Corso di recupero di Fisica 2016/2017

Dario Madeo

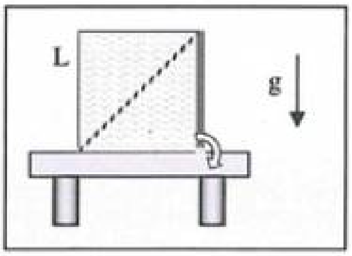
Lezione del 24/03/2017

Slides disponibili all'indirizzo http://www.dii.unisi.it/~madeo/crf/crf1617.html

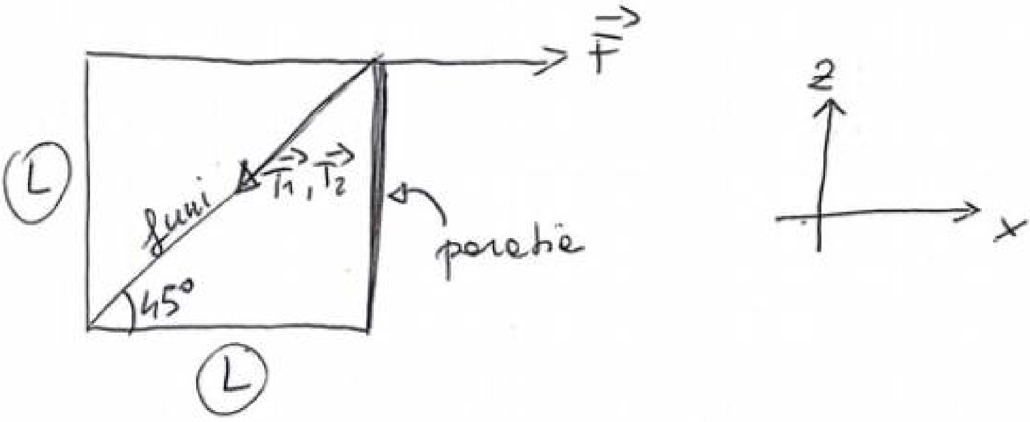
Estratto dall'esame di Fisica 1 del 26 Settembre 2016

Esercizio 3

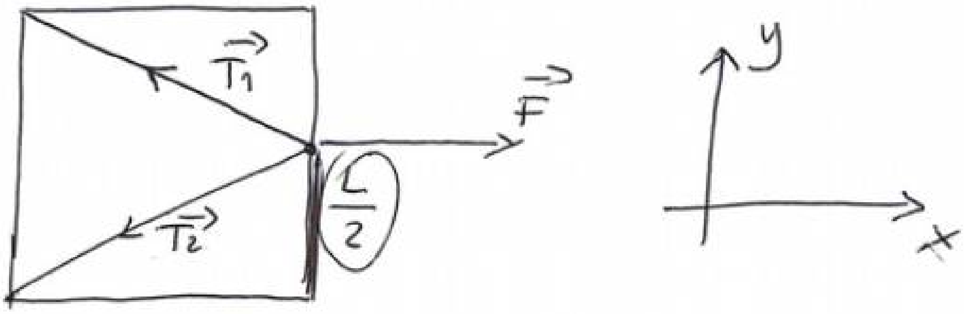
Un recipiente cubico di lato L superiormente aperto poggia su un piano orizzontale. Una delle facce laterali del recipiente è una paratia che può ruotare intorno ad uno spigolo di base. Tale paratia viene tenuta in posizione mediante due corde connesse al centro del suo lato superiore e agli estremi dello spigolo opposto. Calcolare la tensione delle corde quando il recipiente è pieno di liquido di densità ρ. [Suggerimento: disegnare il sistema anche da altri punti di vista.]



LATO



ALTO



$$\begin{cases} |T_{1x}| = 2\,|T_{1y}| = |T_{1z}| \\ |T_{2x}| = 2\,|T_{2y}| = |T_{2z}| \end{cases}$$

Ottenute usando le proporzioni

$$\vec{T_1} = \begin{bmatrix} T_{1x} \\ T_{1y} \\ T_{1z} \end{bmatrix} \qquad \vec{T_2} = \begin{bmatrix} T_{2x} \\ T_{2y} \\ T_{2z} \end{bmatrix}$$

Simmetria

* $T_{1x} = T_{2x} < 0$
* $T_{1z} = T_{2z} < 0$
* $T_{2y} = -T_{1y}$ $T_{1y} > 0, T_{2y} < 0$

Statica

* $F_x + T_{1x} + T_{2x} = 0$

1) $T_{1x} = T_{2x} \Rightarrow F_x + 2T_{1x} = 0$

$$\boxed{T_{1x} = -\frac{F_x}{2}}$$

$T_{1x} < 0$. Infatti $F_x > 0$.

$$\boxed{T_{2x} = -\frac{F_x}{2}}$$

2) $|T_{1x}| = 2|T_{1y}| \Rightarrow \frac{F_x}{2} = 2|T_{1y}|$

$$|T_{1y}| = \frac{F_x}{4}$$

$T_{1y} > 0 \Rightarrow \boxed{T_{1y} = \frac{F_x}{4}} \quad \boxed{T_{2y} = -\frac{F_x}{4}}$

3) $|T_{1x}| = |T_{1z}|$

$$|T_{1z}| = \frac{F_x}{2}$$

$$T_{1z} < 0 \implies \boxed{T_{1z} = -\frac{F_x}{2}}$$

$$\boxed{T_{2z} = -\frac{F_x}{2}}$$

$$\vec{T_1} = \begin{bmatrix} -\frac{F_x}{2} \\ \frac{F_x}{4} \\ -\frac{F_x}{2} \end{bmatrix} \qquad \vec{T_2} = \begin{bmatrix} -\frac{F_x}{2} \\ -\frac{F_x}{4} \\ -\frac{F_x}{2} \end{bmatrix}.$$

Proiezioni ortogonali

Dati $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$, allora

$$\vec{p} = \left(\frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{\vec{y} \cdot \vec{y}} \right) \vec{y}$$

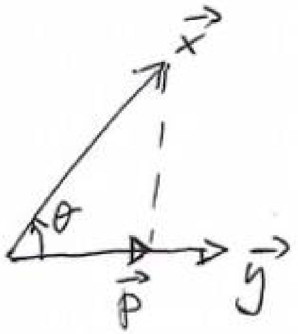
proiezione ortogonale di $\vec{x}$ lungo $\vec{y}$.

Nota $\vec{y} \cdot \vec{y} = |\vec{y}| \cdot |\vec{y}| \cos 0 = |\vec{y}|^2$

Nota Se $\vec{y}$ è un versore $(|\vec{y}| = 1)$, allora

$$\boxed{\vec{p} = (\vec{x} \cdot \vec{y}) \vec{y}}$$

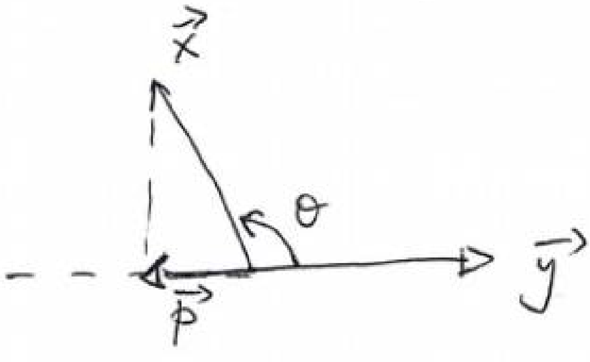
In $\mathbb{R}^2$



$0 < \theta < 90°$

$$\vec{p} = \underbrace{|\vec{x}| \cos\theta}_{\text{modulo e verso}} \; \vec{y}$$

$\vec{y}$: direzione

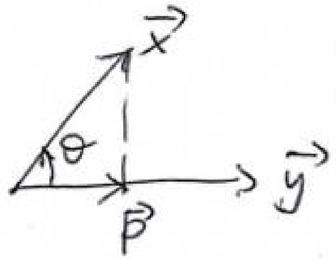


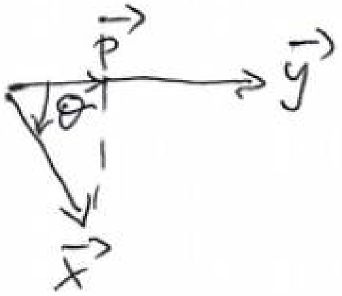
$90° < \theta < 180°$

$\Rightarrow \cos\theta < 0$

$$\vec{p} = \underbrace{|\vec{x}| \cos\theta}_{<0} \; \vec{y}$$

Riassumendo:
Il modulo della proiezione è: $|\vec{x}||\cos(\theta)|$
Il verso è dato dal segno di $\cos(\theta)$





$$-90° < \theta < 0°$$

$$\cos(-\theta) = \cos(\theta)$$

Risultato teorico

Sono in $\mathbb{R}^2$. Prendo 2 versori $\vec{r}$ e $\vec{t}$, ortogonali fra loro, allora qualunque vettore $\vec{v}$ si può scrivere come

$$\boxed{\vec{v} = \vec{v_r} + \vec{v_t}}$$

dove $\vec{v_r}$ è la P.O. di $\vec{v}$ su $\vec{r}$
e $\vec{v_t}$ è la P.O. di $\vec{v}$ su $\vec{t}$.

Nota

$$\left.\begin{array}{l} |\vec{r}| = 1 \\ |\vec{t}| = 1 \end{array}\right\} \text{versori}$$

$$\vec{r} \cdot \vec{t} = 0 \quad \text{ortogonalità}$$

Esempio banale

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \vec{t} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{V_r} = (\vec{v} \cdot \vec{r})\,\vec{r}$$

$$= (V_x \cdot 1 + V_y \cdot 0)\,\vec{r} = V_x \vec{r} = \begin{bmatrix} V_x \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{V_t} = (\vec{v} \cdot \vec{t})\,\vec{t}$$

$$= (V_x \cdot 0 + V_y \cdot 1)\,\vec{t} = V_y \vec{t} = \begin{bmatrix} 0 \\ V_y \end{bmatrix}$$

$$\vec{V} = \vec{V_r} + \vec{V_t}$$ ... ovvio!

SCOMPOSIZIONE

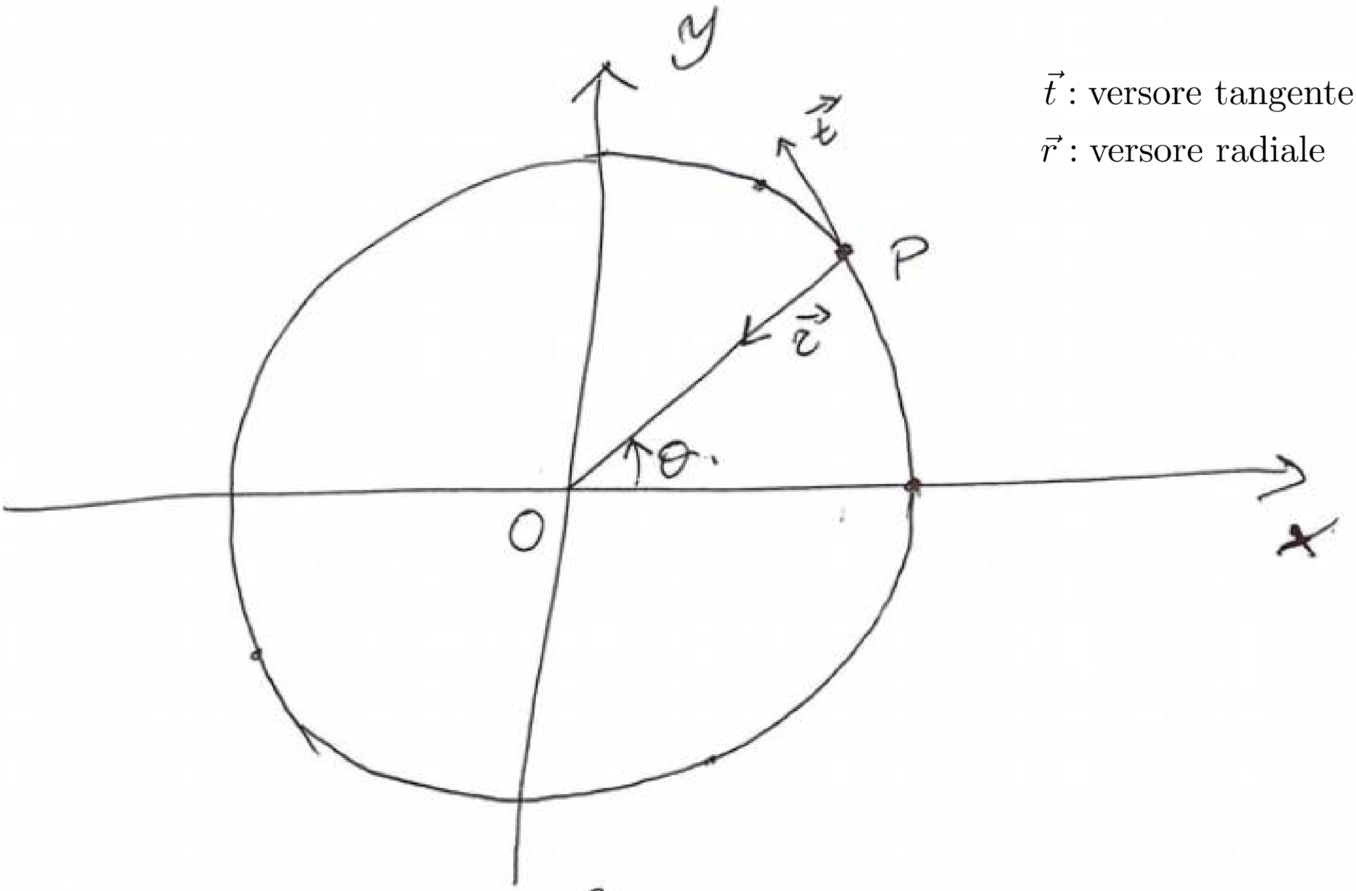
O

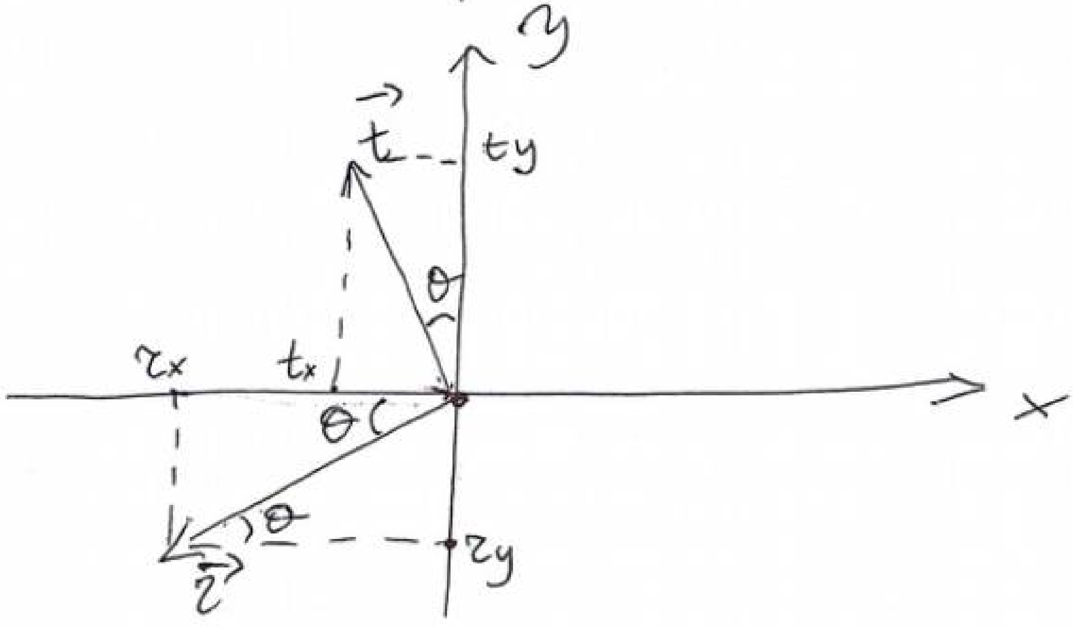
CAMBIO DI COORDINATE

Moti circolari

$\vec{t}$: versore tangente

$\vec{r}$: versore radiale





$$\vec{r} = \begin{bmatrix} -\cos\theta \\ -\sin\theta \end{bmatrix} \qquad \vec{t} = \begin{bmatrix} -\sin\theta \\ +\cos\theta \end{bmatrix}$$

E' convieniente scegliere come versore radiale la direzione che punta verso il centro della circonferenza.

Estratto dall'esame di Fisica 2 del 13 Febbraio 2017

Esercizio 2
Si ha una distribuzione di carica a simmetria sferica centrata nell'origine di un sistema di assi cartesiani. Essa è descritta da $\rho(r)=\rho_0>0$ per $r<R$ e $\rho(r)=-\rho_0\exp(-r/R)$ per $r>R$. Si ha inoltre un campo magnetico omogeneo di intensità B_0 orientato lungo z. Una particella di massa M e carica negativa q compie orbite circolari di raggio 2R sul piano xy. Determinare i possibili periodi di rivoluzione. Confrontare i segni delle velocità corrispondenti ai vari possibili periodi individuati, discutendo il significato fisico di quanto emerge dal confronto.

Forza di Lorentz

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

1) $\vec{E}$ è costante in modulo sulla circonferenza di raggio 2R

2) $\vec{E}$ è sempre radiale.

$$\boxed{\vec{E} = E\vec{r}}$$

3) $\vec{B}$ è perpendicolare a xy.

$$\vec{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -B_0 \end{bmatrix}$$

4) $\vec{v}$ è tangente alla circonferenza

$$\boxed{\vec{v} = v\vec{t}}$$

Nota: la velocità di un corpo è sempre tangente alla traiettoria che esso compie!

$$\underline{\vec{v}\times\vec{B}} = \det\begin{bmatrix} \vec{x} & \vec{y} & \vec{z} \\ -v\sin\theta & v\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & -B_0 \end{bmatrix}$$

$$= \vec{x}\,(-vB_0\cos\theta) - \vec{y}\,(vB_0\sin\theta)$$

$$= \begin{bmatrix} -vB_0\cos\theta \\ -vB_0\sin\theta \\ 0 \end{bmatrix} = +vB_0 \begin{bmatrix} -\cos\theta \\ -\sin\theta \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= vB_0\,\vec{r}.$$

$\vec{E} = E\vec{r}$ (dato)

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B})$$

$$= q(E\vec{r} + vB_0\vec{r})$$

$$= q(E+vB_0)\,\vec{r}$$

$\boxed{\text{Vale per ogni } \theta}$

$\vec{F}$ è una forza centripeta!

Il modulo di $\vec{F}$ è $q(E + vB_0)$. Esso non cambia al variare dell'angolo θ. $\vec{F}$ ha solo componente radiale (centripeta). Abbiamo dunque un moto circolare uniforme!

Noto $\vec{F}_c = \dfrac{m\,|\vec{v}_t|^2}{R}$

La formula precedente vale sempre, anche nei casi in cui:

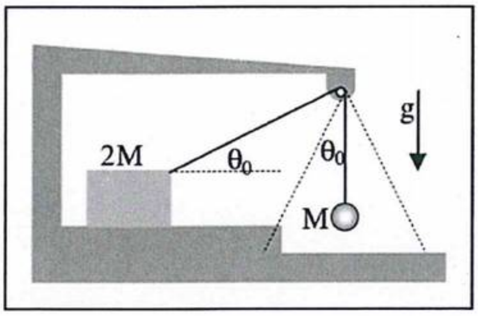
- la componente centripeta della forza ha modulo variabile;
- è presente anche una forza tangenziale.

Le due situazioni elencate si ritrovano, ad esempio, nel moto del pendolo.

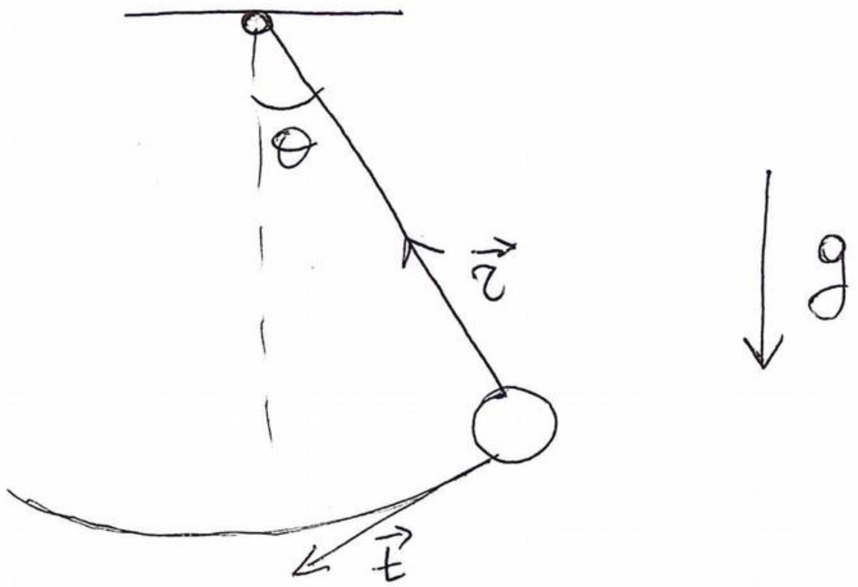
Infatti, nel moto del pendolo la velocità tangenziale non è sempre la stessa, ma dipende dalla posizione del corpo (angolo) in un dato istante di tempo.

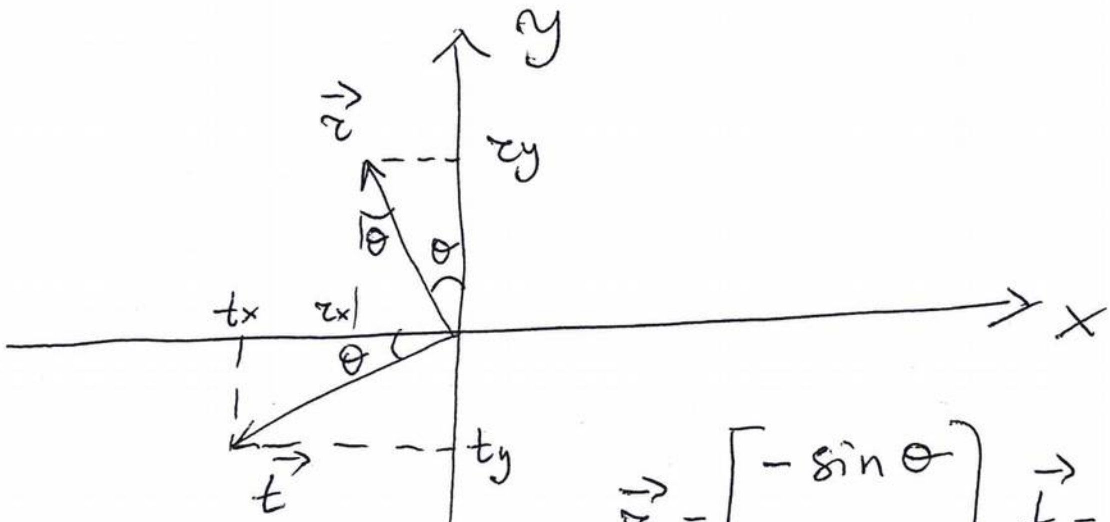
Estratto dall'esame di Fisica 1 del 17 Settembre 2015

Esercizio 1



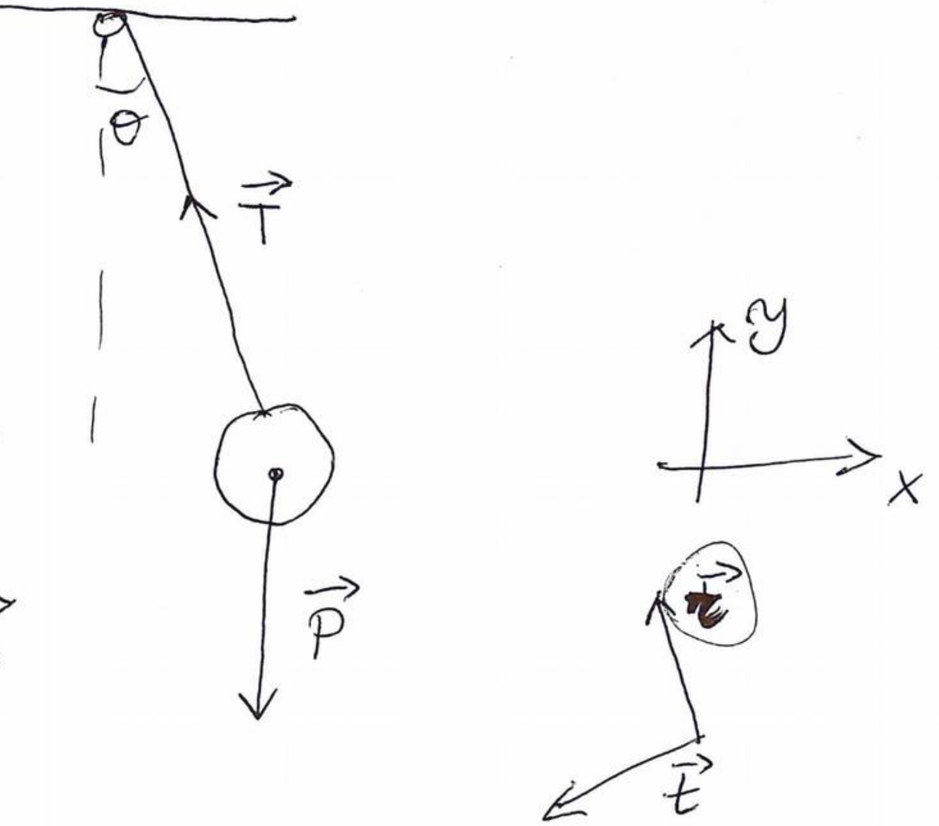
La figura mostra un piano orizzontale scabro su cui poggia un corpo di massa 2M che è connesso, tramite un filo ideale rinviato da una minuscola carrucola priva di attriti, ad un corpo sospeso di massa M. Il tratto di filo obliquo forma un angolo θ_0 con l'orizzontale. Il corpo sospeso compie oscillazioni di semiampiezza θ_0. Per quali valori del coefficiente d'attrito radente statico μ_S il corpo appoggiato resta fermo? Si supponga che esso resti effettivamente fermo. Quanto è intensa la reazione sull'asse della carrucola, quando il pendolo è alla massima elongazione verso destra e verso sinistra?





$$\vec{\tau} = \begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix} \quad \vec{t} = \begin{bmatrix} -\cos\theta \\ -\sin\theta \end{bmatrix}$$

Diagramma delle forze che agiscono sul corpo



$$\vec{P} = \begin{bmatrix} 0 \\ -mg \end{bmatrix}$$

$$\vec{T} = T\,\vec{r}$$

La tensione del filo ha solo componente radiale!

Invece la forza peso ha sia componente radiale che componente tangenziale.

Calcoliamo tali componenti:

$$\begin{aligned} \vec{P}_r &= (\vec{P}\cdot\vec{r})\,\vec{r} \\ &= \left(0\cdot(-\sin\theta) + (-mg)\cos\theta\right)\vec{r} \\ &= -mg\cos\theta\,\vec{r}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{P}_t &= (\vec{P}\cdot\vec{t})\,\vec{t} \\ &= \left(0\cdot(-\cos\theta) + (-mg)(-\sin\theta)\right)\vec{t} \\ &= mg\sin\theta\,\vec{t}. \end{aligned}$$

Verifichiamo che la scomposizione della forza peso sia stata effettuata correttamente:

$$\vec{P} = \vec{P_z} + \vec{P_t}$$

$$= -mg\cos\theta\,\vec{r} + mg\sin\theta\,\vec{t}$$

$$= -mg\cos\theta \begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix} + mg\sin\theta \begin{bmatrix} -\cos\theta \\ -\sin\theta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} mg\cos\theta\sin\theta \\ -mg\cos^2\theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -mg\cos\theta\sin\theta \\ -mg\sin^2\theta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} mg\cos\theta\sin\theta - mg\cos\theta\sin\theta \\ -mg\cos^2\theta - mg\sin^2\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -mg \end{bmatrix} = \vec{P}$$

Le forze scomposte sono:

$$\vec{P_r} = -mg\cos\theta\,\vec{r}$$

$$\vec{P_t} = mg\sin\theta\,\vec{t}$$

$$\vec{T_r} = T\vec{r} \qquad (=\vec{T})$$

$$\vec{T_t} = 0\,\vec{t}$$

$$\begin{cases} m\vec{a_r} = \vec{P_r} + \vec{T_r} \\ m\vec{a_t} = \vec{P_t} + \vec{T_t} \end{cases}$$

Componente radiale della forza netta agente sul corpo

Componente tangenziale della forza netta agente sul corpo

$$\vec{a_r} = a_r\vec{r}$$

Componente radiale dell'accelerazione

$$\vec{a_t} = a_t\vec{t}$$

Componente tangenziale dell'accelerazione

$$\begin{cases} ma_r\vec{r} = -mg\cos\theta\,\vec{r} + T\vec{r} \\ ma_t\vec{t} = mg\sin\theta\,\vec{t} + 0\vec{t} \end{cases}$$

$$\begin{cases} m a_r = -mg\cos\theta + T \\ m a_t = mg\sin\theta \end{cases}$$

$$a_r = \frac{v_t^2}{R}$$

velocità tangenziale

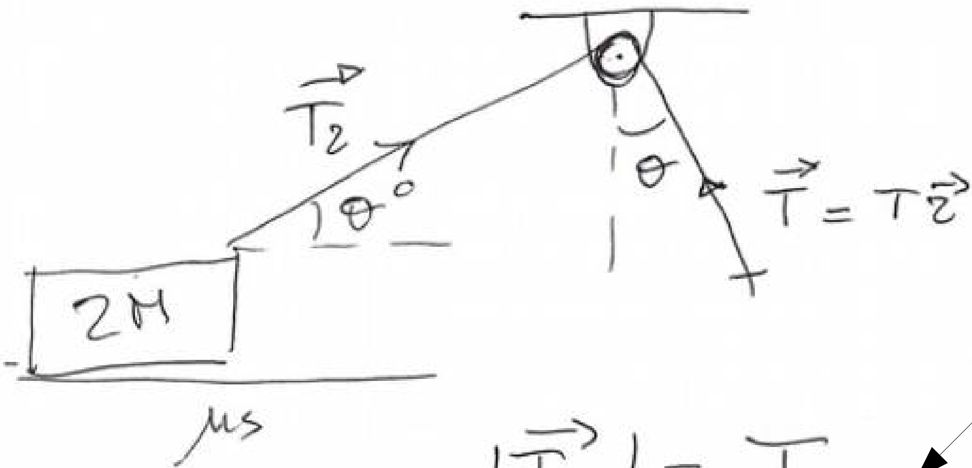
lunghezza filo

$$\frac{m v_t^2}{R} = -mg\cos\theta + T$$

$$\boxed{T = m\left(\frac{v_t^2}{R} + g\cos\theta\right)}$$

Il modulo della tensione del filo varia con l'angolo!

Consideriamo ora il corpo di massa 2M...



Le tensioni sono diverse,
ma hanno modulo uguale

$$|\vec{T_2}| = T$$

$$\vec{T_2} = |\vec{T_2}| \begin{bmatrix} \cos\theta_0 \\ \sin\theta_0 \end{bmatrix}$$

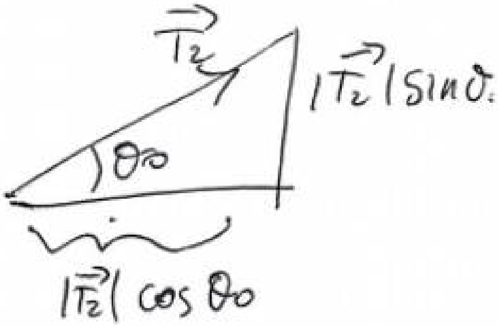
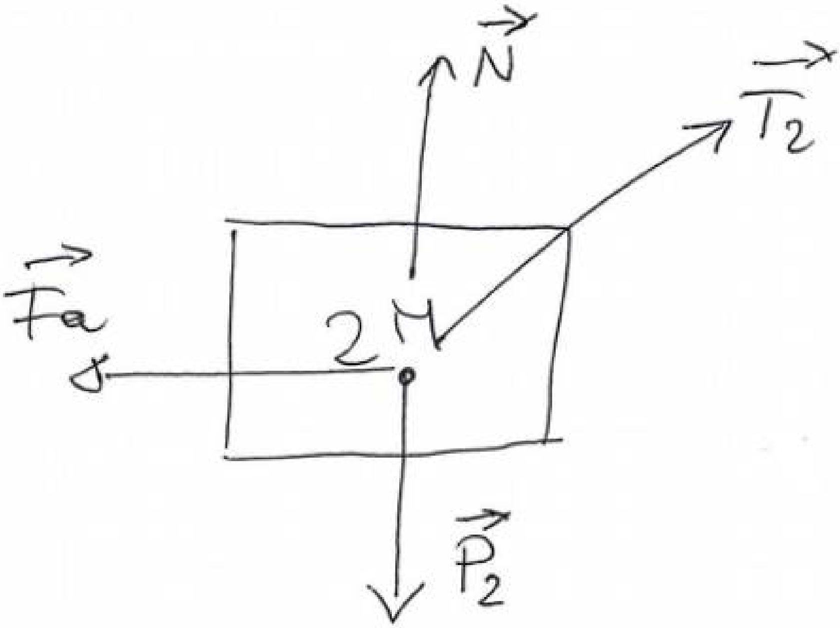


Diagramma delle forze che agiscono sul secondo corpo



$$N = mg - T\sin\theta_0 \quad > 0$$

$$\vec{T_2} = \vec{T_{2x}} + \vec{T_{2y}}$$

$$= \begin{bmatrix} T\cos\theta_0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ T\sin\theta_0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \vec{N} = -(\vec{T_{2y}} + \vec{P_2})$$

$$= \cdots$$

$$N = mg - T\sin\theta_0$$

$$\vec{P_2} = \vec{P_{2x}} + \vec{P_{2y}}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -mg \end{bmatrix}$$