CORSO DI RECUPERO DI FISICA

DARIO MADEO

madeo@dii.unisi.it

www.dii.unisi.it/~madeo

LEZIONE DEL 10 marzo 2017

Vettori

$\vec{x} \in \mathbb{R}^n$

$\mathbb{R}^3$ o $\mathbb{R}^2$ interessanti per la fisica

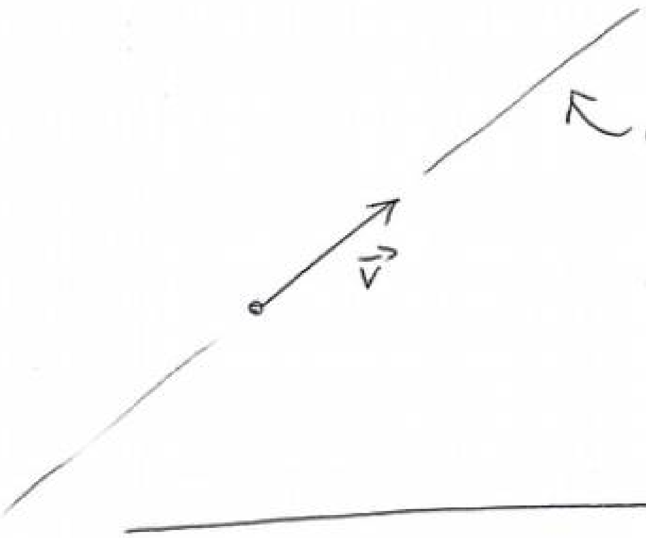
$\mathbb{R}^3$

$$\vec{V} = \begin{bmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{bmatrix}$$

Il vettore ha: $\boxed{\text{modulo} \quad |\vec{v}| \quad (\geq 0)}$

direzione

verso



direzione
la retta su cui giace $\vec{v}$

$$|\vec{v}| = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}$$

in $\mathbb{R}^2$ $\quad |\vec{v}| = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}$

A volte è utile restringersi a un determinato piano, buttando via una componente nulla...

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ -5 \end{bmatrix}$$

$\rightsquigarrow$ Nel piano xz ho

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} 10 \\ -5 \end{bmatrix}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{10^2 + 0^2 + (-5)^2} = \sqrt{125}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{10^2 + (-5)^2} = \sqrt{125}$$

La norma non cambia!

Prodotto scalare

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = |\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cos\alpha \qquad \text{GEOM.}$$

$$= v_x w_x + v_y w_y + v_z w_z \qquad \text{ALG.}$$

$\vec{v}^T \vec{w}$

$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$

Altre notazioni

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad \vec{w} = \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Qual'è α?

Qui preferisco versione algebrica

Prodotto vettoriale

$$\vec{v} \wedge \vec{w} = |\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \sin\theta \, \vec{u}$$

$(\vec{v} \times \vec{w})$ $\qquad \theta$ è l'angolo da $\vec{v}$ a $\vec{w}$.

$$\vec{w} \wedge \vec{v} = -(\vec{v} \wedge \vec{w})$$

$$= |\vec{w}| \cdot |\vec{v}| \sin(-\theta) \, \vec{u}$$

($-\theta$ è l'angolo da $\vec{w}$ a $\vec{v}$)

$$= |\vec{w}| \, |\vec{v}| \sin(\theta) \, (-\vec{u})$$

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{v} \wedge \vec{w} &= |\vec{v}| |\vec{w}| \sin\theta \, \vec{u} \\ \vec{w} \wedge \vec{v} &= |\vec{v}| |\vec{w}| \sin\theta \, (-\vec{u}) \end{aligned}}$$

Cambia solo
il verso!

$\vec{u}$ è il versore perpendicolare al piano che contiene $\vec{v}$ e $\vec{w}$.

(Versore $\equiv$ vettore con modulo $= 1$)

NOTA

Se $\vec{v}$ e $\vec{w}$ sono <u>paralleli</u>, ovvero

$$\vec{v} = k\vec{w} \quad , k \in \mathbb{R}$$

allora

$$\vec{v} \wedge \vec{w} = \vec{0}$$

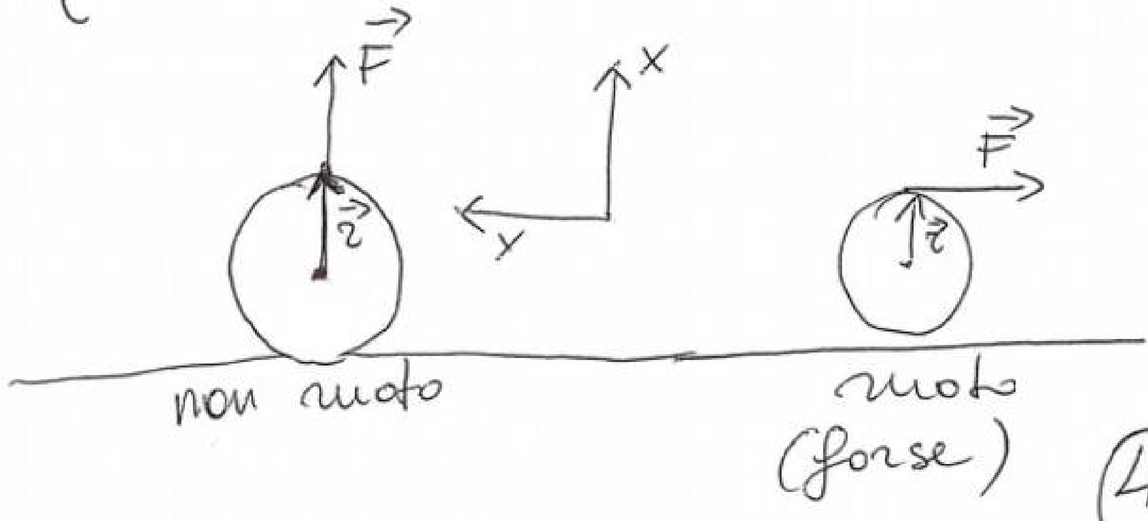
Infatti $\theta = 0°$ (l'angolo tra $\vec{v}$ e $\vec{w}$) oppure $\theta = 180°$

$$\sin(0°) = \sin(180°) = 0.$$

Il prodotto vettoriale compare generalmente nella descrizione dei moti di rotazione...

$$\vec{F} = \begin{bmatrix} F_x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \vec{r} = \begin{bmatrix} r_x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

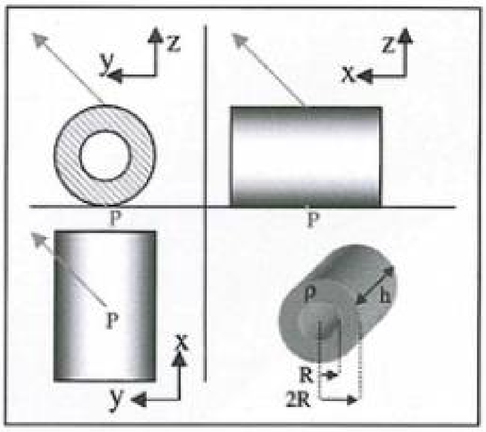
$$\vec{\tau} = \vec{r} \wedge \vec{F} = \vec{0}$$



Estratto dall'esame di Fisica 1 del 27 Giugno 2016

Esercizio 2

La figura mostra in proiezioni ortogonali un corpo cilindrico cavo, poggiato su un piano orizzontale scabro. Il corpo ha densità omogenea ρ, lunghezza h, raggio interno R e raggio esterno 2R. Il corpo viene messo in moto applicando una forza al suo punto più alto sopra il baricentro, le tre componenti della forza sono uguali ed il suo modulo è F. Il cilindro inizia a compiere moto di puro rotolamento. Dopo aver calcolato il momento d'inerzia del corpo rispetto all'asse di contatto con il piano orizzontale e dopo aver scritto, nelle sue componenti, il momento torcente di F rispetto al punto di contatto sottostante al baricentro (P), determinare l'accelerazione angolare del cilindro la reazione normale e la forza d'attrito.



$$\vec{F} = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix}$$

"Le tre componenti sono uguali"

$$\Rightarrow F_x = F_y = F_z \Rightarrow$$

$$\vec{F} = \begin{bmatrix} F_x \\ F_x \\ F_x \end{bmatrix}$$

"Il modulo è F"

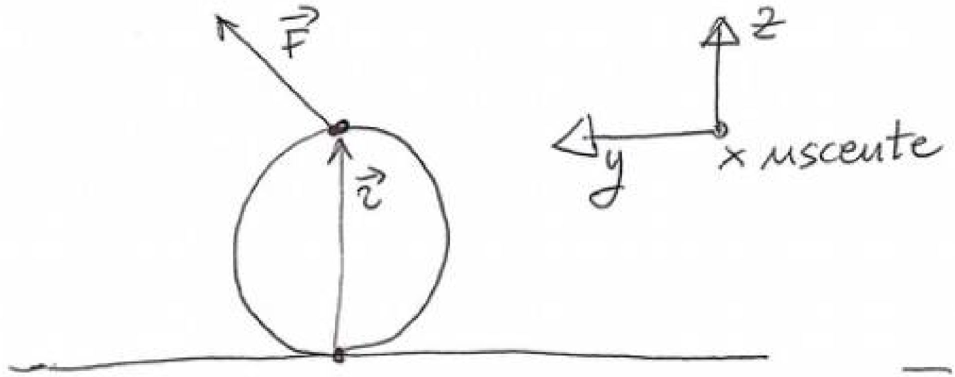
$$\Rightarrow |\vec{F}| = F$$

$$|\vec{F}| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} = \sqrt{F_x^2 + F_x^2 + F_x^2}$$

$$= \sqrt{3F_x^2} = \sqrt{3}\,F_x$$

$$|\vec{F}| = F \Rightarrow F = \sqrt{3}\,F_x$$

$$\Rightarrow F_x = \frac{F}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}F.$$



$$\vec{F} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3}F \\ \frac{\sqrt{3}}{3}F \\ \frac{\sqrt{3}}{3}F \end{bmatrix} \qquad \vec{r} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4R \end{bmatrix}$$

$$\vec{\tau} = \vec{r} \wedge \vec{F}$$

$$= \det \begin{bmatrix} \vec{x} & \vec{y} & \vec{z} \\ 0 & 0 & 4R \\ \frac{\sqrt{3}}{3}F & \frac{\sqrt{3}}{3}F & \frac{\sqrt{3}}{3}F \end{bmatrix} \begin{matrix} \vec{x} & \vec{y} \\ 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{3}F & \frac{\sqrt{3}}{3}F \end{matrix}$$

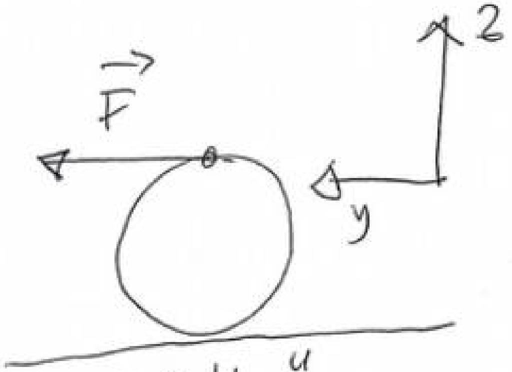
$$= 4\frac{\sqrt{3}}{3}FR\,\vec{y} - 4\frac{\sqrt{3}}{3}FR\,\vec{x}.$$

$$= \begin{bmatrix} -4\frac{\sqrt{3}}{3}FR \\ 4\frac{\sqrt{3}}{3}FR \\ 0 \end{bmatrix}.$$

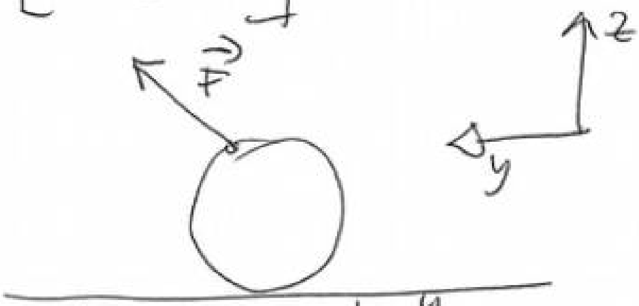
mi interessa questa per la rotazione

Invece di considerare $\vec{F}$ "completo", considero

$$\vec{F} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{3} F \\ 0 \end{bmatrix}$$



"ridotto"



"completo"

$$\vec{F} = \frac{\sqrt{3}}{3} F \vec{y}$$

$$\vec{r} = 4R\vec{z}$$

E' utile sapere che...

$$\vec{x} \wedge \vec{y} = \vec{z} \qquad \vec{y} \wedge \vec{x} = -\vec{z}$$

$$\vec{y} \wedge \vec{z} = \vec{x} \qquad \vec{z} \wedge \vec{y} = -\vec{x}$$

$$\vec{z} \wedge \vec{x} = \vec{y} \qquad \vec{x} \wedge \vec{z} = -\vec{y}$$

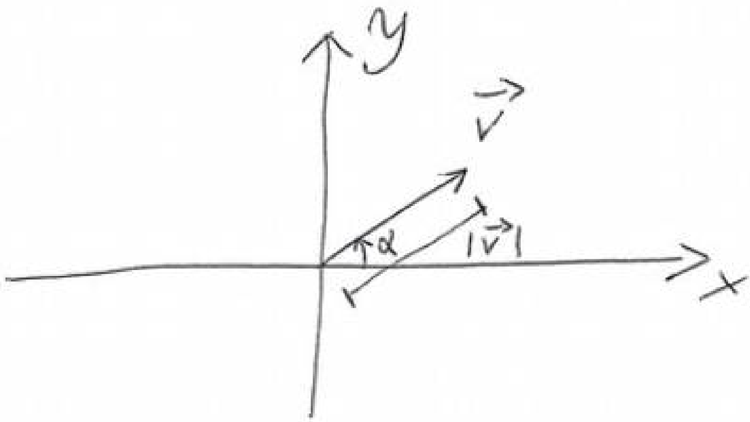
$$\vec{\tau} = \vec{r} \wedge \vec{F} = 4\frac{\sqrt{3}}{3} FR (\vec{z} \wedge \vec{y})$$

$$= -4\frac{\sqrt{3}}{3} FR \vec{x}.$$

Infatti so già che la rotazione avviene intorno all'asse x...

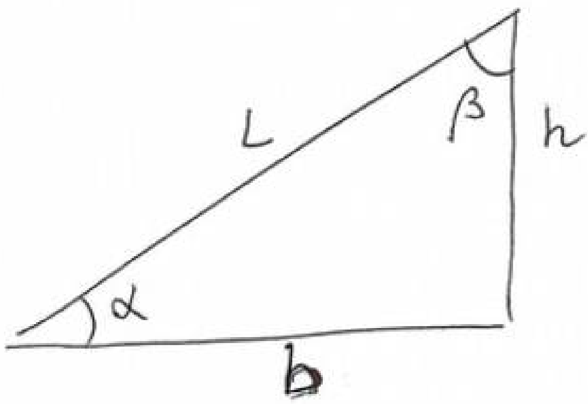
Vettori in 2D

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} V_x \\ V_y \end{bmatrix}$$



$$\begin{cases} V_x = |\vec{v}| \cos\alpha \\ V_y = |\vec{v}| \sin\alpha \end{cases}$$

Triangoli rettangoli



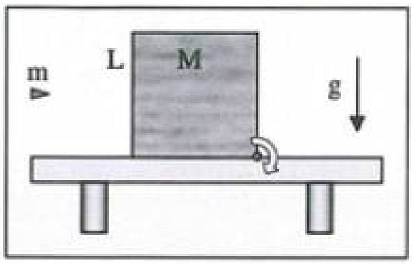
$$b = L\cos\alpha$$
$$= L\sin\beta$$

$$h = L\sin\alpha$$
$$= L\cos\beta$$

Coseno: cateto adiacente all'angolo

Seno: cateto opposto all'angolo.

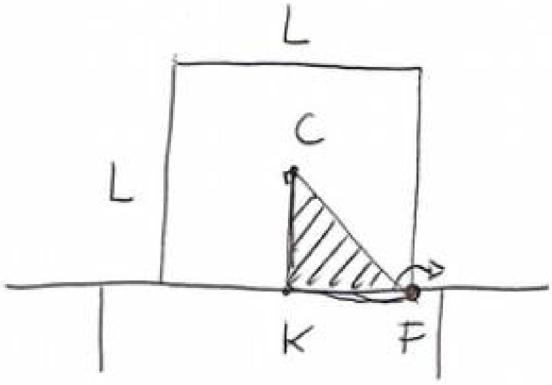
Estratto dall'esame di Fisica 1 del 9 Settembre 2016



Esercizio 1

Un cubo omogeneo di massa M e lato L poggia con una faccia su un piano orizzontale ed è fermo. Esso può ruotare intorno a uno degli spigoli appoggiati sul piano, che è fisso. Un proiettile di massa m (con m<<M) giunge con velocità $\underline{\mathbf{v}}_0$ perpendicolare alla faccia opposta a quella soprastante il fulcro e si conficca nel suo centro.

a) Discutere quali quantità si conservano durante l'urto e dopo l'urto.
b) Esprimere in termini di m, v_0, M, L e g l'energia persa nell'urto nel caso in cui il cubo si sollevi fino ad un angolo massimo pari a 15° (angolo tra faccia inferiore e piano).
c) Calcolare il momento d'inerzia I del cubo rispetto al fulcro.
d) Determinare per quali valori di v_0 si osserva un ribaltamento del cubo [stavolta si richiede di rispondere in termini di m, M, I, L, g].



$$\overline{CK} = \frac{L}{2}$$

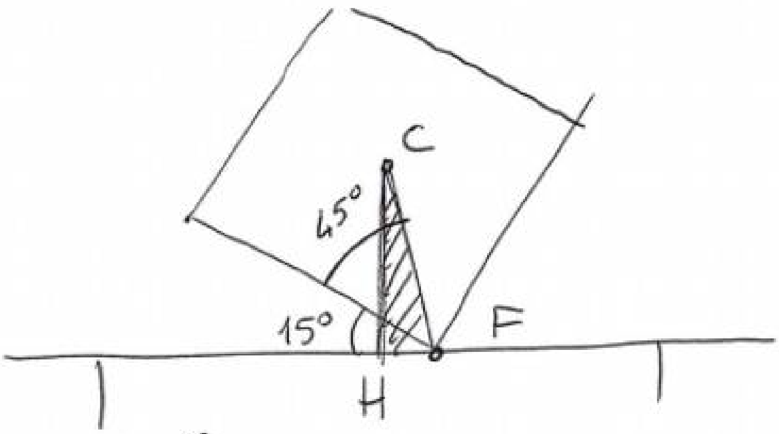
$$\overline{KF} = \frac{L}{2}$$

$$\overline{CF} = \sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2} = \sqrt{2\frac{L^2}{4}} = \frac{L}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}L.$$

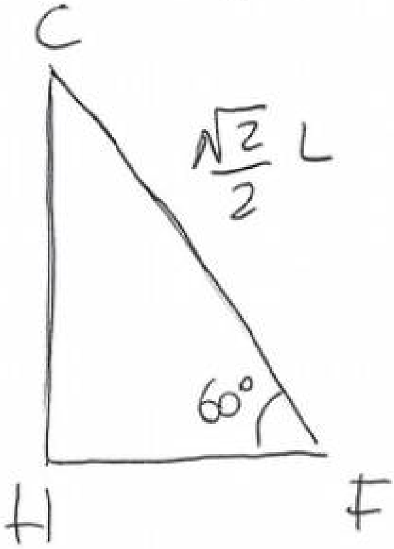
Quota del centro di massa: $\overline{CK} = \frac{L}{2}$

$U_0 = Mg\frac{L}{2}$ (energia potenziale)

Dopo l'urto, il cubo si solleva di 15°. La posizione (e la quota) del centro di massa cambia di conseguenza.



$\overline{CH}$ è la nuova quota.



$$\overline{CH} = \overline{CF} \sin 60°$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}L \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= L\frac{\sqrt{6}}{4}.$$

Quota del centro di massa

$$\overline{CH} = L\frac{\sqrt{6}}{4}$$

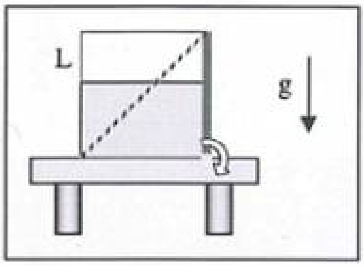
energia potenziale

$$U_1 = MgL\frac{\sqrt{6}}{4}$$

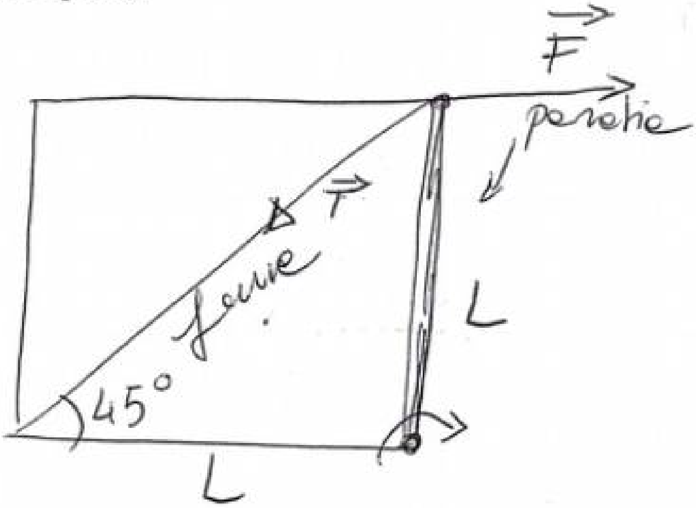
Estratto dall'esame di Fisica 1 del 9 Settembre 2016

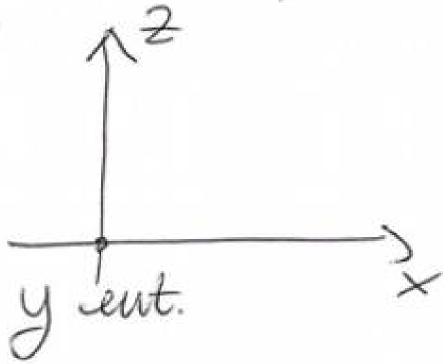
Esercizio 3

Un recipiente cubico di lato L, superiormente aperto, poggia su un piano orizzontale. Una delle facce laterali del recipiente è una paratia che può ruotare intorno ad uno spigolo di base. Tale paratia viene tenuta in posizione mediante una corda connessa al centro del suo lato superiore ed al centro dello spigolo opposto. Calcolare la tensione della corda in funzione del volume di liquido V presente nel recipiente (sia ρ la densità di tale liquido).

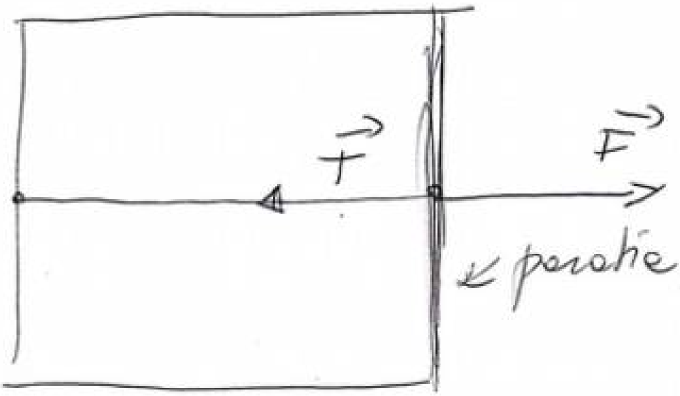


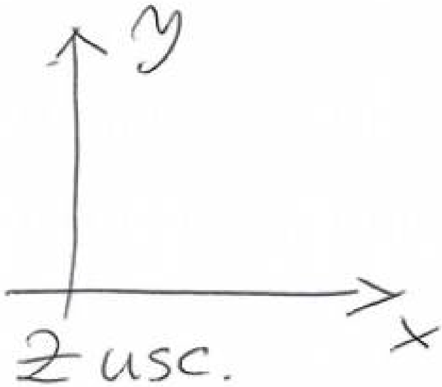
LATO





ALTO





Forza che agisce sulla parte alta della paratia.

$$\vec{F} = \begin{bmatrix} F_x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Tensione che agisce sulla fune.

$$\vec{T} = \begin{bmatrix} T_x \\ 0 \\ T_z \end{bmatrix}$$

Statica

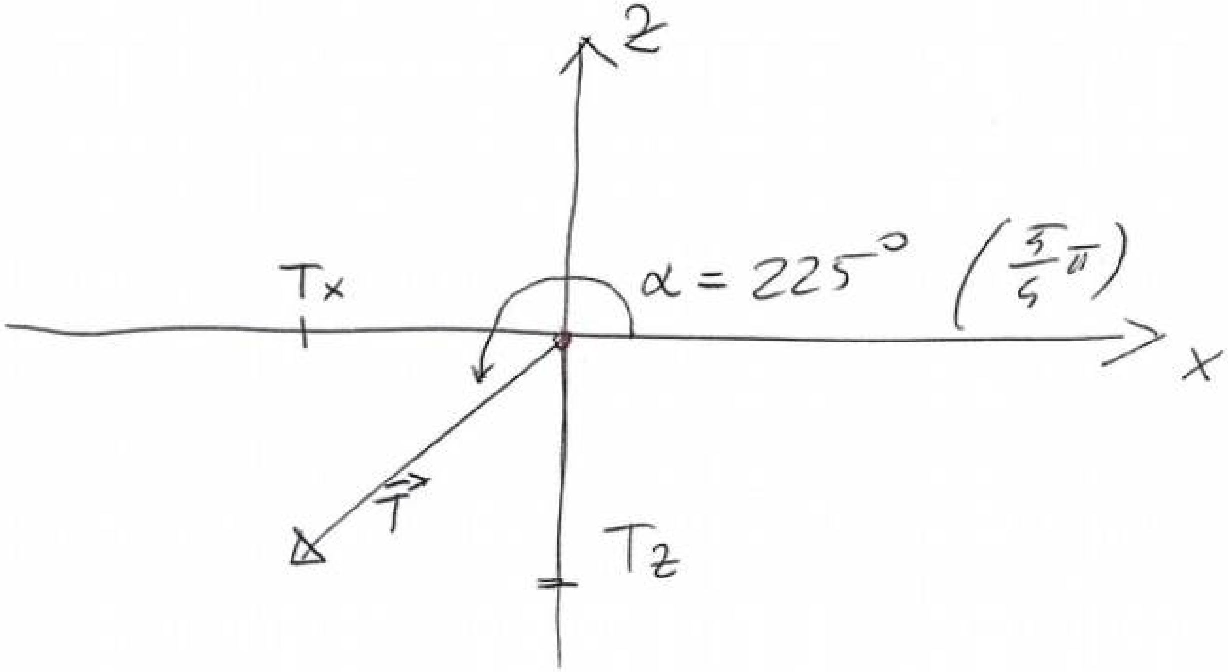
$$F_x + T_x = 0$$

dato

$$T_x = -F_x$$

Notare che $F_x > 0$

$$T_x = -F_x < 0$$



$$\begin{cases} T_x = |\vec{T}| \cos 225^\circ \\ T_z = |\vec{T}| \sin 225^\circ \end{cases} \qquad \begin{cases} T_x = |\vec{T}| \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ T_z = |\vec{T}| \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \end{cases}$$

$$T_x = -F_x \Rightarrow -F_x = |\vec{T}| \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\boxed{|\vec{T}| = \sqrt{2}\, F_x}$$

$$T_z = |\vec{T}|\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\,F_x\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

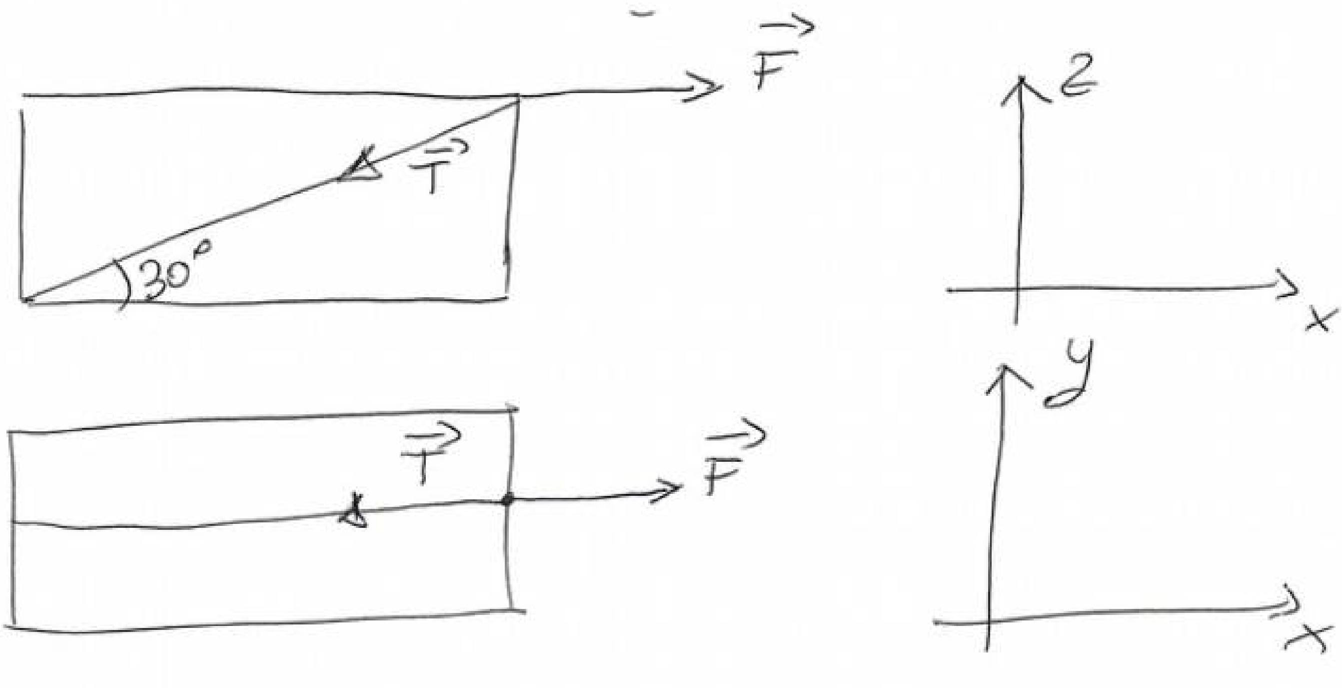
$$= -F_x \, .$$

$$\vec{T} = \begin{bmatrix} -F_x \\ 0 \\ -F_x \end{bmatrix} .$$

Supponiamo ora che il recipiente sia un parallelepipedo

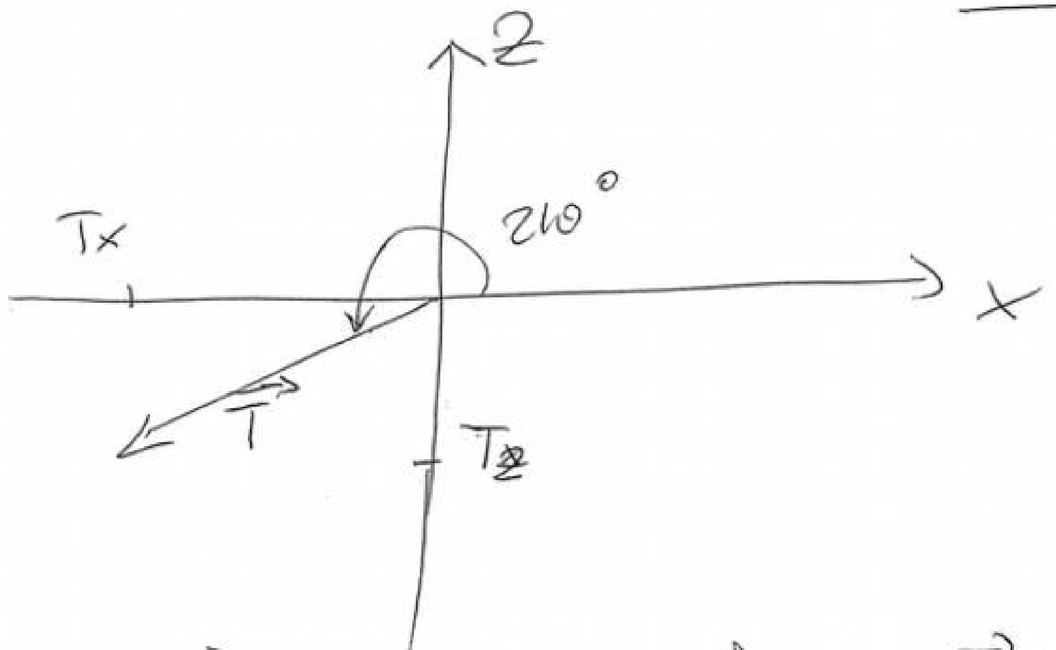
LATO

ALTO



$$\vec{F} = \begin{bmatrix} F_x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \vec{T} = \begin{bmatrix} T_x \\ 0 \\ T_z \end{bmatrix}$$

Statico $\quad F_x + T_x = 0 \quad \underline{T_x = -F_x}$

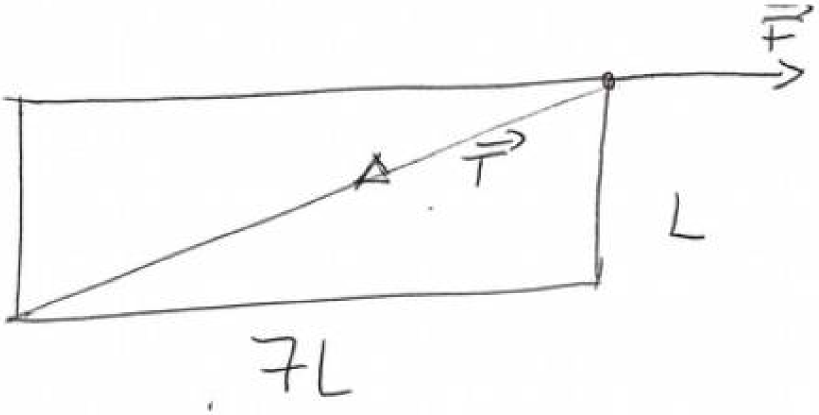


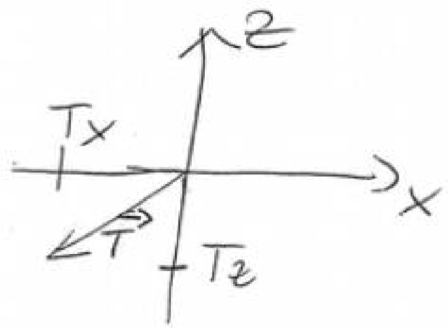
$$\begin{cases} T_x = |\vec{T}| \cos 210° \\ T_z = |\vec{T}| \sin 210° \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T_x = |\vec{T}| \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ T_z = |\vec{T}| \left(-\frac{1}{2}\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -F_x = |\vec{T}| \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ T_z = |\vec{T}| \left(-\frac{1}{2}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |\vec{T}| = \frac{2\sqrt{3}}{3} F_x \\ T_z = -\frac{\sqrt{3}}{3} F_x \end{cases}$$

$$\vec{T} = \begin{bmatrix} -F_x \\ 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} F_x \end{bmatrix}$$

Supponiamo ora di non conoscere l'angolo della fune, ma solo le dimensioni del parallelepipedo

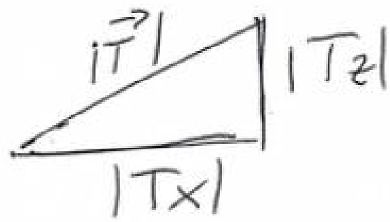




$$\vec{F} = \begin{bmatrix} F_x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \vec{T} = \begin{bmatrix} T_x \\ 0 \\ T_z \end{bmatrix}$$

Statica : $F_x + T_x = 0 \Rightarrow T_x = -F_x$

è simile a



Nota: il segno di Tx e Tz è negativo!

Uso le proporzioni!

$$|T_x| : 7L = |T_z| : L$$

$$\frac{|T_x|}{7L} = \frac{|T_z|}{L} \Rightarrow |T_z| = \frac{|T_x|}{7}$$

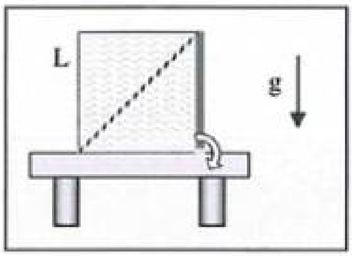
$$|T_x| = |-F_x| = F_x$$

$$\Rightarrow |T_z| = \frac{F_x}{7} \Rightarrow \vec{T} = \begin{bmatrix} -F_x \\ 0 \\ -\frac{F_x}{7} \end{bmatrix}$$

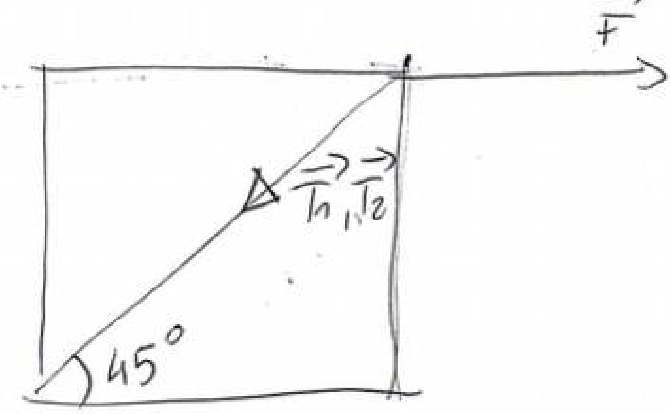
Estratto dall'esame di Fisica 1 del 26 Settembre 2016

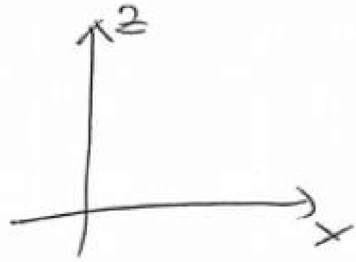
Esercizio 3

Un recipiente cubico di lato L superiormente aperto poggia su un piano orizzontale. Una delle facce laterali del recipiente è una paratia che può ruotare intorno ad uno spigolo di base. Tale paratia viene tenuta in posizione mediante due corde connesse al centro del suo lato superiore e agli estremi dello spigolo opposto. Calcolare la tensione delle corde quando il recipiente è pieno di liquido di densità ρ. [Suggerimento: disegnare il sistema anche da altri punti di vista.]

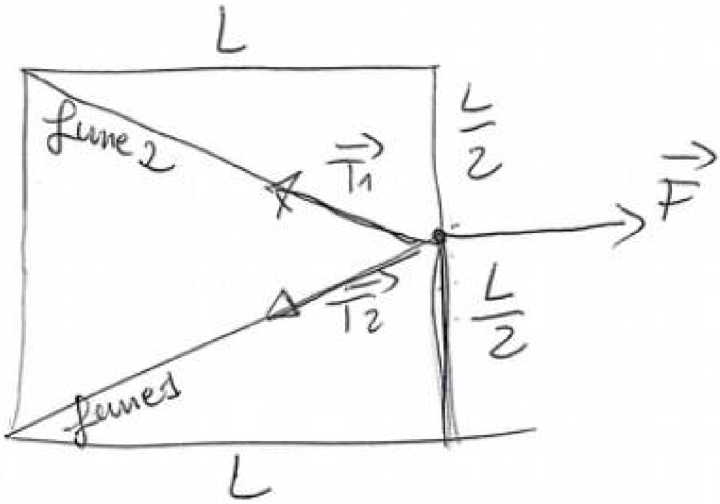


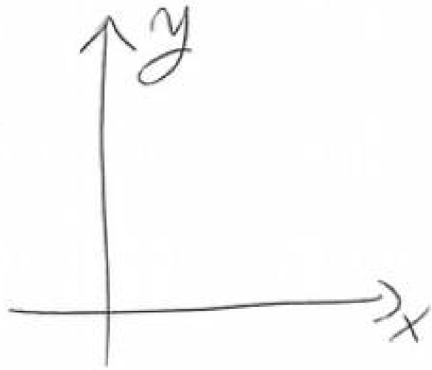
LATO





ALTO





$$\vec{F} = \begin{bmatrix} F_x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \vec{T_1} = \begin{bmatrix} T_{1x} \\ T_{1y} \\ T_{1z} \end{bmatrix} \qquad \vec{T_2} = \begin{bmatrix} T_{2x} \\ T_{2y} \\ T_{2z} \end{bmatrix}$$

$$|T_{1x}| : L = |T_{1y}| : \frac{L}{2} = |T_{1z}| : L$$

$$\frac{|T_{1x}|}{L} = \frac{|T_{1y}|\,2}{L} = \frac{|T_{1z}|}{L}$$

$$\boxed{|T_{1x}| = 2\,|T_{1y}| = |T_{1z}|}$$

Analogo per la fune 2!

<u>Statica</u> $\quad F_x + T_{1x} + T_{2x} = 0$

$$T_{1x} + T_{2x} = -F_x$$

Trovare $\vec{T_1}$ e $\vec{T_2}$.