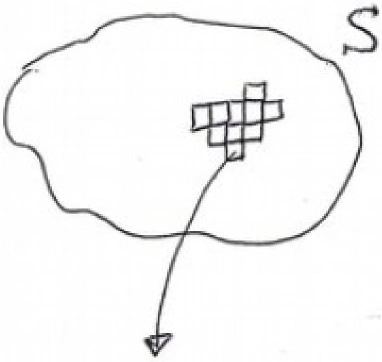
$$I = \iint_S dx\,dy$$

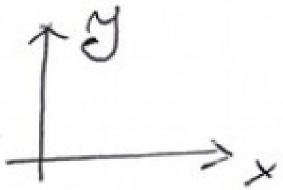
$S = \{ (x,y)$ che definiscono il mio insieme $\}$

Oggi vedremo come

- Calcolare aree di figure piane
- " massa di figure piane
- " carica di figure piane
- " momenti di inerzia di f.p.
- " centro di massa di f.p.

Aree





$$\boxed{A = \int dA} = \iint_S dx\,dy$$

dA: area di un quadratino

$$dA = dx\,dy$$

$\boxed{dA}$ dy

dx

Masse

Dist. piana di masse

$\sigma(x,y)$ $\left[\frac{kg}{m^2}\right]$

$\boxed{dA}$ Qual'è la massa di dA?

$$dm = \sigma(x,y)\,dx\,dy$$

$\left[kg = \frac{kg}{m^2}\, m \cdot m\right]$ ok

Cariche

Dist. piana di carica -

$\sigma(x,y)$ $\left[\frac{C}{m^2}\right]$

$\boxed{dA}$ Qual'è la carica di dA?

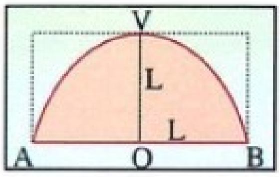
$$dq = \sigma(x,y)\,dx\,dy$$

$\left[C = \frac{C}{m^2} \cdot m \cdot m\right]$ ok

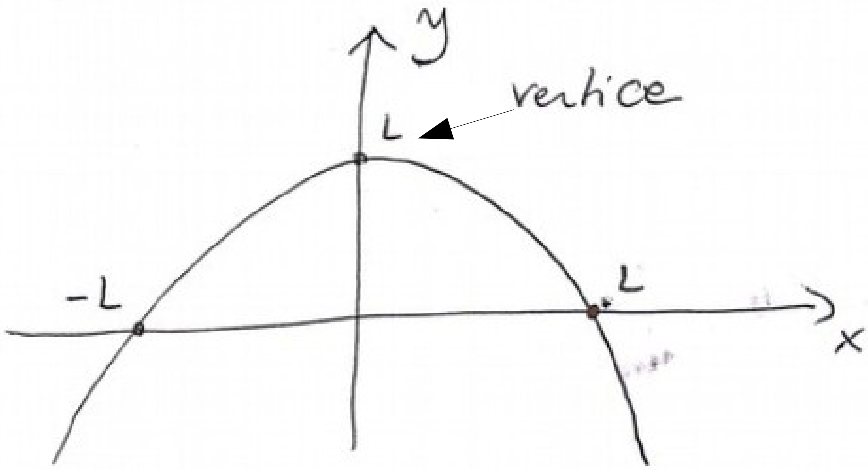
Estratto dall'esame di Fisica 1 del 22 Gennaio 2015

Esercizio 2

La figura mostra una porzione di lamiera omogenea (sia σ la sua densità superficiale) sagomata come un segmento di parabola di cui V è il vertice. O, che è un punto dell'asse, dista L da V, da A e da B. Questo oggetto è vincolato a ruotare intorno all'asse OV. Esso, è inizialmente fermo e viene sottoposto a un momento torcente $\tau(t)=\tau_0 \exp(t/T)$ nell'intervallo temporale $[0, T]$. Calcolare l'energia cinetica finale del corpo.



Come trovo l'area? Prima devo trovare l'equazione della parabola!



$$y(x) = ax^2 + bx + c \qquad y'(x) = 2ax + b$$

$$\begin{cases} y(L) = 0 \\ y(-L) = 0 \\ y(0) = L \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

(la derivata è nulla nel vertice della parabola, e il vertice si trova ad $x=0$)

$$\begin{cases} aL^2 + bL + c = 0 \\ aL^2 - bL + c = 0 \\ \boxed{\begin{matrix} c = L \\ b = 0 \end{matrix}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} aL^2 + L = 0 \\ aL^2 + L = 0 \\ c = L \\ b = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} a = -\frac{1}{L} \\ b = 0 \\ c = L \end{matrix}}$$

La porzione di piano di cui vogliamo calcolare l’area è compresa tra la parabola (in questo caso sempre positiva) e l’asse x. Quindi posso calcolare l’area integrando la parabola tra -L ed L (integrale semplice).

$$A = \int_{-L}^{L} \left(-\frac{1}{L} x^2 + L \right) dx =$$

$$\left[y(x) = -\frac{1}{L} x^2 + L \right]$$

$$= \left[-\frac{1}{L} \frac{x^3}{3} + Lx \right]_{-L}^{L} =$$

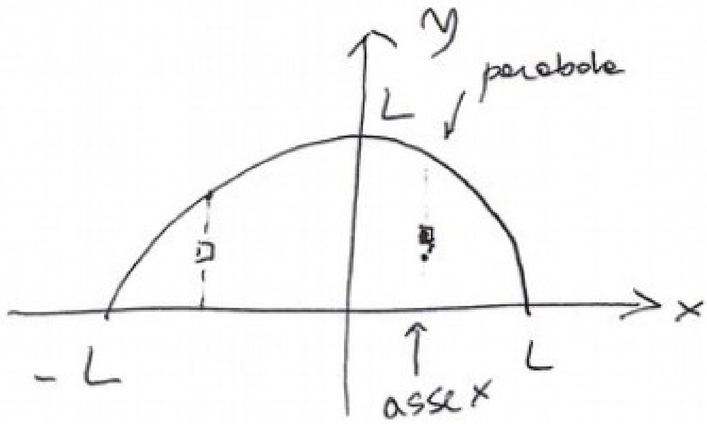
$$= \left[-\frac{1}{L} \frac{L^3}{3} + L^2 \right] - \left[-\frac{1}{L} \frac{(-L)^3}{3} + (-L)L \right]$$

$$= -\frac{L^2}{3} + L^2 - \frac{L^2}{3} + L^2 = L^2 \left(-\frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{3} + 1 \right) =$$

$$= L^2 \frac{4}{3}.$$

Integrali doppi

Devo descrivere l'insieme S di cui voglio conoscere l'area.



$$-L < x < L$$

$$0 < y < -\frac{1}{L}x^2 + L$$

$$S = \left\{ (x,y) : -L<x<L \wedge 0<y<-\frac{1}{L}x^2+L \right\}$$

$$A = \int_{-L}^{L} \left[\int_{0}^{-\frac{1}{L}x^2+L} 1 \cdot dy \right] dx$$

$$= \int_{-L}^{L} \left[y \right]_0^{-\frac{1}{L}x^2+L} dx$$

$$\boxed{= \int_{-L}^{L} \left(-\frac{1}{L}x^2+L \right) dx = \dots}$$

Integrando rispetto ad y, ottengo lo stesso integrale visto nella slide precedente!
...e ovviamente il risultato è lo stesso!

Ma se il risultato non cambia, perchè utilizzare gli integralli doppi piuttosto che quelli semplici?
Perchè spesso siamo interessati a calcolare grandezze (fisiche) di oggetti che non presentano proprietà (fisiche) omogenee, ma variano in ogni punto (x,y) dello spazio. Intuitivamente, se tali proprietà cambiano per ogni x e per ogni y, allora devo "integrare" sia lungo x che lungo y.
Ecco alcuni esempi di densità planare di massa (o carica):

$$\sigma(x,y) = 5xy^2 \qquad \sigma(x,y) = 5$$

$$\sigma(x,y) = 3e^{-x} \qquad \sigma(x,y) = |\cos(ky)|$$

Nel caso particolare (ma facilmente generalizzabile) dell'esercizio in esame, data una generica distribuzione di massa (o carica), posso calcolare la massa (o la carica) come segue:

$$M \text{ oppure } Q = \int_{-L}^{L}\int_{0}^{-\frac{1}{L}x^2+L} \sigma(x,y)\,dy\,dx$$

Se $\sigma(x,y) = \sigma(x)$

$$M \ (o\ Q) = \int_{-L}^{L}\int_{0}^{-\frac{1}{L}x^2+L} \sigma(x)\,dy\,dx =$$

$$= \int_{-L}^{L} \sigma(x) \int_{0}^{-\frac{1}{L}x^2+L} dy\,dx =$$

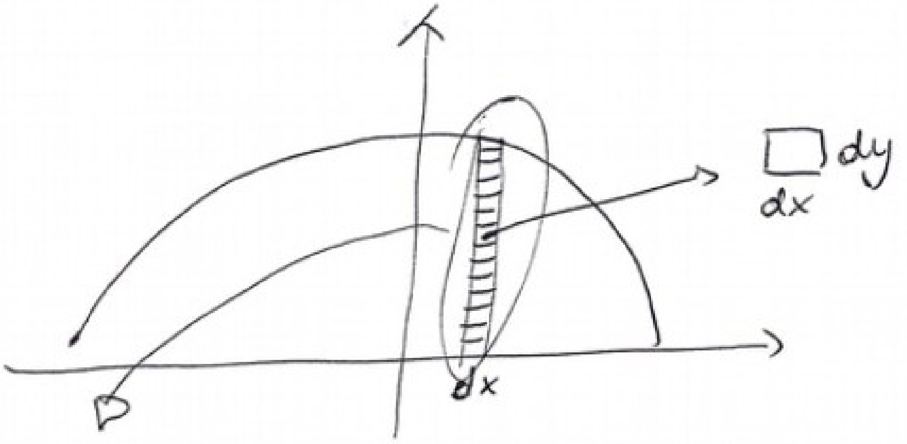
$$= \int_{-L}^{L} \sigma(x)\left(-\frac{1}{L}x^2+L\right)dx$$

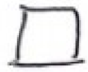
Se $\sigma(x,y)=\sigma$

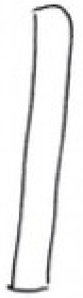
$$\underset{(\text{o } Q)}{M} = \sigma\int_{-L}^{L}\int_{0}^{-\frac{1}{L}x^2+L} dy\,dx = \sigma A$$

$\boxed{\text{Se } \sigma(x,y)=\sigma(x)}$

$$\underset{(\text{o } Q)}{M} = \int_{-L}^{L} \sigma(x)\left(-\frac{1}{L}x^2+L\right)dx$$



$dA = dx\,dy$ 

$dA = dx\cdot y$ 

$$\boxed{\underset{(dq)}{dm} = \sigma(x)\,dA = \sigma(x)\,y\,dx}$$

$y=-\frac{1}{L}x^2+L$

$$\underset{\text{o}\ dq}{dm} = \sigma(x)\left(-\frac{1}{L}x^2+L\right)dx$$

Momento di inerzia e centro di massa

$$I = \int d^2 \, dm$$

d: la distanza di una massa dm dall'asse di rotazione

$$x_{CM} = \frac{1}{M} \int x \, dm$$

$$y_{CM} = \frac{1}{M} \int y \, dm$$

$$dm = \sigma(x,y) \, dx \, dy$$

$$I = \iint d^2(x,y) \, \sigma(x,y) \, dx \, dy$$

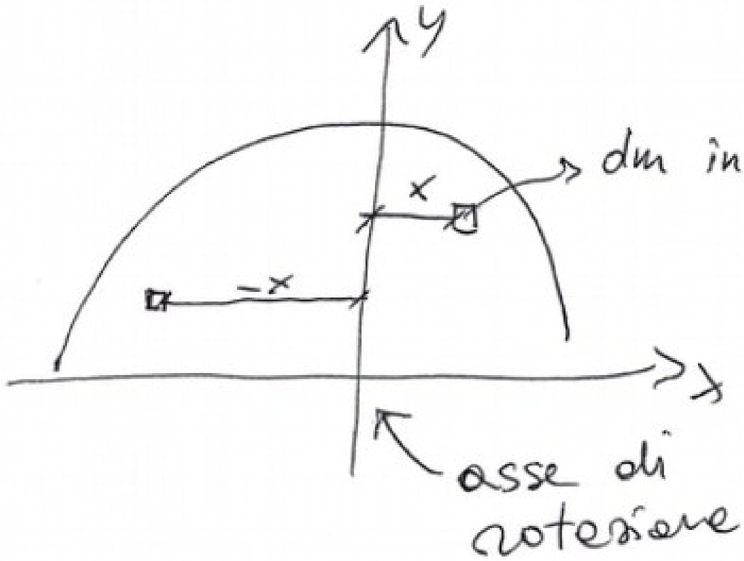
$$x_{CM} = \frac{1}{M} \iint x \, \sigma(x,y) \, dx \, dy$$

$$y_{CM} = \frac{1}{M} \iint y \, \sigma(x,y) \, dx \, dy$$

Nel caso particolare

$$x_{CM} = \frac{1}{M} \int_{-L}^{L} \int_{0}^{-\frac{1}{L}x^2+L} x\,\sigma(x,y)\,dy\,dx$$

$$y_{CM} = \frac{1}{M} \int_{-L}^{L} \int_{0}^{-\frac{1}{L}x^2+L} y\,\sigma(x,y)\,dy\,dx$$



$$d(x,y) = |x|$$

$$I = \int_{-L}^{L} \left(\int_{0}^{-\frac{1}{L}x^2+L} x^2\,\sigma(x,y)\,dy \right) dx .$$

Coordinate polari

Ho a che fare con cerchi

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} r > 0 \\ \theta \in [0; 2\pi] \end{array}}$$

Nota bene
Tali intervalli possono variare a seconda della geometria del problema (semicerchi, archi, anelli circolari...)

Come si passa da coordinate cartesiane a coordinate polari sotto il segno di integrale?

Matrice Jacobiana

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{bmatrix}$$

$$dA = dx\,dy = |\det J|\,dr\,d\theta$$

$$\det J = \cos\theta(r\cos\theta) - (-r\sin\theta)\sin\theta$$
$$= r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r.$$

$$|\det J| = |r| = r.$$

$$\boxed{dx\,dy = r\,dr\,d\theta}$$

Differenziali del cambio di variabili

$$\boxed{\begin{array}{l} dm = \sigma(r,\theta)\,r\,dr\,d\theta \\ \text{o} \\ dq \end{array}}$$

Differenziale della massa (o carica) espresso rispetto alle coordinate polari

Se $\sigma(r,\theta) = 1$ allora

$$\underset{Q}{\overset{M}{\circ}} = \iint_S 1 \, r \, dr \, d\theta = \iint_S dx\,dy = A$$

(occhio alle dimensioni!)

Considero un cerchio di raggio R

$$S = \{(r,\theta) : 0 < r < R, \ 0 < \theta < 2\pi\}$$

$$A = \int_0^{2\pi}\int_0^{R} r\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^R d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\frac{R^2}{2}\,d\theta = \left[\frac{R^2}{2}\theta\right]_0^{2\pi} = R^2\pi.$$

Simmetria radiale $\Rightarrow \sigma(r,\theta) = \sigma(r)$

$$\underset{Q}{\overset{M}{\circ}} = \iint \underline{\sigma(r)\,\cancel{d}}\, d\theta\, dr = \left[\int d\theta\right]\left[\int \sigma(r)\, r\, dr\right]$$

Se $0 < \theta < 2\pi$ allora $\boxed{\underset{Q}{\overset{M}{\circ}} = 2\pi\int\sigma(r)\,r\,dr}$

$\int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi$

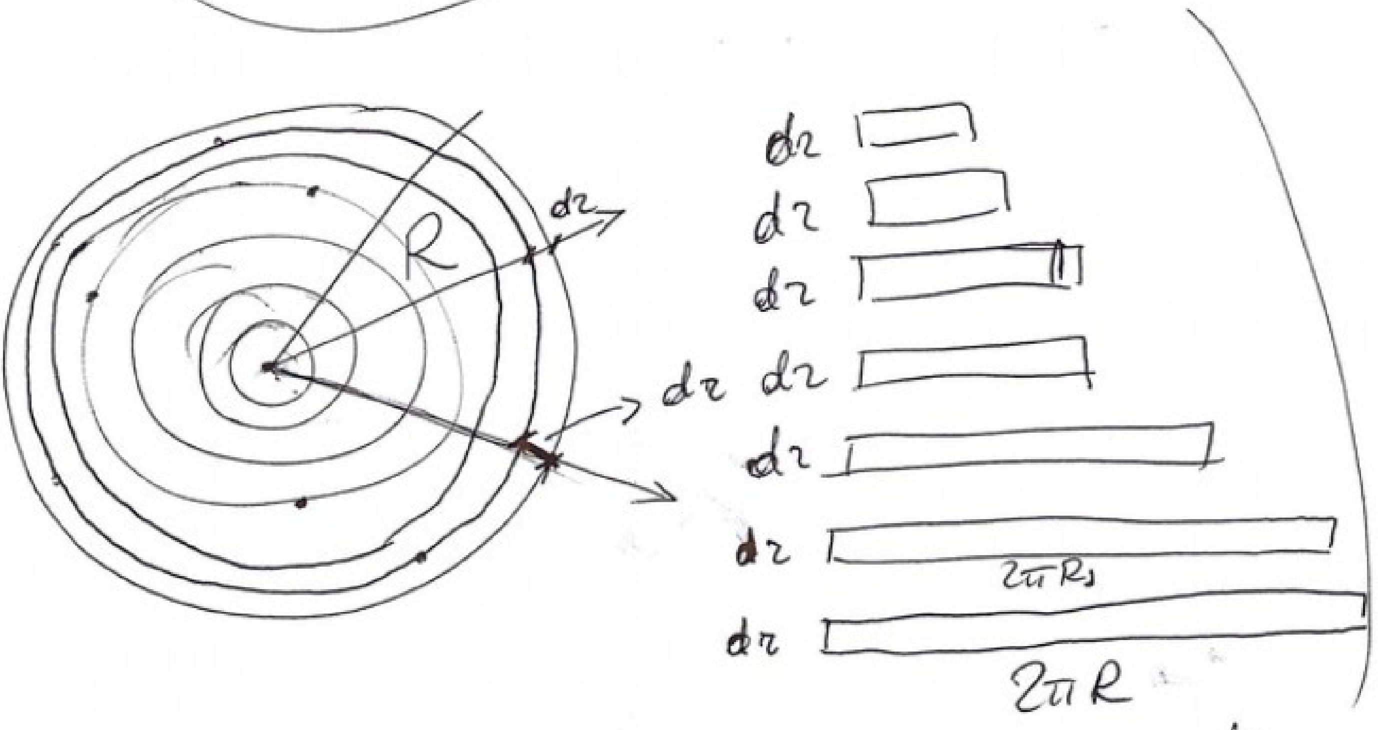
$$\overset{M}{\underset{Q}{\circ}} = \int_{\square} 2\pi\,\sigma(r)\, r \, dr$$

Supponiamo che $\sigma(r) = 1$

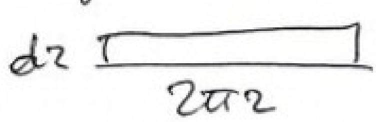
$$\overset{M}{\underset{Q}{\circ}} = \int_{\square} 2\pi r \, dr$$

Supponiamo sia un cerchio di raggio R

$$\overset{M}{\underset{Q}{\circ}} = \int_0^R 2\pi r \, dr = 2\pi \frac{r^2}{2}\Big|_0^R = \pi R^2.$$



In generale



$$A = \int (\text{aree dei rettangoli})$$

$$= \int_0^R 2\pi r \, dr$$

$$dx\,dy = r\,dr\,d\theta$$

$$I = \iint d^2(r,\theta)\,\sigma(r,\theta)\,r\,dr\,d\theta$$

$$x_{CM} = \frac{1}{M}\iint \underbrace{r\cos\theta}_{\equiv x}\,\sigma(r,\theta)\,r\,dr\,d\theta$$

$$y_{CM} = \frac{1}{M}\iint \underbrace{r\sin\theta}_{\equiv y}\,\sigma(r,\theta)\,r\,dr\,d\theta$$

— Vale anche <u>senza</u> simm. radiale —

Osservazione

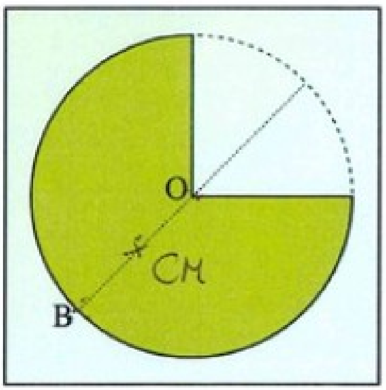
Se l’asse di rotazione passa per il centro della circonferenza ed è ortogonale al piano che contiene la circonferenza, allora:

$$\boxed{d^2(r,\theta) = r^2}$$

$$\Rightarrow I = \iint r^3\,\sigma(r,\theta)\,dr\,d\theta$$

Estratto dall'esame di Fisica 1 del 20 Novembre 2014

Esercizio 2
Da un disco omogeneo di massa M e raggio R viene staccato un settore circolare che sottende un angolo retto. Il corpo così ottenuto viene messo in oscillazione su un piano verticale, vincolandolo ad un asse liscio orizzontale che passa dall'intersezione fra bordo del disco e bisettrice del settore circolare (punto B).
a) Qual è la distanza d che separa O dal centro di massa del corpo?
b) Qual è il periodo delle piccole oscillazioni?



1) Uso le polari

2) Disco omogeneo $\Rightarrow \sigma(x,y) = \sigma(r,\theta) = \sigma$

$\Rightarrow$ σ costante è un caso particolare di $\sigma(r,\theta) = \sigma(r)$

$\Rightarrow$ Ho simm. radiale!

Massa $= M$

Area $= \pi R^2$

$\Rightarrow \sigma = \dfrac{M}{\pi R^2}$.

Massa $= \dfrac{3}{4} M$

Area $= \dfrac{3}{4} \pi R^2$

Calcolo il momento di inerzia rispetto all'asse che passa per il centro della circonferenza ed è ortogonale al piano che contiene la circonferenza.

$$S = \{(r,\theta) : 0 < r < R \wedge \frac{\pi}{2} < \theta < 2\pi\}$$

$$I_0 = \int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} \int_0^R \underbrace{d^2(r,\theta)}_{\Downarrow} \underbrace{\sigma\, r\, dr\, d\theta}_{dm}$$

distanza di un punto dall'asse di rotazione.

Poichè l'asse di rotazione passa per il centro della circonferenza ed è ortogonale al piano che contiene la circonferenza, allora:

$$d^2(r,\theta) = r^2$$

$$I_0 = \int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} \int_0^R \sigma\, r^3\, dr\, d\theta$$

$$= \sigma \int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} d\theta \cdot \int_0^R r^3\, dr$$

$$= \sigma\left(2\pi - \frac{\pi}{2}\right) \cdot \frac{R^4}{4} = \frac{M}{\cancel{\pi} \cancel{R^2}}\left(\frac{3}{2}\cancel{\pi}\right)\frac{R^{\cancel{4}\,2}}{4} = \frac{3}{8} MR^2$$

Calcoliamo ora il centro di massa dell'oggetto in esame:

$$x_{CM} = \frac{1}{M}\int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi}\int_{0}^{R} r\cos\theta\,\sigma\, r\,dr\,d\theta$$

$$= \frac{\sigma}{M}\int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi}\cos\theta\,d\theta \cdot \int_{0}^{R} r^2\,dr$$

$$= \frac{\sigma}{M}\left[\sin\theta\right]_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi}\frac{R^3}{3}$$

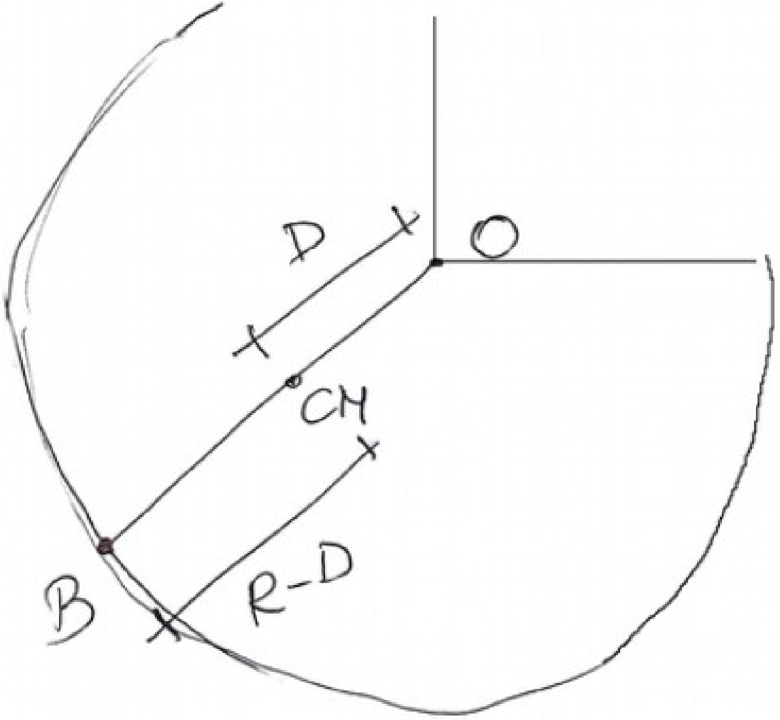
$$= \frac{\sigma R^3}{3M}\left[\cancelto{0}{\sin 2\pi} - \cancelto{1}{\sin\frac{\pi}{2}}\right] = -\frac{\sigma R^3}{3M}$$

$$y_{CM} = \frac{1}{M}\int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi}\int_{0}^{R} r\sin\theta\,\sigma\, r\,dr\,d\theta$$

$$= \frac{\sigma}{M}\int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi}\sin\theta\,d\theta \int_{0}^{R} r^2\,dr$$

$$= \frac{\sigma R^3}{3M}\left[-\cos\theta\right]_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} = \ldots = -\frac{\sigma R^3}{3M}$$

$$\sigma = \frac{M}{\pi R^2} \implies x_{CM} = y_{CM} = -\frac{4R}{9\pi}.$$



Usiamo opportunamente il Teorema di Huygens-Steiner (HS):

Noi conosciamo $I_O = \frac{3MR^2}{8}$

1) Th HS $I_O = I_{CM} + \frac{3}{4} M D^2$

$\Rightarrow \quad I_{CM} = I_O - \frac{3}{4} M D^2$

2) Th HS $I_B = I_{CM} + \frac{3}{4} M (R-D)^2$

$$I_B = I_O - \frac{3}{4} M D^2 + \frac{3}{4} M (R-D)^2$$

$$= \ldots$$

Errata corrige

Pagina 17 delle slide - per calcolare le coordinate del centro di massa, ho diviso l'integrale per la massa del corpo totale, cioè senza aver rimosso alcun pezzo. Tale massa è $\frac{3}{4}M$. Per cui:

$$x_{CM} = \frac{1}{M}\int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi}\int_{0}^{R} r\cos(\theta)\sigma r dr d\theta$$

diventa

$$x_{CM} = \frac{1}{\frac{3}{4}M}\int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi}\int_{0}^{R} r\cos(\theta)\sigma r dr d\theta =$$
$$= \frac{4}{3M}\int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi}\int_{0}^{R} r\cos(\theta)\sigma r dr d\theta = \ldots = -\frac{4R}{9\pi}.$$

Notare che, nonostante l'errore durante il calcolo, il risultato riportato al termine della slide 17 è corretto.

Lo stesso discorso vale per quanto riguarda il calcolo di y_{CM}.