

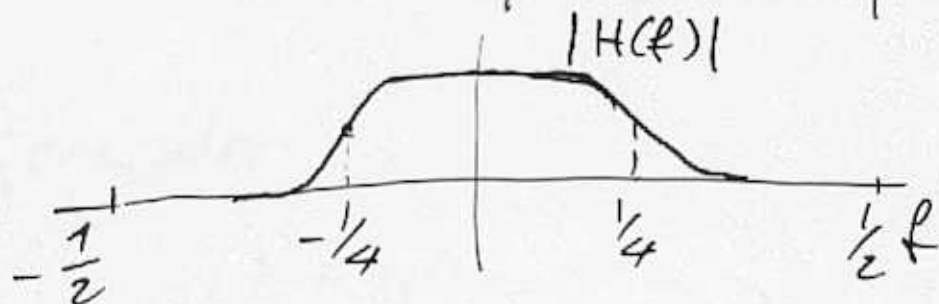
FIR Half-band

N dispari numero di coefficienti $D = \frac{N-1}{2}$

$$f_c = \frac{1}{4} \quad \omega_c = \pi/2$$

$$H(\omega) = |H(\omega)| e^{-j\omega D}$$

$$|H(\omega)| = 1 - |H(\pi - \omega)|$$



(ad esempio)

$$(-1)^n h(n) \leftrightarrow H(\omega - \pi)$$

$$(-1)^{-n} h(-n) \leftrightarrow H(\pi - \omega)$$

$$h(n) = h(N-1-n) \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

fase lineare

$$H(\omega) e^{j\omega D} = 1 - H(\pi - \omega) e^{j\pi D} e^{-j\omega D}$$

$$H(\omega) e^{j\omega D} + (-1)^D H(\pi - \omega) e^{-j\omega D} = 1$$

$$h(n+D) + (-1)^D (-1)^{-n+D} h(-n+D) = \delta(n)$$

$$n=0 \quad h(D) + h(D) = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h\left(\frac{N-1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

$$N=1 \Rightarrow h(D+1) - h(D-1) = 0 \quad \text{simmetria (già noto)}$$

$$N=2 \Rightarrow h(D+2) + h(D-2) = 0$$

$$\text{inoltre } h(D+2) = h(D-2)$$

$$\Rightarrow h(D+2) = h(D-2) = 0$$

In generale

$$h(D+2r) = 0 \quad r \text{ intero}$$

Inoltre

$$D \text{ pari} \Rightarrow h(0) = h(N-1) = 0$$

$$D \text{ dispari} \Rightarrow h(0) = h(N-1) \neq 0 \quad \text{in generale}$$

Valutiamo il numero di moltiplicazioni necessarie per filtrare un segnale con $h(n)$ half-band nel caso $N = 4P + 1$

$$D = \frac{N-1}{2} = 2P \text{ è pari}$$

Ho soltanto $2P+1$ coefficienti non nulli

$(P+1)$ moltiplicazioni, sfruttando la simmetria.

FFT : Decimazione in frequenza

Divisione della sequenza in uscita

$$N = 2^V$$

$$W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$$

$$\begin{aligned} X(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn} = \sum_{n=0}^{N/2-1} x(n) W_N^{kn} + \sum_{n=N/2}^{N-1} x(n) W_N^{kn} \\ &= \sum_{n=0}^{N/2-1} x(n) W_N^{kn} + W_N^{\frac{N}{2}k} \sum_{n=0}^{N/2-1} x(n + \frac{N}{2}) W_N^{kn} \\ &\quad (-1)^k \end{aligned}$$

k pari, k dispari

$$X(2r) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} [x(n) + x(n + \frac{N}{2})] W_N^{2rn} = W_{N/2}^{rn}$$

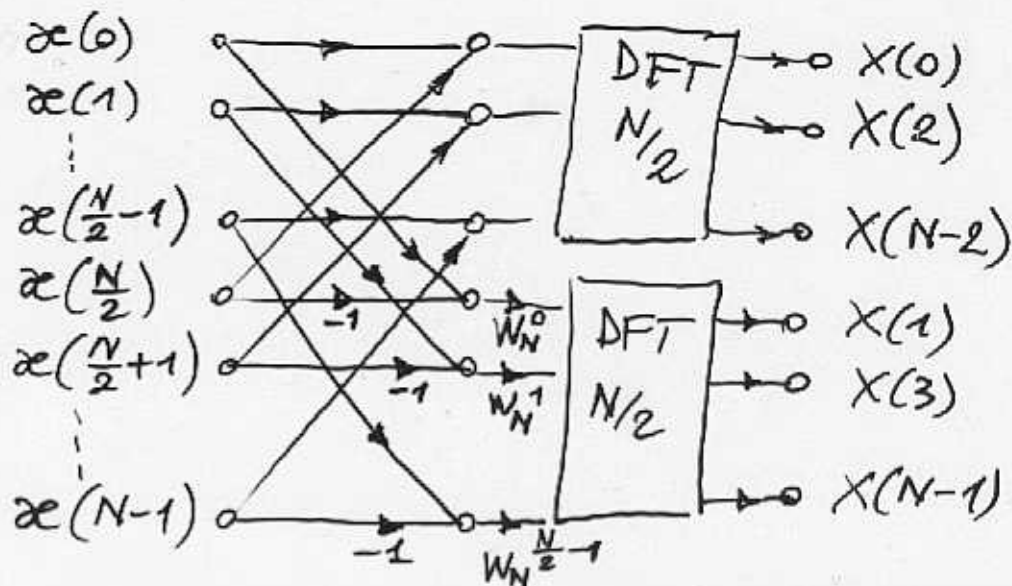
DFT su $\frac{N}{2}$ punti

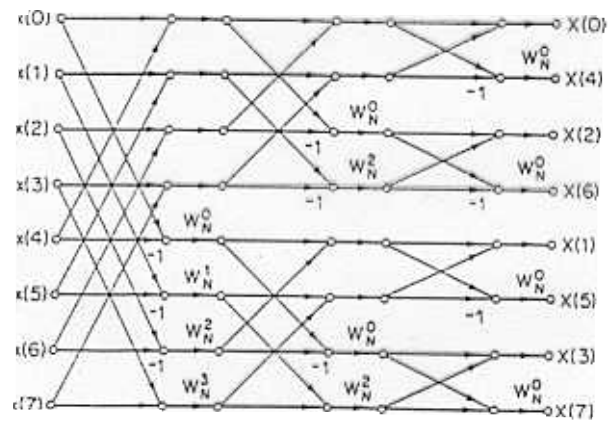
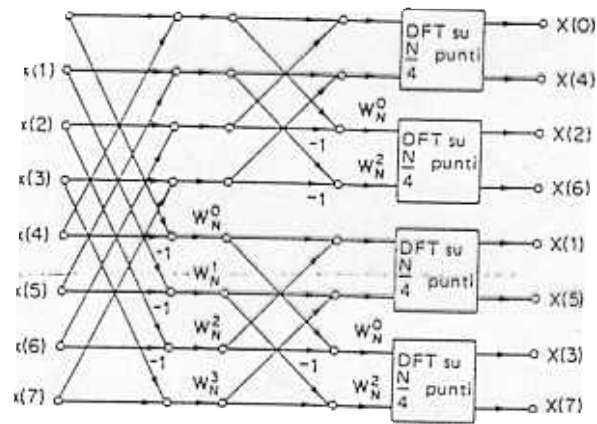
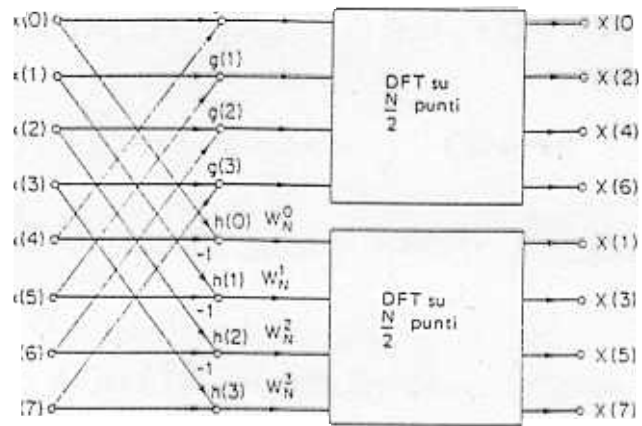
$$X(2r+1) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} [x(n) - x(n + \frac{N}{2})] W_N^n W_N^{2rn}$$

DFT su $\frac{N}{2}$ punti

$$r = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1$$

Caso $N = 8$
Tre stadi

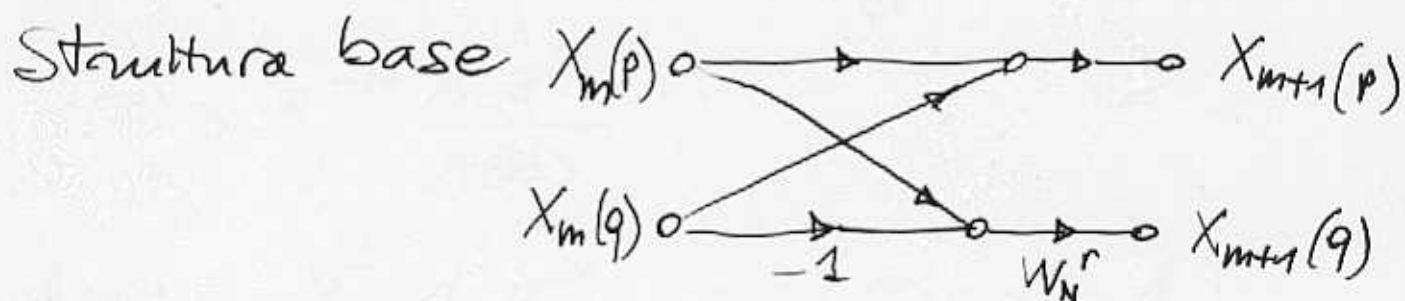




$$N = 2^v \quad v \text{ stadi}$$

Risparmio in Termini di numero di moltiplicazioni complesse, come nel caso della decimazione nel tempo.

$$\frac{N}{2} \log_2 N \text{ moltiplicazioni complesse.}$$



Ingressi ordinati, uscite con ordinamento a bit invertiti

Oppure, in alternativa,

ridefinizione dello schema



Filtri di Chebyshev

tipo I minimizzano l'errore di picco
(sono equiripple) in banda passante

tipo II minimizzano l'errore di picco
(sono equiripple) in banda attenuata

Tipo I.
$$|H_a(\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 T_N^2(\Omega/\Omega_c)}$$

dove $T_N(x)$ è il polinomio di Chebyshev di ordine N

$$T_N(x) = \begin{cases} \cos(N \cos^{-1} x) & |x| \leq 1 \\ \cosh(N \cosh^{-1} x) & |x| > 1 \end{cases}$$

Si ricordi che $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$
 $\cosh^{-1}(x) = \ln(x \pm \sqrt{x^2 - 1})$

Nell'espressione di $|H_a(\Omega)|^2$, noi consideriamo i casi $0 < x \leq 1$ e $x > 1$ e scegliamo il segno positivo in $\cosh^{-1}(x)$.

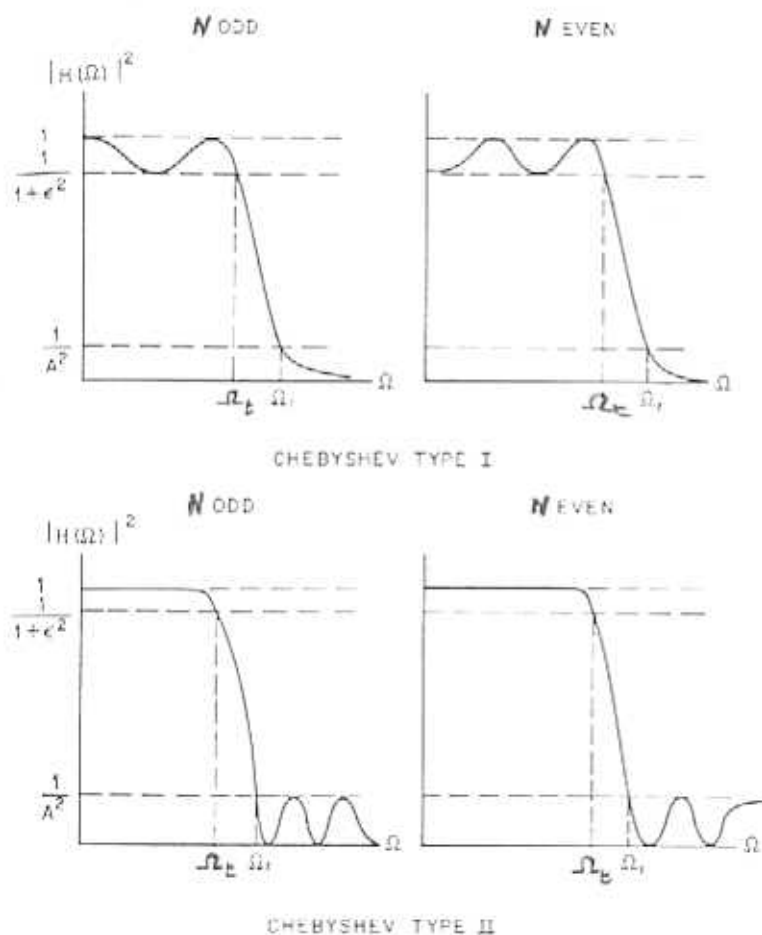


Fig. 4.18 Magnitude-squared responses of analog Chebyshev filters.

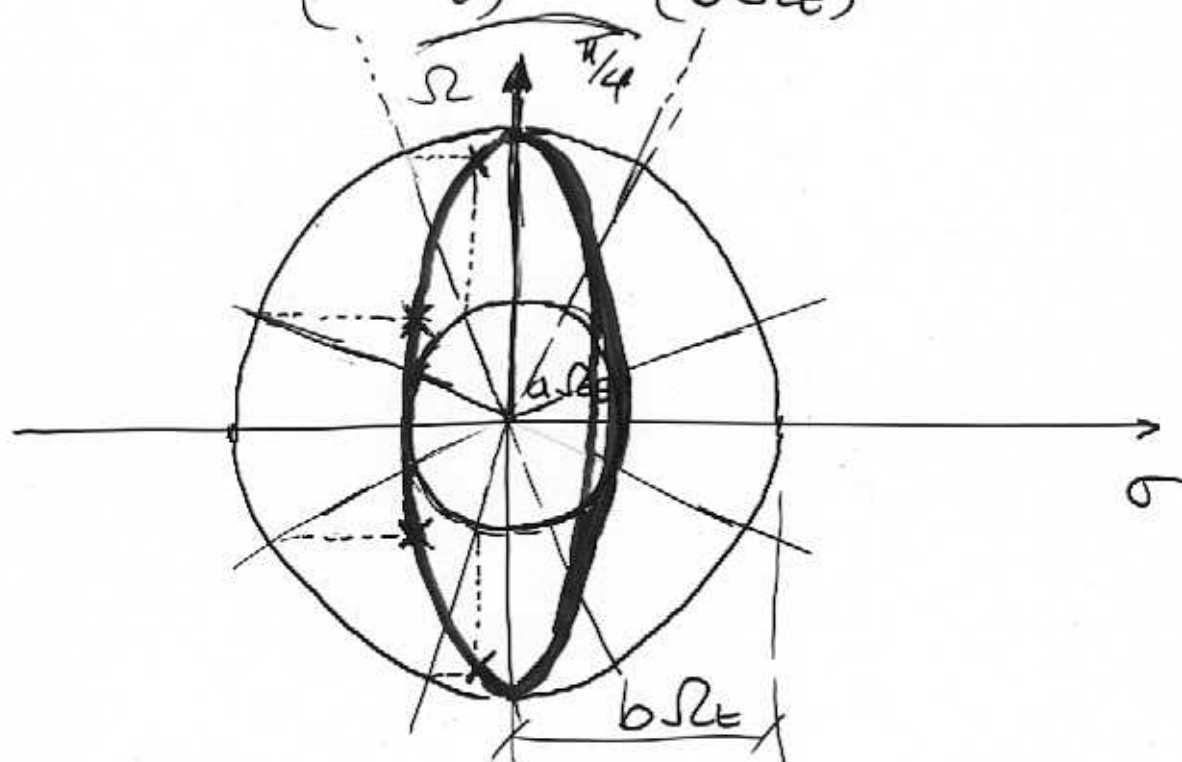
$$|H(\Omega_k)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 T_N^2(1)} = \frac{1}{1 + \varepsilon^2} \quad \forall N$$

(in generale non vale $\frac{1}{2}$)

I poli sono semplici e si trovano su un'ellisse del piano s

$2N$ poli di $H_a(s) H_a(-s)$: $s_k = \sigma_k + j\Omega_k$
 $k=0, 1, \dots, 2N-1$

Ellisse :
$$\frac{\sigma_k^2}{(a\Omega_k)^2} + \frac{\Omega_k^2}{(b\Omega_k)^2} = 1$$



Caso $N = 4$

Calcolo di a e b .

Detto $d = \varepsilon^{-1} + \sqrt{1 + \varepsilon^{-2}}$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} (d^{\frac{1}{N}} - d^{-\frac{1}{N}}) \\ b = \frac{1}{2} (d^{\frac{1}{N}} + d^{-\frac{1}{N}}) \end{cases}$$

Come per i filtri di Butterworth, si ha

N pari $\Rightarrow$ no poli reali

N dispari $\Rightarrow$ un polo sull'asse reale
per $H_a(s)$.

PROGETTO CHEBYSHEV TIPO I

Specifiche sul filtro numerico

$\omega_p, \omega_s, A_p, A_s$ (Attenuazioni
 $A_p, A_s > 0$)

trovare N minimo, ε e Ω_c del
filtro analogico per rispettare le
Specifiche sul filtro numerico

1) Caso invarianza all'impulso e $T=1$
 $\Rightarrow \Omega_p = \omega_p, \Omega_s = \omega_s$ (numericamente)

Caso transf. bilineare e $T=1$

$$\Rightarrow \Omega_p = 2 \tan\left(\frac{\omega_p}{2}\right), \Omega_s = 2 \tan\left(\frac{\omega_s}{2}\right)$$

2) Fisso $\Omega_t = \Omega_p \Rightarrow |H(e_p)|^2 = \frac{1}{1+\epsilon^2} \forall N$

$$3) 10 \log_{10} |H_a(\Omega_p)|^2 = 10 \log_{10} \frac{1}{1+\epsilon^2} \geq -A_p$$

$$\textcircled{*} 10 \log_{10} |H_a(\Omega_s)|^2 \leq -A_s$$

4) Dalla prima espressione, posto il segno di uguaglianza, calcolo $\epsilon = \sqrt{10^{A_p/10} - 1}$

$$5) \text{ Calcolo } d = \epsilon^{-1} + \sqrt{1+\epsilon^{-2}}$$

$$6) \text{ Dall'uguaglianza in banda alternata}$$
$$|H_a(\Omega_s)|^2 = \frac{1}{1+\epsilon^2 T_N^2(\Omega_s/\Omega_p)} = 10^{-A_s/10}$$

$\Rightarrow$ Si trova il minimo N intero
che soddisfa la $\textcircled{*}$

7) Si ricavano a e b , da cui i poli

8) $H_a(s) \longrightarrow H(z)$ e VERIFICA.

Chebyshev di tipo II

$$|H_a(\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 \left[T_N(\Omega_s/\Omega_t) / T_N(\Omega_s/\Omega) \right]^2}$$

Filtri ellittici

$$|H_a(\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 R_N^2(\Omega, L)}$$

$R_N(\Omega, L)$ funzione ellittica di Jacobi
(o funzione razionale di Chebyshev)
di ordine N

In figura, caso $N=5$

$$\begin{aligned} 1 &\longleftrightarrow \Omega_p \\ \Omega_L &\longleftrightarrow \Omega_s \end{aligned}$$

Filtri con zeri, oltre che con poli.

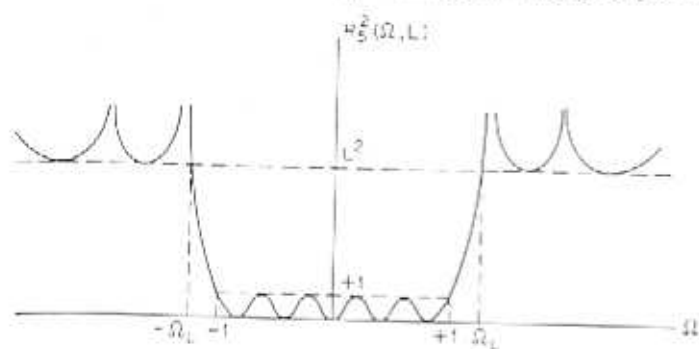


Fig. 4.21 Chebyshev rational function.

Filtri passa-tutto (ap)

$$|H(\omega)| = 1 \quad \forall \omega$$

Esempio semplice $H(z) = z^{-k}$

$H(z)$ funzione razionale (rapporto di polinomi)
in z (z^{-1})

Ipotesi: coefficienti reali. $\otimes$ Consideriamo:

$$H(z) = z^{-N} \frac{A(z^{-1})}{A(z)}$$

$$A(z) = \sum_{n=0}^N a_n z^{-n} \quad (\text{con } a_0 = 1)$$

$$|H(\omega)|^2 \stackrel{\otimes}{=} H(z) H(z^{-1}) \Big|_{z=e^{j\omega}} =$$

$$= z^{-N} \frac{A(z^{-1})}{A(z)} z^N \frac{A(z)}{A(z^{-1})} = 1$$

Se z_0 è uno di zero di $H(z)$

$$\Rightarrow A\left(\frac{1}{z_0}\right) = 0 \Rightarrow \frac{1}{z_0} \text{ è un polo di } H(z)$$

Coppie poli-zeri reciproci

Elemento base di $H_{ap}(z)$ in forma fattorizzata

$$H_{ap_1}(z) = \frac{z^{-1} - \beta_k}{1 - \beta_k^* z^{-1}}$$

Infatti..

$$H_{ap}(z) = \prod_{k=1}^{N_R} \frac{z^{-1} - d_k}{1 - d_k^* z^{-1}} \prod_{k=1}^{N_C} \frac{(z^{-1} - \beta_k)(z^{-1} - \beta_k^*)}{(1 - \beta_k z^{-1})(1 - \beta_k^* z^{-1})}$$

$$\begin{cases} -1 < d_k < 1 \\ |\beta_k| < 1 \end{cases}$$

$$H_{ap,1}(z) = \frac{z^{-1} - \beta_k}{1 - \beta_k^* z^{-1}}$$

$$\beta_k = r e^{-j\theta}$$

$$H_{ap,1}(\omega) = \frac{e^{-j\omega} - r e^{-j\theta}}{1 - r e^{j\theta} e^{-j\omega}} = e^{-j\omega} \frac{1 - r e^{j(\omega - \theta)}}{1 - r e^{-j(\omega - \theta)}}$$

$$\Rightarrow \varphi_{ap,1}(\omega) = -\omega - \arctan \frac{r \sin(\omega - \theta)}{1 - r \cos(\omega - \theta)} +$$

$$- \arctan \frac{r \sin(\omega - \theta)}{1 - r \cos(\omega - \theta)} =$$

$$= -\omega - 2 \arctan \frac{r \sin(\omega - \theta)}{1 - r \cos(\omega - \theta)}$$

RITARDO DI GRUPPO

$$\Rightarrow \tau_{ap,1}(\omega) = - \frac{d \varphi_{ap,1}(\omega)}{d\omega} = \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r \cos(\omega - \theta)}$$

Per un sistema causale e stabile si ha $0 < r < 1$

$$\Rightarrow \tau(\omega) \geq 0$$

Nella forma generale $H_{ap}(\omega)$

si avrà ancora $\tau(\omega) \geq 0$

▣ Sistemi a fase minima, a fase massima,
a fase mista ▣

Consideriamo un FIR di ordine M

M zeri $z_1, z_2, \dots, z_M$

lunghezza $M+1$

Studiamo gli effetti della posizione degli zeri
rispetto al cerchio unitario -

Coeff. reali $\Rightarrow z_i$ reali e/o coppie compl. con.

$$H(\omega) = b_0 (1 - z_1 e^{-j\omega})(1 - z_2 e^{-j\omega}) \dots (1 - z_M e^{-j\omega})$$

$b_0 > 0$ senza perdere generalità.

Caso $M=1$, unico zero reale $z_1 = a$ ($b_0 = 1$)

$$H_1(\omega) = 1 - a e^{-j\omega}$$

$$\varphi_1(\omega) = \angle H_1(\omega)$$

Valutiamo $\varphi_1(\pi) - \varphi_1(0)$

$$\text{Poich\'e } H_1(\pi) = 1 + a$$

$$H_1(0) = 1 - a$$

$\Rightarrow$

$$\Rightarrow \varphi_1(\pi) - \varphi_1(0) = \begin{cases} 0 & |a| < 1 \\ -\pi/2 & a = \pm 1 \rightarrow \text{caso limite} \\ \pi & |a| > 1 \end{cases}$$

Cambio di fase nullo tra 0 e π

$\Rightarrow$ sistema a fase minima

Cambio di fase π tra 0 e π

$\Rightarrow$ sistema a fase massima

Estensione al caso generale con M zeri z_i

$|z_i| < 1 \quad \forall i$ (anche per gli zeri coniugati)

$\Rightarrow$ somma delle fasi

$\Rightarrow$ cambio globale di fase tra 0 e π è nullo

$\Rightarrow$ sistema a fase minima

Un singolo zero $z_e \in \mathbb{R}$ $|z_e| > 1$ contribuisce
al salto di π della fase tra 0 e π

La coppia z_k, z_k^* con $|z_k| > 1$
contribuisce al salto di 2π

Se abbiamo tutti gli zeri esterni al cerchio
unitario, allora $\angle H(\pi) - \angle H(0) = M\pi$
e il sistema è a fase massima.

Situazione intermedia

Zeri $\nearrow$ alcuni interni
 $\searrow$ alcuni esterni al cerchio unitario

$\Rightarrow$ Sistemi a fase mista
(o a fase non minima)

Valutiamo $\tau(\omega) = - \frac{d\phi(\omega)}{d\omega}$

Misura il ritardo temporale che la componente alla frequenza ω del segnale subisce passandolo attraverso il sistema $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ sistemi a fase minima introduce il ritardo minimo.

Dato un qualunque FIR a coefficienti reali:

$$|H(\omega)|^2 = H(z)H(z^{-1}) \Big|_{z=e^{j\omega}} \quad (\text{ORDINE } M)$$

Sostituendo z_k con $\frac{1}{z_k}$, la risposta in ampiezza non cambia.

M zeri $\Rightarrow 2^M$ possibili configurazioni di posizioni degli M zeri

DENTRO / FUORI CERCHIO UNITARIO

2^M Configurazioni $\begin{cases} \nearrow 1 \text{ config. con zeri tutti interni} \\ \rightarrow 1 \text{ config. " " esterni} \\ \searrow 2^M - 2 \text{ config. miste.} \end{cases}$

$\begin{cases} 1 \text{ configurazione} \Rightarrow \text{fase minima} \\ 1 \text{ config.} \Rightarrow \text{fase massima} \\ \text{tutte le altre config.} \Rightarrow \text{fase mista} \end{cases}$

Si noti che una coppia di zeri reali ha 4 possibili configurazioni $\begin{matrix} dd \\ \diagdown \\ fd \\ \diagup \\ ff \end{matrix}$

mentre una coppia di zeri complessi coniugati ha 2 possibili configurazioni $\begin{matrix} dd \\ \diagdown \\ ff \end{matrix}$

Consideriamo un IIR stabile e Causale

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)}$$

fase minima: poli e zeri interni

fase massima: zeri esterni, poli interni

fase mista: alcuni zeri interni
 alcuni zeri esterni
 poli interni

IIR stabile a fase minima $\Rightarrow$ ha inversa stabile

$$H^{-1}(z) = \frac{A(z)}{B(z)} \text{ a fase minima}$$

IIR stabile a fase non minima $\Rightarrow$ non ha sistema inverso stabile

Scomposizione di $H(z)$ a fase non minima

$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)}$ causale stabile con almeno uno zero esterno al cerchio unitario

$$B(z) = B_1(z) B_2(z)$$

Il polinomio $B_1(z)$ ha radici interne al cerchio unitario

Il polinomio $B_2(z)$ ha radici esterne al cerchio unitario.

$\Rightarrow B_2(z^{-1})$ ha radici interne al cerchio unitario.

Per definizione $H_{\min}(z) \triangleq \frac{B_1(z) B_2(z^{-1})}{A(z)} \cdot z^{-N_c}$

$H_{\text{ap}}(z) = \frac{B_2(z)}{B_2(z^{-1}) \cdot z^{-N_c}}$
 passo-tiro stabile a fase massima
 eventuale termine z^{-N_c} per la causalità di $H_{\min}(z)$

Dunque $H(z) = H_{\min}(z) \cdot H_{\text{ap}}(z)$ 

$$\tau_g(\omega) = \tau_g^{\min}(\omega) + \tau_g^{\text{ap}}(\omega)$$

per $0 \leq \omega \leq \pi$ $\tau_g^{\text{ap}}(\omega) \geq 0$ (già dimostrato)

$$\Rightarrow \tau_g(\omega) \geq \tau_g^{\min}(\omega)$$

Tra tutti i sistemi con la stessa risposta in ampiezza, il sistema a fase minima ha il minimo ritardo di gruppo

Definiamo $E(n) = \sum_{k=0}^n |h(k)|^2$

l'energia parziale del sistema.

Tra tutti gli $H(z)$ con la stessa risposta in ampiezza, quello a fase minima ha l'energia parziale maggiore.

$$E^{\min}(n) \geq E(n) \quad \text{tra tutti gli } H(z) \\ \text{con uguale } |H(w)|$$
