Corso di recupero di Fisica 2016/2017

Dario Madeo

Lezione del 31/03/2017

Slides disponibili all'indirizzo
http://www.dii.unisi.it/~madeo/crf/crf1617.html

Estratto dall'esame di Fisica 2 del 18 Novembre 2016

Esercizio 1

Si ha una distribuzione di carica elettrostatica a simmetria cilindrica descritta da $\forall r$ da $\rho(r)=A/r$, dove r è la generica distanza dall'asse di simmetria (asse z), ed A è una costante positiva assegnata.

a) Determinare il campo elettrostatico generato dalla distribuzione.

b) Esistono discontinuità, massimi, o punti di singolarità del campo elettrico? Se sì, a quale r?

Si ha una particella di massa m e carica negativa q e si vuole farla muovere lungo un'orbita elicoidale di raggio R e passo h=R/2.

c) Descrivere la velocità che deve avere la particella a t=0, supponendo che a tale istante essa si trovi nel punto di coordinate (R,0,0).

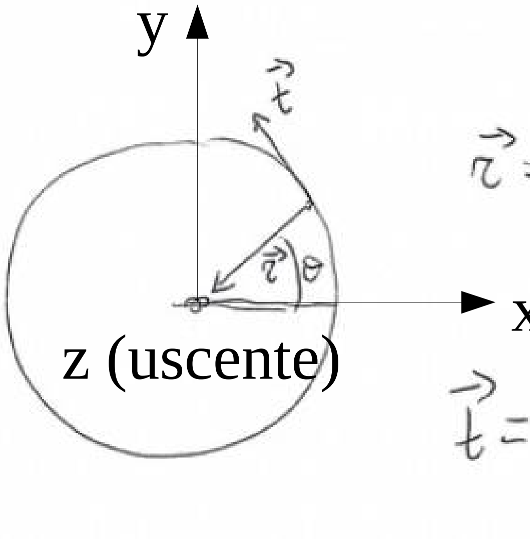
Per r > 0, il campo elettrico e la forza che agiscono sulla particella sono i seguenti (assumiamoli come dati del problema):

$$\vec{E} = \frac{A}{\varepsilon_0}\begin{bmatrix}\cos\theta \\ \sin\theta \\ 0\end{bmatrix} \qquad \vec{F} = q\vec{E}$$

$$A>0, \quad \varepsilon_0>0, \quad q<0$$

$$\vec{F} = \underbrace{\frac{qA}{\varepsilon_0}}_{<0}\begin{bmatrix}\cos\theta \\ \sin\theta \\ 0\end{bmatrix} = \underbrace{\left(-\frac{qA}{\varepsilon_0}\right)}_{>0}\begin{bmatrix}-\cos\theta \\ -\sin\theta \\ 0\end{bmatrix}$$

Riscrivo la forza in modo tale che sia diretta verso l'asse z, quindi con verso positivo lungo la direzione radiale. La forza quindi è centripeta!



$$\vec{r} = \begin{bmatrix}-\cos\theta \\ -\sin\theta \\ 0\end{bmatrix}$$

$$\vec{t} = \begin{bmatrix}-\sin\theta \\ \cos\theta \\ 0\end{bmatrix}$$

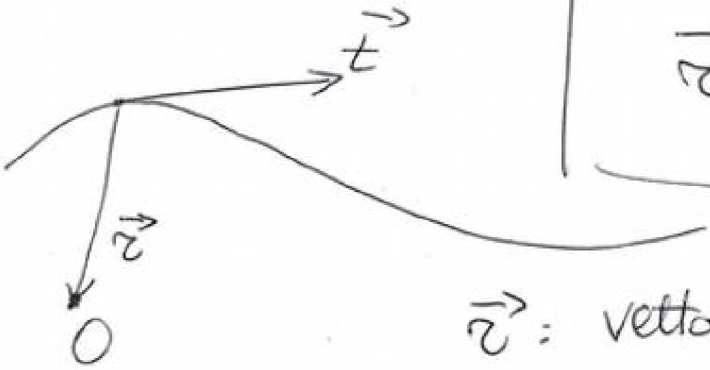
Il moto rotatorio avviene su piani paralleli a xy. Per questo la componente z dei versori radiale e tangenziale non conta (almeno per quanto riguarda il moto rotatorio) e può essere posta pari a 0.

Nota teorica

Il fatto che $\vec{\tau}$ e $\vec{t}$ siano ortogonali è una prerogativa del moto circolare

In generale,

$$\vec{\tau} \cdot \vec{t} \neq 0$$



$\vec{\tau}$: vettore che punta verso il centro di rotazione

$\vec{t}$: vettore tangente alla traiettoria.

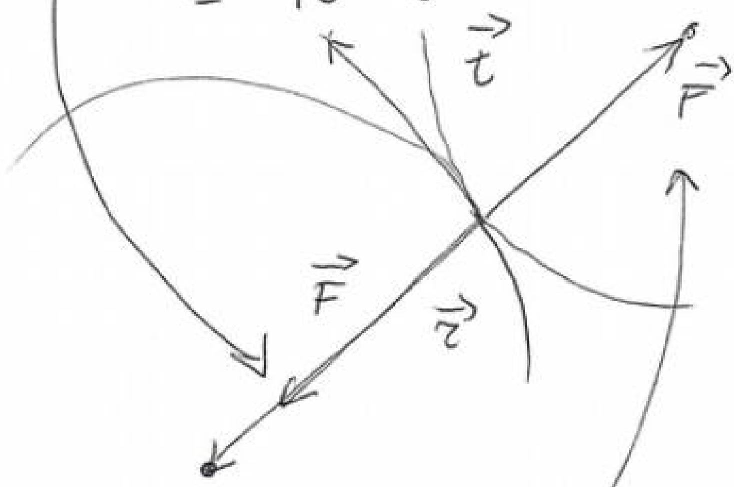
$$\vec{F} = -\frac{qA}{\varepsilon_0}\vec{r} \Rightarrow \vec{F} \text{ è una forza centripeta}$$

Alcune considerazioni sul verso della forza:

ES $\quad \frac{qA}{\varepsilon_0} = -10N$

$$\vec{F} = -(-10)\vec{r} = 10\vec{r}$$

In questo caso (coerente con i dati del problema), la forza punta verso l'asse z. Dunque, è centripeta rispetto all'asse z, il quale rappresenta l'asse di rotazione.



$\frac{qA}{\varepsilon_0} = 10N$

$$\underline{\vec{F} = -10\vec{r}}$$

In quest'altro caso, la forza non punta verso l'asse z. Se ci fosse ancora moto rotatorio, allora l'asse di rotazione non potrebbe più essere l'asse z, ma una retta parallela all'asse z verso la quale punta la forza ad ogni istante.

Com'è fatta la velocità?

1) Sul piano xy è in direzione tangenziale
2) Lungo z si deve muovere di moto rettilineo uniforme

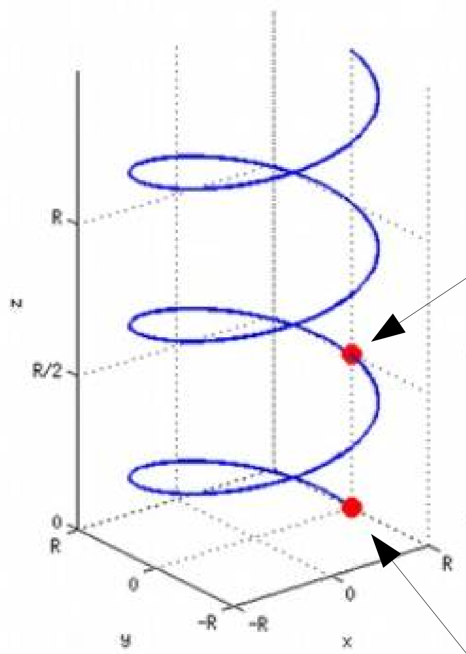
$$\vec{v} = \begin{bmatrix} +v_t\,(-\sin\theta) \\ v_t\,(\cos\theta) \\ v_z \end{bmatrix} = \underbrace{v_t\,\vec{t}}_{\text{Velocità tangenziale dei moti di rotazione}} + \overbrace{v_z\,\vec{z}}^{\text{moto rett. uniforme.}}$$

Nei moti circolari:

$$\frac{v_t^2}{R} = \frac{F}{m} \Rightarrow \frac{v_t^2}{R} = \frac{-qA}{\varepsilon_0 \cancel{R} m}$$

$$v_t = \sqrt{\frac{-qAR}{\varepsilon_0 m}}$$

Passo orbita elicoidale



Posizione della particella dopo un periodo (t = T)

$$\text{passo} = \frac{R}{2}$$

(calc.)

Posizione iniziale della particella (t = 0)

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi R}{V_t} \qquad \left(\omega = \frac{V_t}{R}\right)$$

$$= \frac{2\pi R}{\sqrt{\frac{-qAR}{\varepsilon_0 m}}} = 2\pi R \sqrt{-\frac{\varepsilon_0 m}{qAR}}$$

Lungo z, in un tempo T, la particella sale di $\frac{R}{2}$ (passo)

Essendo il moto lungo z rettilineo ed uniforme, allora

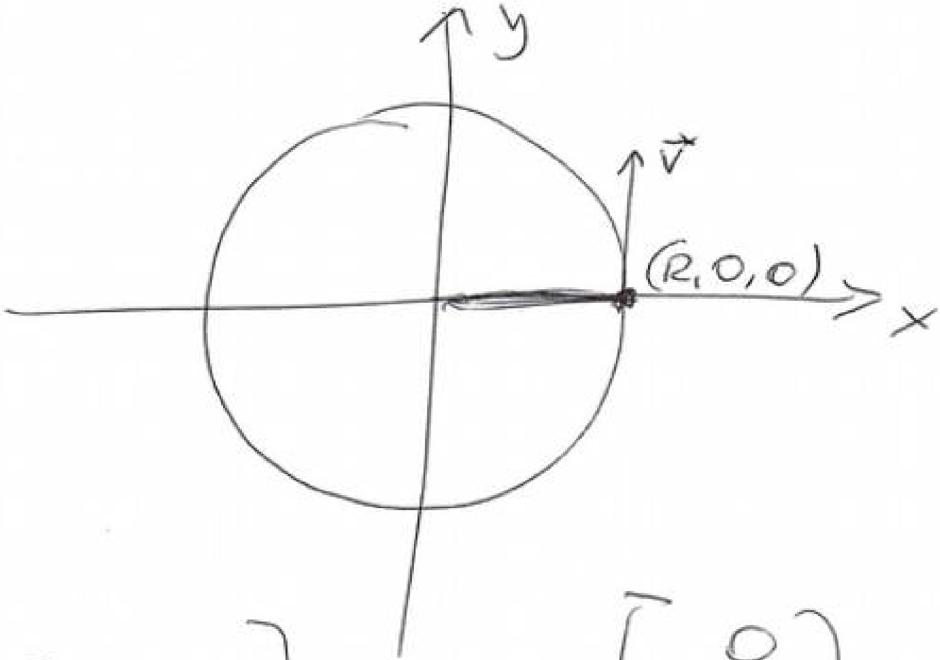
$$V_z = \frac{\frac{R}{2}}{T} = \frac{\frac{R}{2}}{2\pi R \sqrt{-\frac{\varepsilon_0 m}{qAR}}} =$$

$$= \frac{1}{4\pi} \sqrt{-\frac{qAR}{\varepsilon_0 m}}.$$

Riassumendo:

$$\vec{V} = \begin{bmatrix} V_t(-\sin\theta) \\ V_t(\cos\theta) \\ V_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{-qAR}{\varepsilon_0 m}}\,(-\sin\theta) \\ \sqrt{\frac{-qAR}{\varepsilon_0 m}}\,(\cos\theta) \\ \sqrt{\frac{-qAR}{\varepsilon_0 m}} \cdot \frac{1}{4\pi} \end{bmatrix}$$

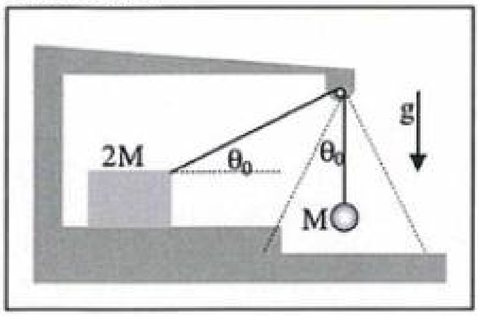
Il punto $(R,0,0)$ è caratterizzato da $\theta=0$!



$$\vec{v}(\theta=0)=\begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{\frac{-qAR}{\varepsilon_0 m}} \\ \sqrt{\frac{-qAR}{\varepsilon_0 m}}\,\frac{1}{4\pi} \end{bmatrix}=\sqrt{\frac{-qAR}{\varepsilon_0 m}}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{1}{4\pi} \end{bmatrix}.$$

Estratto dall'esame di Fisica 1 del 17 Settembre 2015

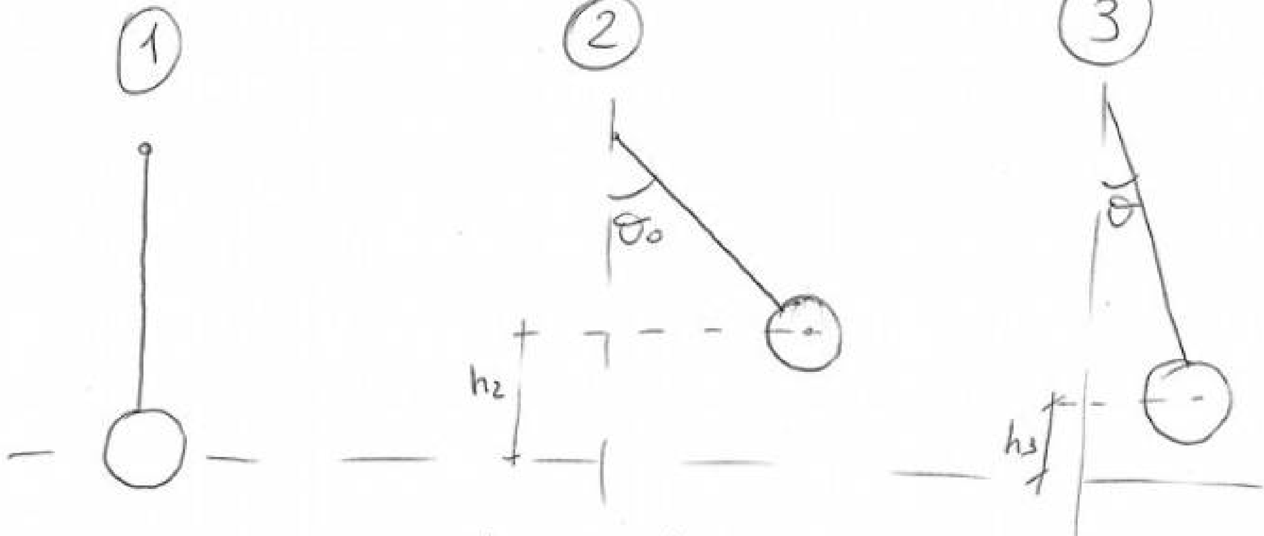
Esercizio 1



La figura mostra un piano orizzontale scabro su cui poggia un corpo di massa 2M che è connesso, tramite un filo ideale rinviato da una minuscola carrucola priva di attriti, ad un corpo sospeso di massa M. Il tratto di filo obliquo forma un angolo θ_0 con l'orizzontale. Il corpo sospeso compie oscillazioni di semiampiezza θ_0. Per quali valori del coefficiente d'attrito radente statico μ_S il corpo appoggiato resta fermo? Si supponga che esso resti effettivamente fermo. Quanto è intensa la reazione sull'asse della carrucola, quando il pendolo è alla massima elongazione verso destra e verso sinistra?

Calcoliamo la tensione del filo per ogni angolo θ usando la legge di conservazione dell'energia meccanica:

$$T(\theta) = M\left(\frac{V_t^2}{R} + g\cos\theta\right)$$



$U_1 = 0$ $\qquad$ $U_2 = Mgh_2$ $\qquad$ $U_3 = Mgh_3$

$K_1 = \frac{1}{2}MV_t^2(0)$ $\qquad$ $K_2 = 0$ $\qquad$ $K_3 = \frac{1}{2}MV_t^2(\theta)$

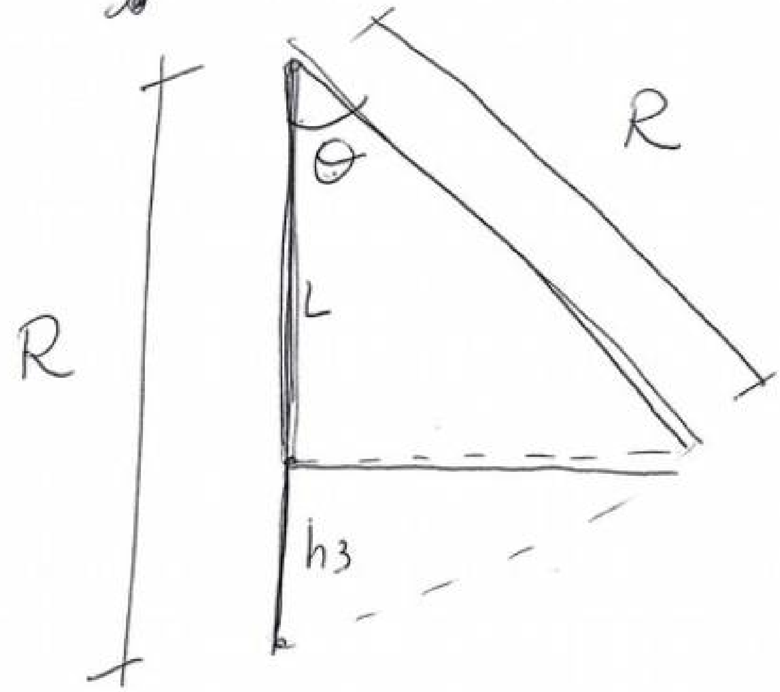
$$U_1 + K_1 = U_2 + K_2 = U_3 + K_3$$

Perchè posso usate la legge della conservazione dell'energia meccanica (CEM) se è presente una forza di attrito? Ecco due risposte.

Risposta 1. Perchè l'attrito (che agisce sul corpo di massa 2M) non sta compiendo lavoro! Infatti, il corpo di massa 2M è fermo (dato del problema).

Risposta 2. Perchè l'unica forza che agisce su M compiendo lavoro è quella tangenziale, che dipende solo dalla forza di gravità, la quale è conservativa (la forza centripeta non compie lavoro, vedi slide successive).

Quanto valgono h_2 e h_3?



$$L = R\cos\theta$$

$$R = L + h_3$$

$$\Rightarrow h_3 = R - L = R(1-\cos\theta).$$

$$h_2 = h_3(\theta = \theta_0) = R(1-\cos\theta_0).$$

<u>Uso</u> $$U_2 + K_2 = U_3 + K_3$$

$$\cancel{M}g h_2 + 0 = \cancel{M}g h_3 + \frac{1}{2}\cancel{M} v_t^2(\theta)$$

$$v_t^2(\theta) = 2g(h_2 - h_3)$$

$$v_t(\theta) = \sqrt{2gR(\cos\theta - \cos\theta_0)}$$

$$T(\theta) = M\left(\frac{V_t^2(\theta)}{R} + g\cos\theta\right)$$

$$= M\left(\frac{2g\cancel{R}(\cos\theta - \cos\theta_0)}{\cancel{R}} + g\cos\theta\right)$$

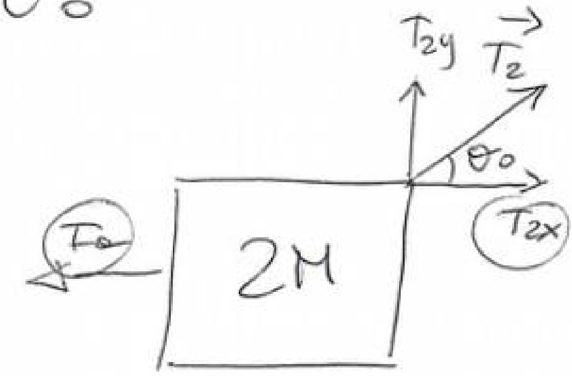
$$= Mg\left(2\cos\theta - 2\cos\theta_0 + \cos\theta\right)$$

$$= Mg\left(3\cos\theta - 2\cos\theta_0\right).$$

$$F_a = \mu_s N = \mu_s\left[Mg - T(\theta)\sin\theta_0\right]$$

$$T_{2x} = T(\theta)\cos\theta_0$$

$$F_a > T_{2x}$$



....

$$F_a > \max T_{2x}$$

$$\max T_{2x} = \max T(\theta)\cos\theta_0$$

$$= \max Mg\left(3\cos\theta - 2\cos\theta_0\right)\cos\theta_0$$

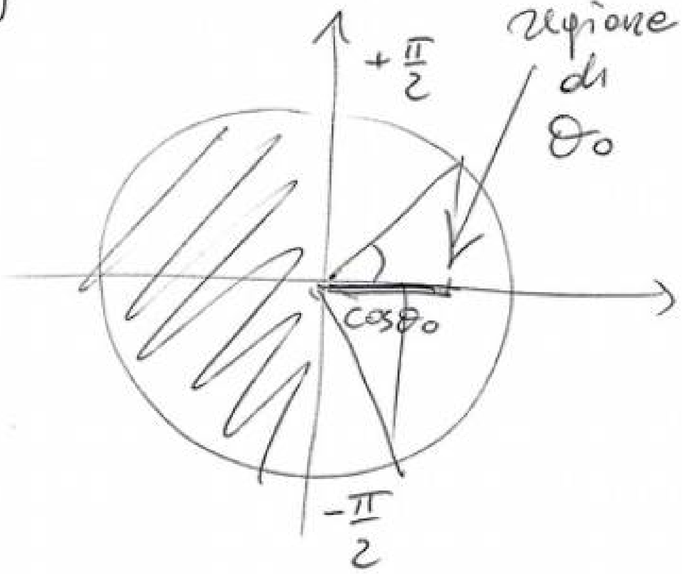
$$\frac{\partial T_{2x}}{\partial \theta} = -3Mg\cos\theta_0 \sin\theta .$$

$$\frac{\partial T_{2x}}{\partial \theta} = 0 \quad \Rightarrow \quad \sin\theta = 0$$

$$\theta = 0$$

$$\frac{\partial^2 T_{2x}}{\partial \theta^2} = -3Mg\cos\theta_0 \cos\theta$$

$$\left.\frac{\partial^2 T_{2x}}{\partial \theta^2}\right|_{\theta=0} = -3Mg\cos\theta_0 < 0$$



$\Rightarrow$ In $\theta = 0$, T_{2x} assume valore massimo!

$$T_{2x}(\theta=0) = T(0)\cos\theta_0 =$$
$$= Mg\,(3 - 2\cos\theta_0)\cos\theta_0 .$$

Tensione massima

$$F_a > \max T_{2x}$$

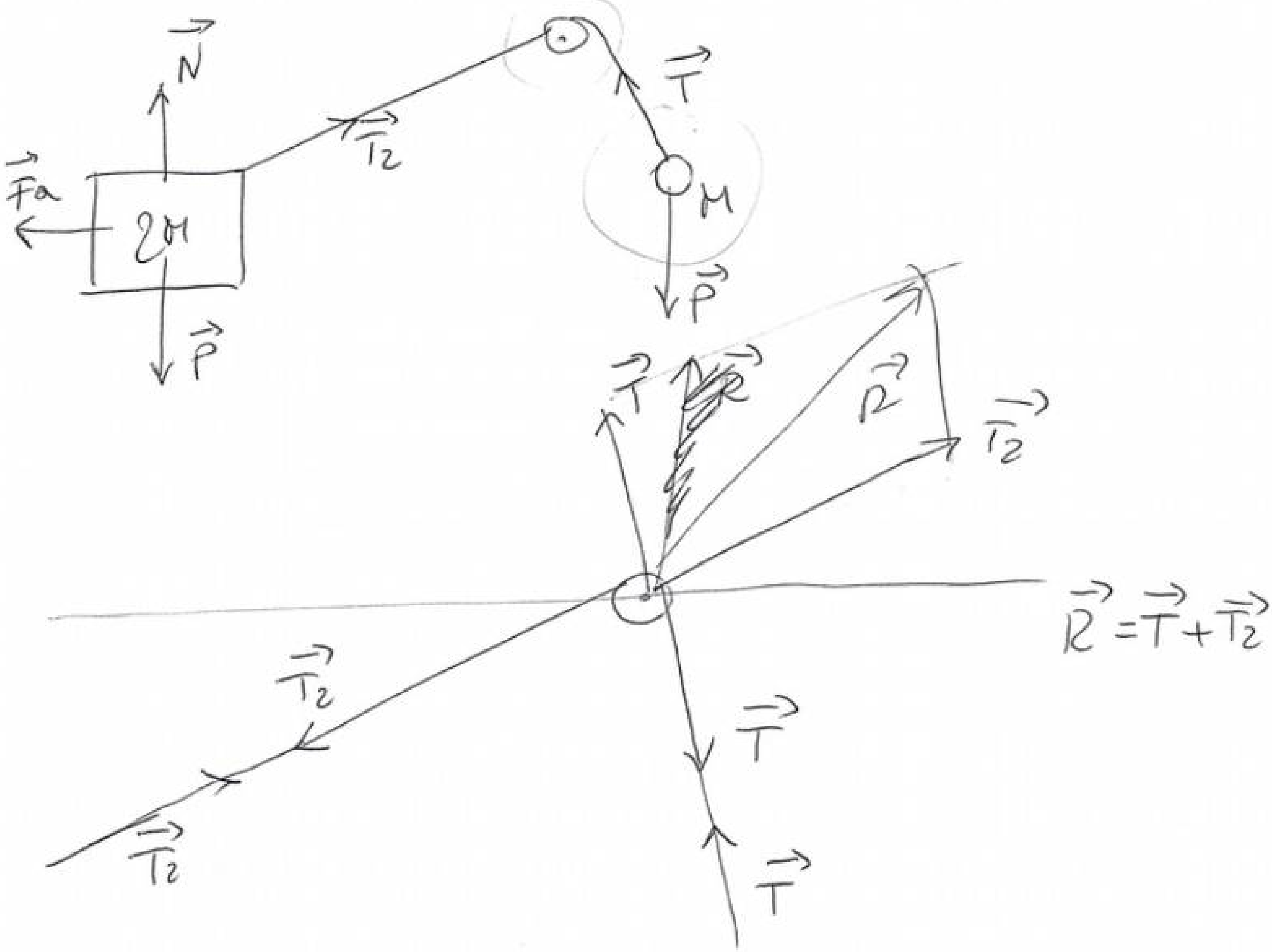
$$F_a > Mg(3-2\cos\theta_0)\cos\theta_0$$

$$\mu_s [Mg - \underbrace{T(\theta)}_{(\theta=0)} \sin\theta_0] > Mg(3-2\cos\theta_0)\cos\theta_0$$

$$\mu_s [\cancel{Mg} - \cancel{Mg}(3-2\cos\theta_0)\sin\theta_0] > \cancel{Mg}(3-2\cos\theta_0)\cos\theta_0$$

$$\mu_s > \frac{(3-2\cos\theta_0)\cos\theta_0}{1-3\sin\theta_0+2\sin\theta_0\cos\theta_0}.$$

Reazione sull'asse della carrucola



Estratto dall'esame di Fisica 1 del 3 Settembre 2015

Esercizio 1

Un corpo puntiforme di massa M è vincolato a muoversi su una guida circolare liscia di raggio R e centro O giacente su un piano cartesiano xOy. Oltre che alla reazione del vincolo, il corpo è sottoposto a una forza esterna **F** così definita: **F**=(F_x, F_y), con $F_x \equiv 0$ e $F_y = \alpha x$, essendo α una costante assegnata. Inizialmente il corpo è fermo in posizione $\underline{\mathbf{S}}_0$=(R, 0).

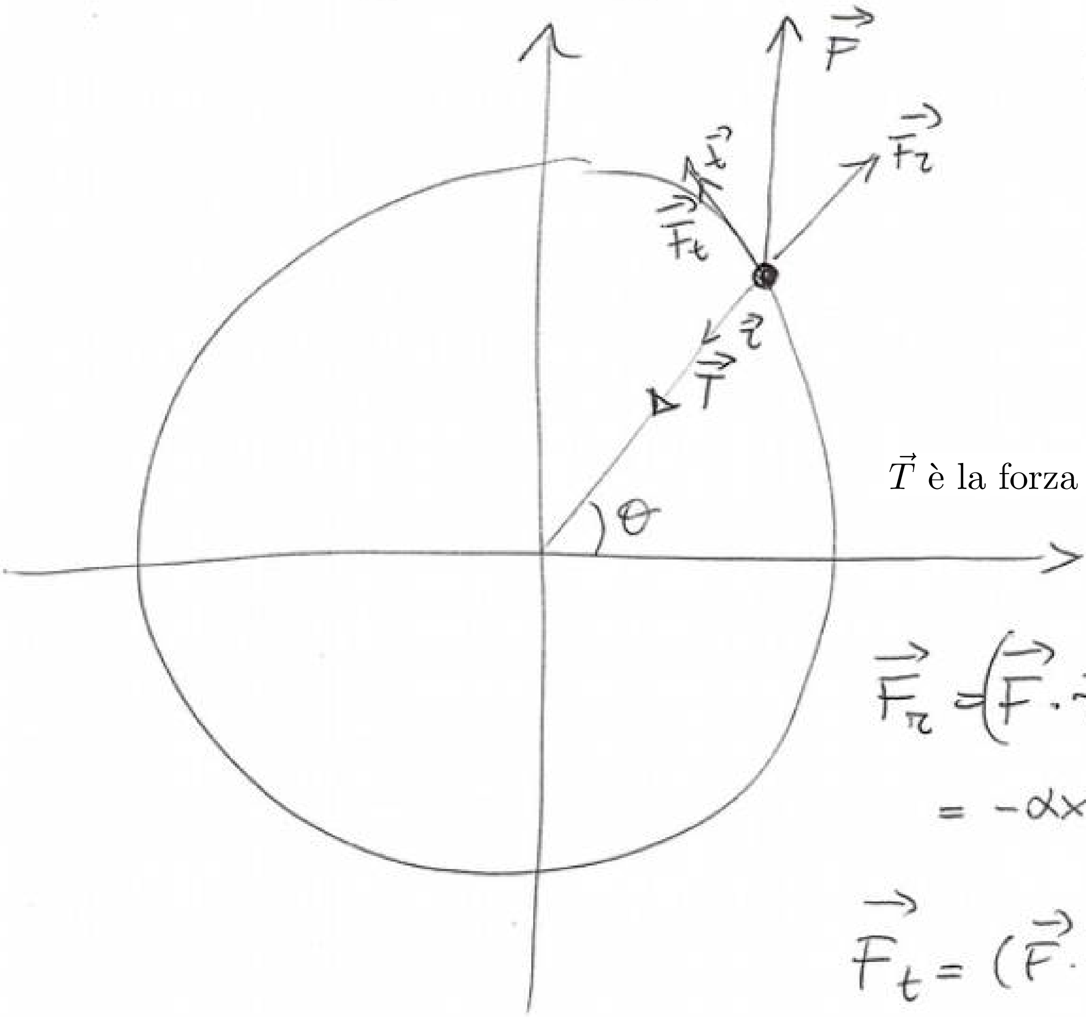
a) Determinare l'accelerazione tangenziale del corpo quando esso è in posizione R(cosθ, sinθ), con θ generico.

b) Calcolare la velocità che ha il corpo la prima volta che esso torna a passare da $\underline{\mathbf{S}}_0$.

c) Calcolare il modulo dell'accelerazione del corpo all'istante di tale passaggio.

d) Discutere le proprietà di conservatività o meno della forza **F**.

$$\vec{F} = \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha x \end{bmatrix} \qquad \alpha > 0$$



$$\vec{r} = \begin{bmatrix} -\cos\theta \\ -\sin\theta \end{bmatrix}$$

$$\vec{t} = \begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix}$$

$\vec{T}$ è la forza di reazione della guida

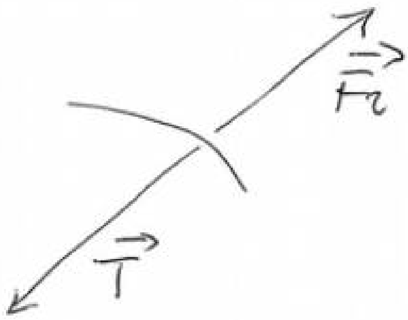
$$\vec{F_r} = (\vec{F} \cdot \vec{r})\vec{r} = -\alpha x \sin\theta \, \vec{r}$$

$$\vec{F_t} = (\vec{F} \cdot \vec{t})\vec{t} = \alpha x \cos\theta \, \vec{t}$$

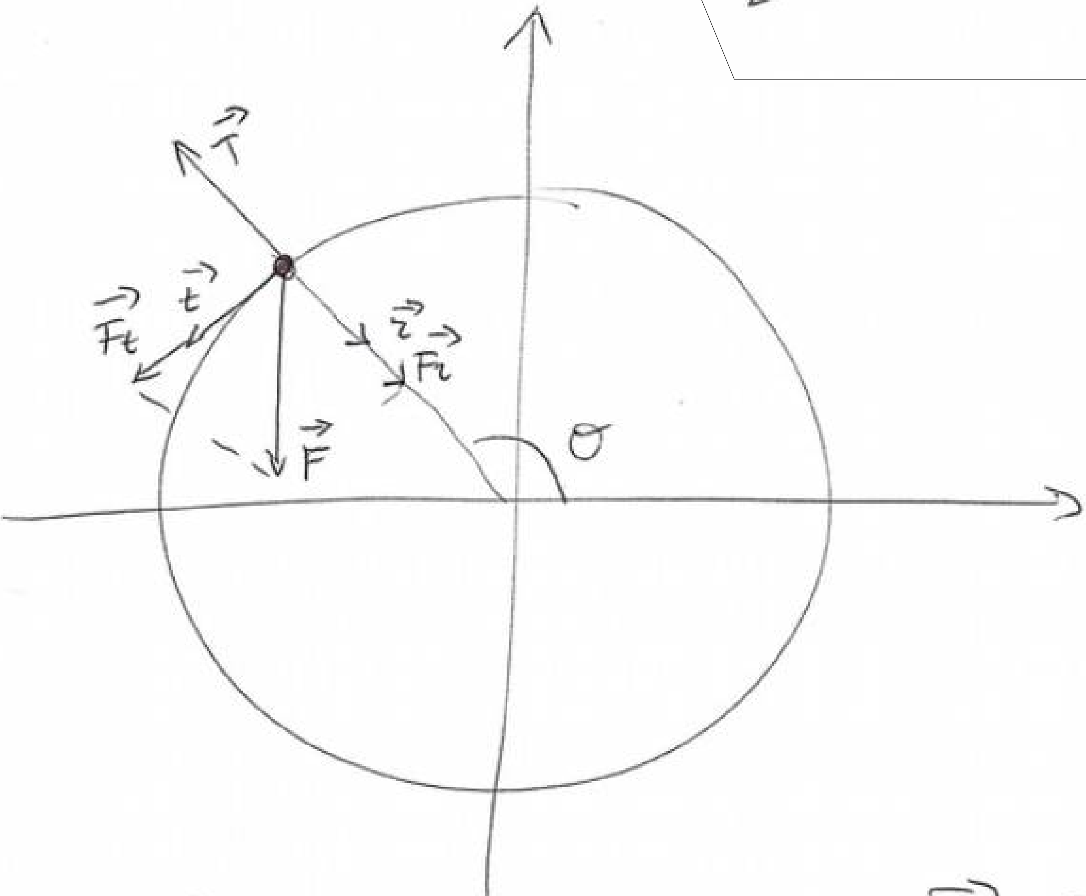
Chi agisce radialmente?

$\vec{F_r}$ e $\vec{T}$

Ho forza centripeta se $\vec{T}$ è più forte di $\vec{F_r}$!



Se ci spostiamo nel secondo quadrante...



Ho forza centripeta se $\vec{F_r}$ è più forte di $\vec{T}$.

Esercizio per casa: cosa succede nel terzo e quarto quadrante?

1) Quant'è l'acc. tangenziale?

$$\vec{F_t} = \alpha x \cos\theta \, \vec{t}$$

$$\vec{a_t} = \frac{\alpha x \cos\theta}{M} \vec{t}$$

$$\begin{cases} x = R\cos\theta \\ y = R\sin\theta \end{cases} \Rightarrow \vec{a_t} = \frac{\alpha R \cos^2\theta}{M} \vec{t}$$

---

4) $\vec{F}$ è conservativa?

No!

$$\vec{F} = \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha x \end{bmatrix}$$

$$U(x,y) \; : \; \vec{F} = -\nabla U$$

$$\begin{cases} 0 = -\frac{\partial U}{\partial x} \\ \alpha x = -\frac{\partial U}{\partial y} \end{cases}$$

$$U = \alpha x y + c(x) \qquad \frac{\partial U}{\partial y} = \alpha x + 0 = \alpha x$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \alpha y + \frac{\partial c}{\partial x} \neq 0 \Rightarrow$$ Non è conservativa!

2) Quanto vale v_t dopo un giro?

<u>Th. delle forze vive</u>

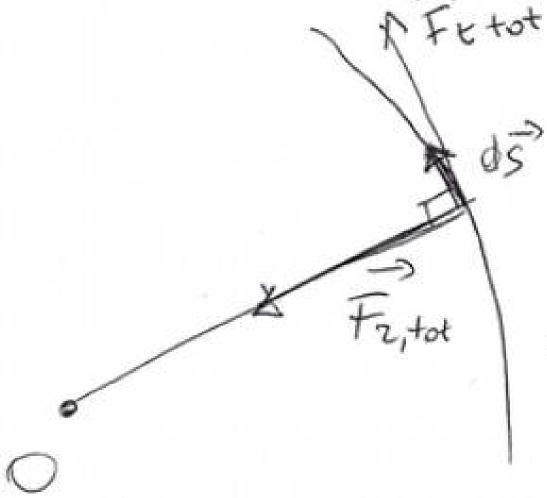
$$K_f - K_i = L$$

$$\frac{1}{2} M v_t^2 - 0 = L$$

$$v_t = \sqrt{\frac{2L}{M}}$$

$$L = \oint \vec{F}_{TOT} \cdot d\vec{s}$$

<u>Importante</u> Nel moto circolare lavora solo la parte tangenziale!



$$\vec{F}_{TOT} \cdot d\vec{s} =$$

$$= (\vec{F}_{tTOT} + \vec{F}_{rTOT}) \cdot d\vec{s}$$

$$= \vec{F}_{tTOT} \cdot d\vec{s} + \cancel{\vec{F}_{rTOT} \cdot d\vec{s}}$$

$$= \vec{F}_{tTOT} \cdot d\vec{s}$$

$$= F_{tTOT} \cdot ds .$$

$$F_{t\,TOT} = \alpha R \cos^2\theta$$

$$L = \oint \alpha R \cos^2\theta \, ds$$

$$ds = R\,d\theta$$

$$L = \int_0^{2\pi} \alpha R \cos^2\theta \, R \, d\theta$$

$$= \alpha R^2 \int_0^{2\pi} \cos^2\theta \, d\theta$$

$$\left[\int \cos^2\theta \, d\theta = \frac{2\theta + \sin 2\theta}{4} + c \right]$$

$$= \dots$$

$$= \alpha R^2 \pi .$$

$$V_t = \sqrt{\frac{2L}{M}} = \sqrt{\frac{2\alpha R^2 \pi}{M}}$$

Dopo 2 giri

$$K_f - K_i = L$$

$$\frac{1}{2} M V_t^2(2) - \frac{1}{2} M V_t^2(1) = \alpha R^2 \pi$$

$$\frac{1}{2} M V_t^2(2) - \cancel{\frac{1}{2}} \cancel{M} \frac{\cancel{2}\alpha R^2 \pi}{\cancel{M}} = \alpha R^2 \pi$$

$$\frac{1}{2} M V_t^2(2) = 2\alpha R^2 \pi$$

$$V_t(2) = \sqrt{\frac{4\alpha R^2 \pi}{M}}$$