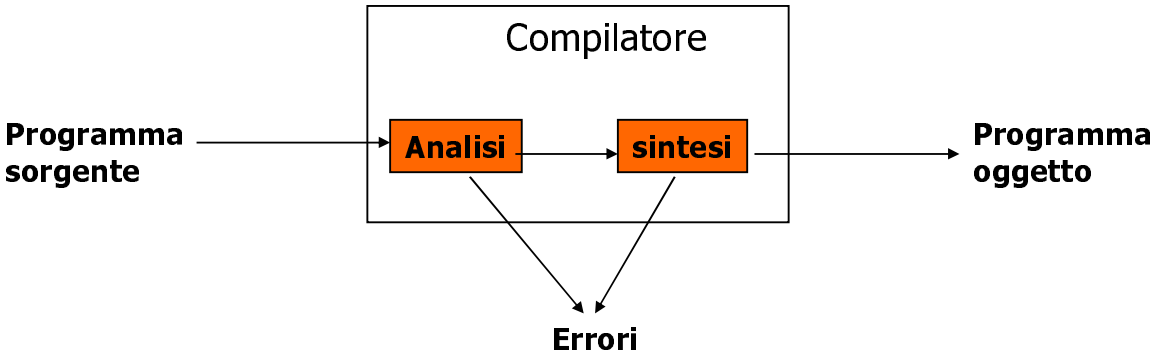
Linguaggi Formali e Compilatori

I compilatori

- Un **compilatore** è un **traduttore** in grado di trasformare un programma scritto in un linguaggio (**sorgente**) in un programma scritto in un altro linguaggio (**oggetto**)

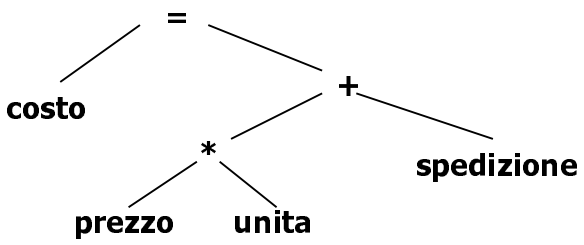


I compilatori II

- Il processo di compilazione consiste di due parti: **analisi** e **sintesi**
- analisi
  - divide il programma sorgente nei suoi componenti elementari
  - basandosi sulle relazioni fra i componenti crea una **rappresentazione intermedia** del programma
- sintesi
  - costruisce il programma oggetto dalla rappresentazione intermedia

Analisi

- I componenti elementari di un programma sono: identificatori, operatori, variabili,..
- La rappresentazione intermedia è codificata da una struttura dati a forma di albero (**albero sintattico**)




```
costo=prezzo*unita+spedizione
```

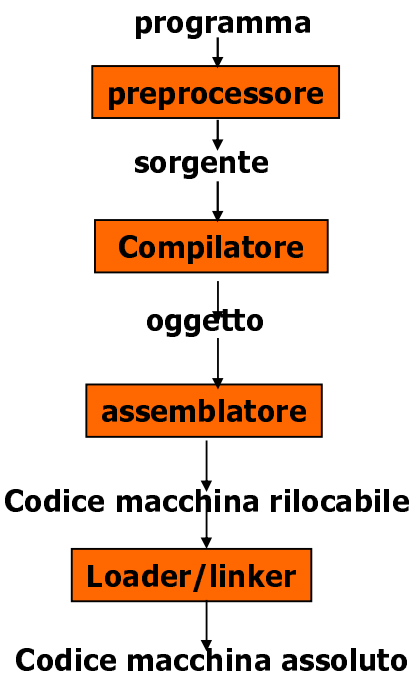
Sintesi

- L'albero sintattico descrive il programma sorgente e le relazioni fra i suoi componenti elementari
- La fase di sintesi usa questa informazione per produrre un codice oggetto **semanticamente equivalente** al codice sorgente
- Il codice oggetto è un programma che può essere eseguito sulla stessa macchina o su una diversa

Campi di applicazione

- Molti strumenti implementano tecniche derivanti da quelle impiegate nei compilatori
  - Interpreti
  - Editori guidati da sintassi
  - RAD
  - Browser
  - Word processor
  - Formattatori di testo
  - Interpreti di interrogazioni

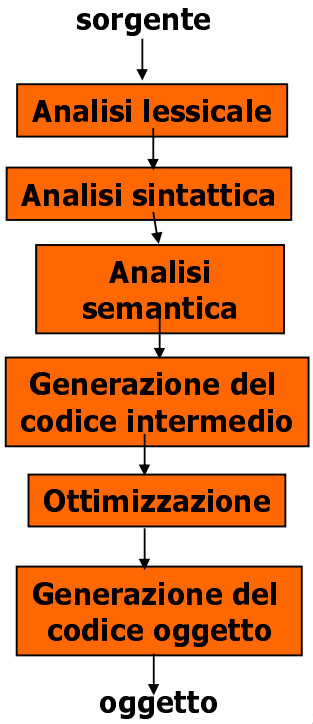
L'uso di un tipico compilatore



- La tipica compilazione di un programma prevede l'uso di altri strumenti oltre al compilatore
  - un preprocessore
  - un assemblatore
  - un loader/linker

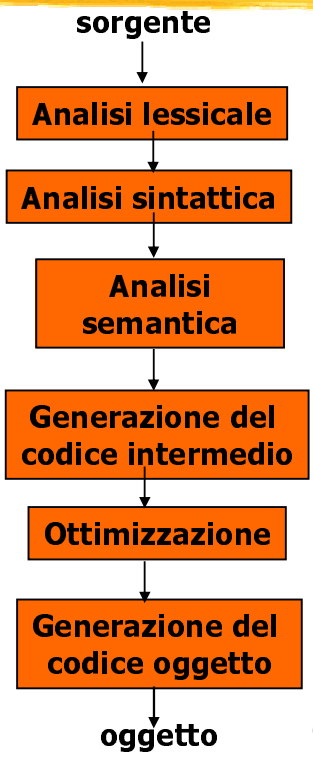
La struttura di un compilatore

- Un compilatore opera in diverse fasi
  - **analisi lessicale**:
    individua le componenti elementari
  - **analisi sintattica:**
    generazione dell'albero sintattico
  - **analisi semantica:**
    si fanno verifiche sul programma in ingresso per accertarsi che sia corretto (ad es., una variabile è dichiarata prima di essere usata)



La struttura di un compilatore II

- **generazione codice intermedio**:
  si genera un codice intermedio indipendente dalla macchina per la quale si compila
- **ottimizzazione**:
  il codice viene ottimizzato (ad es., si rimuove il codice non raggiungibile)
- **generazione del codice oggetto:**
  Il codice intermedio ottimizzato viene tradotto nel codice oggetto



Analisi lessicale e sintattica

- Analisi lessicale

`costo=prezzo*10+spedizione` ⇒ `costo=unità*10+spedizione`

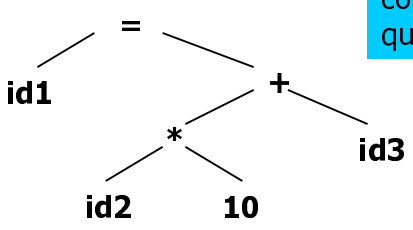
Tabella dei simboli

costo	....
unita	...
spedizione	....
.....	....

E' inizializzata dall'analizzatore lessicale e completata da quello sintattico

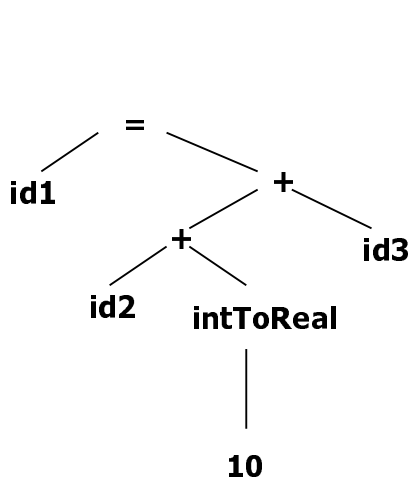
- Analisi sintattica

`id1=id2*10+id3` ⇒



Analisi semantica

- Analisi semantica

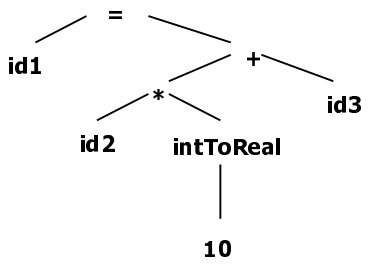


Controlli

- **id1, id2, id3 sono stati definiti ?**
- **id2, id3 sono stati inizializzati?**
- **Id1, id2, id3 sono di tipo Real?**
- **.....**

Generazione del codice intermedio e ottimizzazione

- Generazione codice intermedio




```
tmp1=intToReal(10)
tmp2=id2*tmp1
tmp3=id3+tmp2
id1=tmp3
```

- Ottimizzazione

```
tmp1=id2*10.0
id1=tmp1+id3
```

Generazione del codice oggetto

- Generazione codice oggetto

```
tmp1=id2*10.0
id1=tmp1+id3
```

Codice generico

```
movf id2, R2
mulf #10.0, R2
movf id3, R1
addf R2, R1
movf R1, id1
```

Assembler per una architettura specifica

Cosa studieremo

- Ci concentreremo sull'analisi lessicale e sintattica (le prime due fasi)
- analisi lessicale:
  - linguaggi regolari (i linguaggi che riconosce)
  - come si costruisce un analizzatore lessicale
- analisi sintattica:
  - linguaggi liberi da contesto (i linguaggi che riconosce)
  - esitono vari tipi di analizzatori sintattici, ne vedremo alcuni

Analisi lessicale

Linguaggi

- Un **alfabeto** $\Sigma=\{a1,a2,..,an\}$ è un insieme di simboli
- Una **stringa** è una sequenza finita di simboli
- Con l'insieme Σ^* si rappresenta l'insieme di tutte le stringhe sull'alfabeto Σ
- Un **linguaggio** $L(\Sigma)$ sull'alfabeto Σ è un sottoinsieme di Σ^*, cioè $L(\Sigma) \subseteq \Sigma^*$

Linguaggi II

- Ad esempio, l'insieme dei numeri binari reali
  - Σ ={0,1,"."}
  - Σ*={0, 1, 0.0, 0.1, .., , 0.0.0, 0.0.1, ...}

    contiene stringhe che **non rappresentano numeri reali**
  - L(Σ) ={0, 1, 0.0, 0.1, ... , ...}

    contiene solo i numeri reali corretti

Linguaggi III

- Un linguaggio L(Σ) può essere definito
  - elencando le stringhe (se è finito)
  - definendo delle regole che
    - verificano se una stringa appartiene a L
    - costruiscono tutte le stringhe che appartengono a L
- Le **espressioni regolari** definiscono una classe di **linguaggi regolari**

Espressioni regolari

- Le **espressioni regolari** definiscono un'algebra analoga a quella delle espressioni aritmetiche
- Simboli atomici
  - Un carattere **c** ($c \in \Sigma$)
  - Il simbolo **ε** (la stringa vuota)
  - Il simbolo ∅ (insieme vuoto)
  - Una variabile
- 3 operatori
  - La concantenazione (binario)
  - L'unione **|** (binario)
  - La chiusura di Kleene ***** (unario)

Un'espressione regolare sull'alfabeto $\Sigma=\{0,1\}$

0(0|1)*

Le parentesi definiscono la precedenza fra gli operatori

Il valore delle espressioni regolari

- Il **valore di un'espressione** regolare **E** è dato dal linguaggio che essa rappresenta **L(E)**
- Valore dei simboli atomici
  - $L(c)=\{c\}$ (c è un simbolo dell'alfabeto Σ)
  - $L(\varepsilon)=\{\varepsilon\}$ (ε è un simbolo speciale che rappresenta la stringa vuoto, $\varepsilon \notin \Sigma$)
  - $L(\emptyset)=\emptyset$ (l'insieme vuoto)
  - Per una variabile v a cui è stata associata un'espressione E, $L(v)=L(E)$

L'unione

- Il valore dell'operatore di **unione** è definito da
  - Se R e S sono due espressioni regolari, allora

    $$L(R \mid S)=L(R) \cup L(S)$$

  - ad esempio, il l'espressione che rappresenta il linguaggio che contiene 1, 0 e la stringa vuota è

    $$L(1 \mid 0 \mid \varepsilon)$$

- L'operatore | è **associativo** (l'unione fra insiemi è associativa)
  - $R \mid S \mid T = (R \mid S) \mid T = R \mid (S \mid T)$

La concatenazione

- La **concatenazione** non è rappresentata da alcun simbolo, ma dalla giustapposizione di due espressioni RS
- Il valore della concatenazione RS è costruito concatenando tutte le stringhe in R con quelle in s
  - $L(R\ S)=\{rs \mid r \in R,\ s \in S\}$

Concatenazione fra stringhe

- La concatenazione è associativa
  - $RST = (RS)T = R(ST)$

La concatenazione II

- Esempio 1
  - R={+,-}, S={0,1}
  - L(RS)={+0,-0,+1,-1}
- Esempio 2
  - R={anda,da}, M={re,to}
  - L(RS)={andare,dare,andato,dato}

La cardinalità

- Con |L(E)| si denota la **cardinalità** di L, ovvero il numero delle stringhe contenute in E
- La cardinalità soddisfa le seguenti proprietà
  - $|L(R|S)| \leq |L(R)| + |L(S)|$
  - $|L(RS)| \leq |L(R)|\ |L(S)|$
- E' possibile sostituire $\leq$ con = ?

La chiusura

- L'operatore di **chiusura** di Kleene * indica 0 o più ripetizioni
- L(R*) contiene
  - La stringa vuota ε
  - tutte le stringhe di L(R), L(RR), L(RRR), L(RRRR),...
- Esempio
  - R={0,1}
  - L(R*) è l'insieme di tutti gli interi binari più la stringa vuota
  - L(R*)={ε,0,1,00,01,10,11, ...}

La chiusura

- Nel seguito R^n rappresenta R ripetuto n volte
  - $R^0=\{\varepsilon\}$, $R^1=R$, $R^2=RR$, $R^3=RRR$
- Formalmente:
  - $R^0=\{\varepsilon\}$, $R^n=R\ R^{n-1}$
  - $L(R^*) = \cup_{n=0..\infty} L(R^n)$
- Attenzione: L(R*) non contiene stringhe infinite !!

Esempi di espressioni regolari

- Gli identificatori in PASCAL

  Carattere (Carattere|Cifra)*

  - dove si è definito

    Carattere=A|B ...|Z|a|b| ...|z

    Cifra= 0|1|...|9

- La **precedenza fra gli operatori** è la seguente
  - chiusura
  - concatenazione
  - unione

Esempi di espressioni regolari II

- Tutte le stringhe di 0 e 1 che terminano con 0

  (0|1)*0

- Tutte le stringhe di 0 e 1 con almeno un 1

  (0|1)*1 (0|1)*

- Tutte le stringhe di 0 e 1 con al più un 1

  0*10*

- Tutte le stringhe di 0 e 1 tali che la terza posizione a partire da destra è 1

  (0|1)*1(0|1)(0|1)

Esempi di espressioni regolari III

- Tutte le stringhe di 0 e 1 che contengono un numero pari di 1

(0|10*1)*

- Tutte le stringhe di 0 e 1 tali che le sequenze di 1 hanno lunghezza pari

(0|11)*

- Tutte le stringhe di 0 e 1 che rappresentano multipli di 3

(0|1(01*0)*1)*

Proprietà algebriche delle espressioni regolari

- Due espressioni regolari E, S si dicono equivalenti E≡S se

L(R)=L(S)

- Le proprietà algebriche delle espressioni regolari ricordano quelle delle espressioni aritmetiche (concatenazione = prodotto, unione=somma), ma la **concatenazione non è commutativa**

- Elemento neutro
  - Eε≡εE≡E (ε è l'elemento neutro della concatenazione)
  - E|∅≡ ∅|E≡E (∅ è l'elemento neutro dell'unione)
- Elemento nullo
  - E∅≡ ∅E≡ ∅ (∅ è l'elemento nullo della concatenzazione)

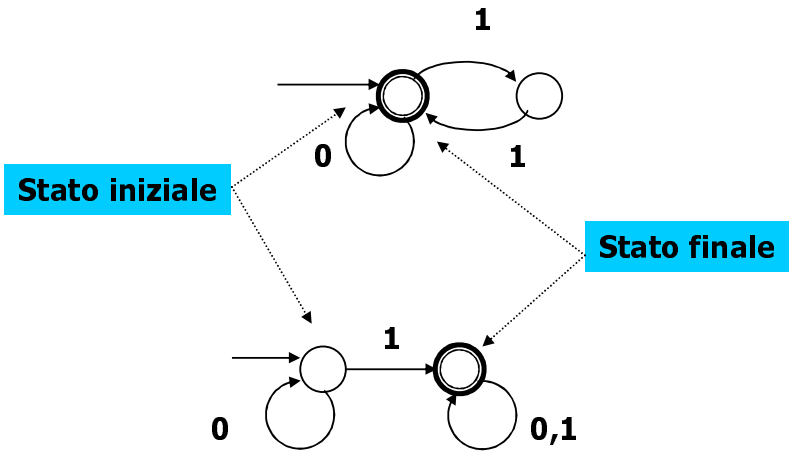
Proprietà algebriche delle espressioni regolari II

- Commutatività
  - $R|S \equiv S|R$
  - (la concatenazione non è commutativa)
- Associatività
  - $R \mid S \mid T \equiv (R \mid S) \mid T \equiv R \mid (S \mid T)$
  - $RST \equiv (RS)T \equiv R(ST)$
- Distributività della concatenazione sull'unione
  - $(S|T)R \equiv (SR|TR)$
  - $R(S|T) \equiv (RS|RT)$

Proprietà algebriche delle espressioni regolari III

- Idempotenza dell'unione
  - $R|R \equiv R$
- Proprietà della chiusura
  - $\varnothing^* \equiv \varepsilon$
  - $R^*R \equiv RR^*$
  - $R^*R \mid \varepsilon \equiv R^*$
- Esempio
  - $(0|1)^*(10|11)(0|1)$
  - $\equiv (0|1)^*1(0|1)(0|1)$
  - $\equiv (0|1)^*1(00|01|10|11)$

Espressioni regolari e automi a stati finiti



Tutte le stringhe tali che le sequenze di 1 hanno lunghezza pari

(0|11)*

Tutte le stringhe con almeno un 1

(0|1)*1 (0|1)*

Espressioni regolari e automi a stati finiti II

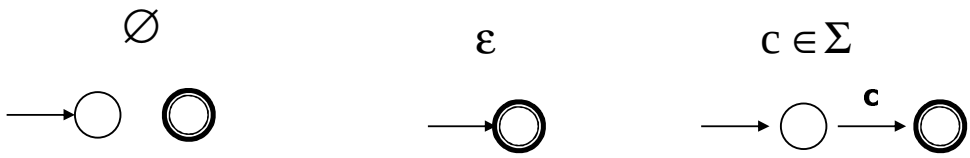
- Si può dimostrare che
  - **Data un'espressione regolare E esiste un automa a stati finiti A che accetta il linguaggio L(E)**
  - **Dato un automa a stati finiti A che accetta il linguaggio L, esiste un'espressione regolare E tale che L=L(E)**
- Quindi
  - Automi a stati finiti e espressioni regolari hanno lo stesso potere espressivo
  - Gli automi a stati finiti possono essere usati per riconoscere se una stringa appartiene o meno ad un linguaggio regolare

Da espressioni regolari e automi a stati finiti

- La costruzione dell'automa richiede tre passi
  - Dall'espressione regolare si costruisce un **automa non deterministico** con ε-transizioni
  - Si trasforma l'automa non deterministico in un **automa deterministico**
  - Eventualmente, si trasforma ancora l'automa in modo da **minimizzare il numero degli stati**
- Di seguito vedremo come funzionano tali passi

Costruzione di automi non deterministici

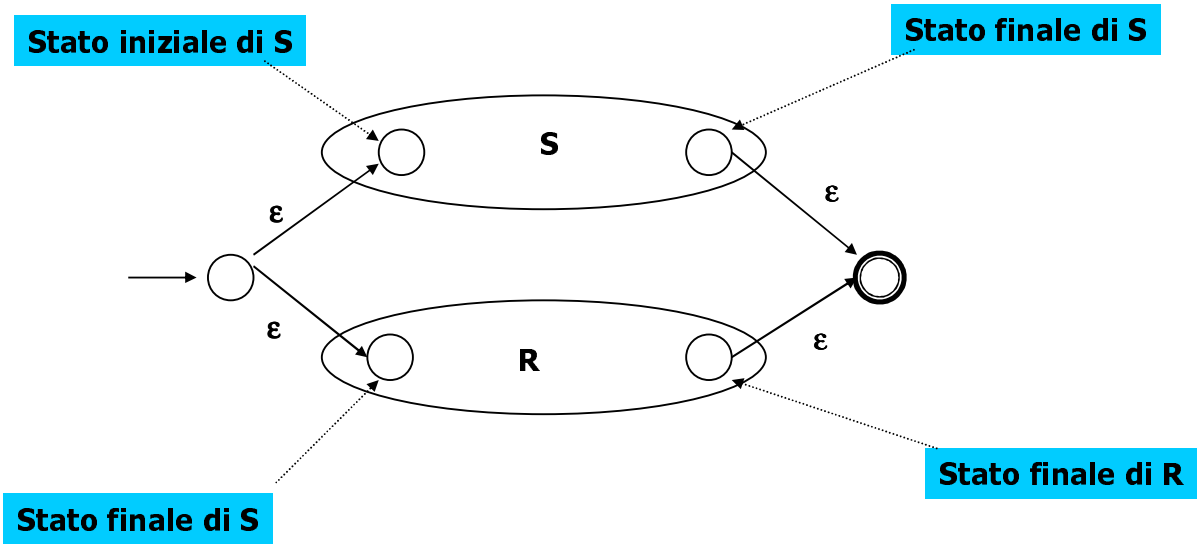
- La strategia di costruzione dell'automa non deterministico può essere **definita per induzione**
- Se l'espressione E è un operando atomico $\varnothing$, ε, $c \in \Sigma$



- Nel seguito si suppone di conoscere come costruire l'automa per le espressioni R, S e si mostra come costruire quelle per R|S, RS e R*

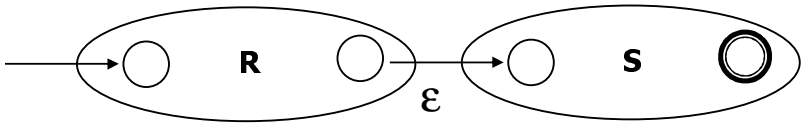
Unione

- L'espressione R|S



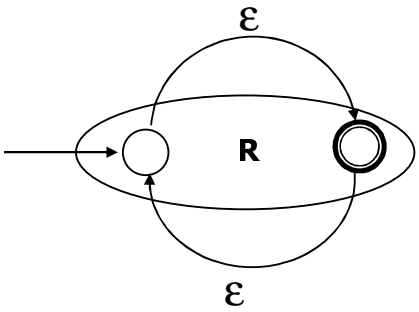
Concatenazione e chiusura

- L'espressione RS



- Lo stato iniziale di RS coincide con quello di R
- Lo stato finale di RS coincide con quello di S

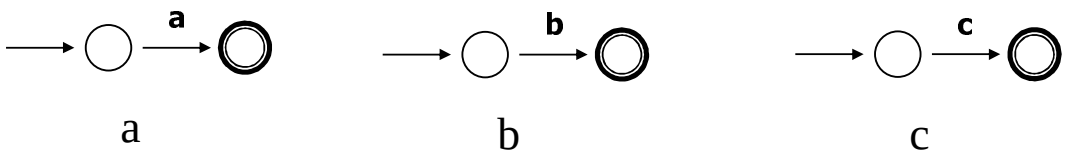
- L'espressione R*



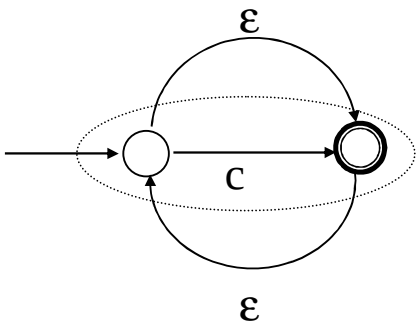
Gli stati iniziali e finali di R* coincidono con quelli di R

Un esempio: a|bc*

- Le espressioni atomiche

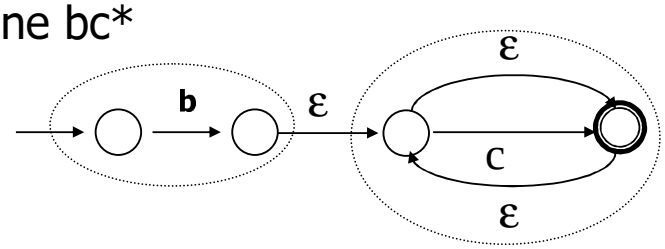


- L'espressione c*

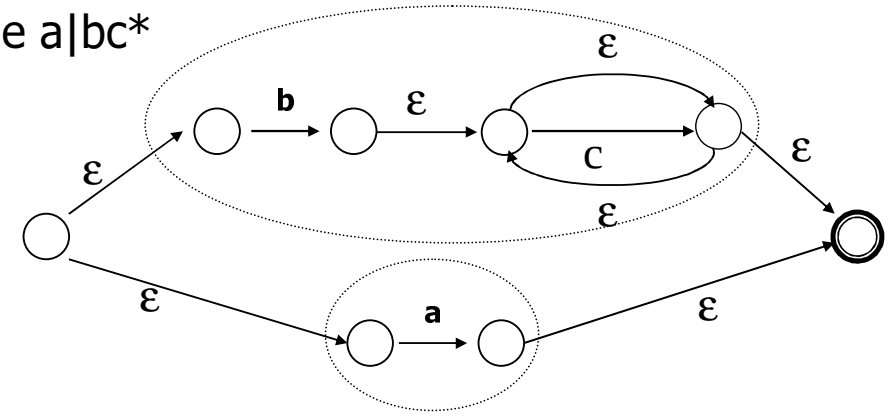


Un esempio: a|bc*

- L'espressione bc*



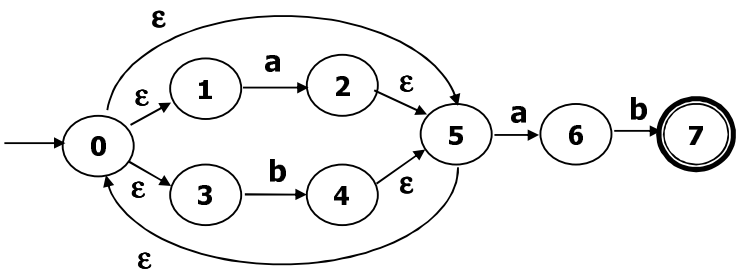
- L'espressione a|bc*



Da automa non deterministico ad automa deterministico

- E' possibile trasformare un automa non deterministico (NFA) in uno deterministico (DFA)
  - Gli stati del DFA corrispondono a **insiemi di stati** del NFA
- Si definisce l'ε-chiusura di un insieme di stati {s1,s2,…,sn} del NFA
  - ε-chiusura(s)={gli stati raggiungibili da s con ε-transizioni}
  - ε-chiusura({s1,s2,…,sn})=U_n ε-chiusura(s_n)
- Si definisce la funzione transizione
  - tr({s1,s2,…,sn},a)= {gli stati raggiungibili con una transizione a da uno degli stati s1,s2,…,sn}

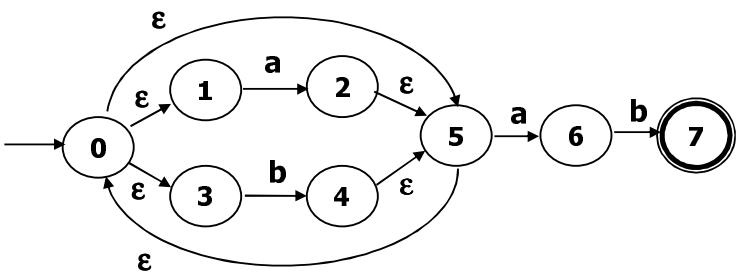
L' ε-chiusura



(a|b)*abb

- Esempi
  - ε-chiusura(0)={0,1,3,5}, ε-chiusura(1)={1}, ε-chiusura(2)={2,5,0,1,3}
  - ε-chiusura(3)={3}, ε-chiusura(4)={4,5,0,1,3}, ε-chiusura(5)={5,0,1,3}
  - ε-chiusura(6)={6}, ε-chiusura(7)={7}
  - ε-chiusura({5,4})=ε-chiusura(4) U ε-chiusura(5)={4,5,0,1,3}U{5,0,1,3} ={4,5,0,1,3}

La funzione tr



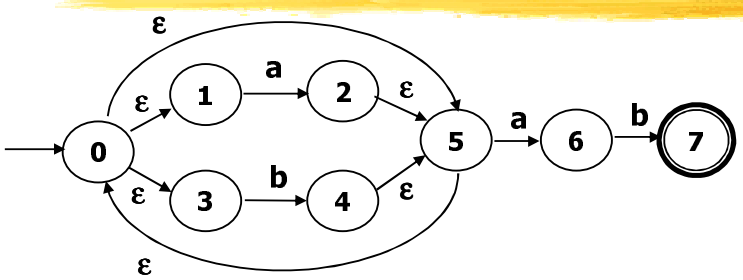
(a|b)*ab

- Esempi
  - tr(0,a)= ∅, tr(1,a)={2}, tr(2,a)= ∅, tr(3,a)=∅, ...
  - tr(0,b)= ∅, tr(1,b)= ∅, tr(2,b)= ∅, tr(3,b)={4}, ...
  -

Da automa non deterministico ad automa deterministico II

- Inizializza il DFA con lo stato ε-chiusura(0)
- **For each** S=(stato non ancora marcato del DFA) **do**
  - marca S
  - **For each** a=simbolo **do**
    - R= ε-chiusura(tr(S,a))
    - Elminia stati non importanti da R
    - **if** (R non esiste) **then** aggiungi lo stato R al DFA
    - aggiungi una transizione a dallo stato S allo stato R
    - **end**
  - **end**

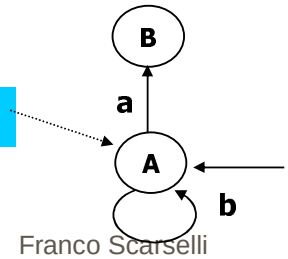
Un esempio



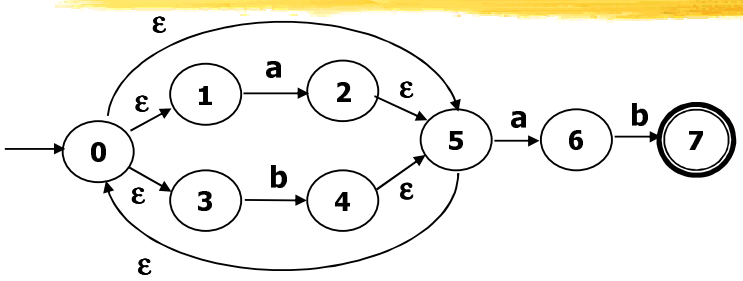
Si considerano solo gli stati importanti (si escludono gli stati che hanno solo ε-transizioni uscenti)

- A=ε-chiusura(0)={0,1,3,5} ≡{1,3,5}
- B= ε-chiusura(tr(A,a))=ε-chiusura({2,6})={2,5,0,1,3,6}≡{5,1,3,6}
- ε-chiusura(tr(A,b))=ε-chiusura({4})={4,5,0,1,3} ≡{5,1,3}=A

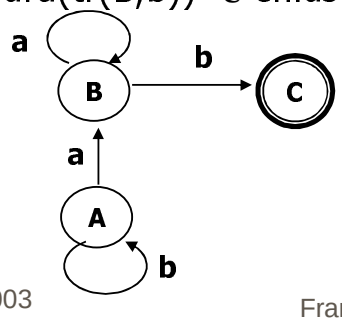
Lo stato iniziale è ε-chiusura(0)



Un esempio II

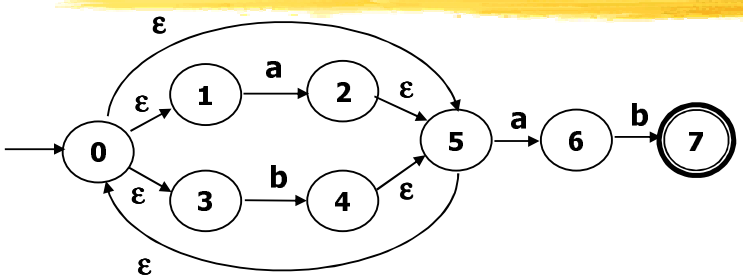


- A={1,3,5}, B={5,1,3,6}
- ε-chiusura(tr(B,a))=ε-chiusura({6,2})={6,2,5,0,1,3} ≡B
- C= ε-chiusura(tr(B,b))=ε-chiusura({4,7})={4,7,5,0,1,3} ≡{7,5,1,3}

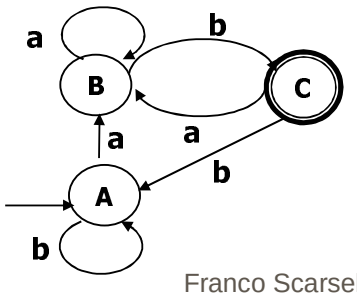


Ogni stato contenente uno stato finale del NFA è finale nel DFA

Un esempio III

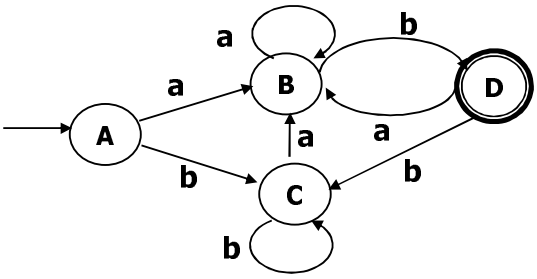


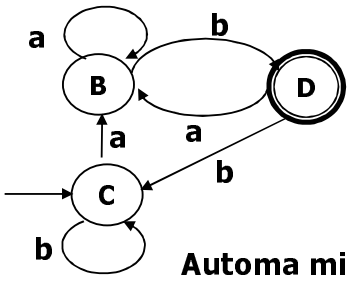
- A={1,3,5}, B={5,1,3,6}, C={7,5,1,3}
- ε-chiusura(tr(C,a))=ε-chiusura({6,2})={6,2,5,0,1,3} ≡{6,5,1,3}=B
- ε-chiusura(tr(C,b))=ε-chiusura({4})={4,5,0,1,3} ≡{5,1,3}=A



Trovare l'automa minimo

- L'automa prodotto potrebbe non essere quello minimo (che ha il numero minimo di stati)
- Si può dimostrare che per ogni linguaggio **l'automa minimo è unico**
- alcuni stati possono essere equivalenti, nell'esempio **A≡B**



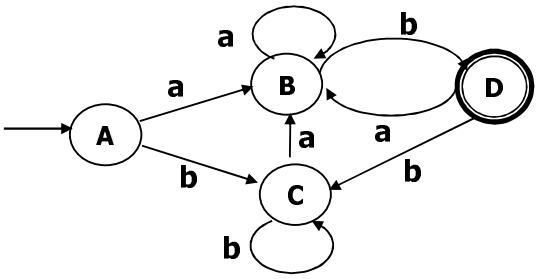


Automa minimo

Trovare gli stati equivalenti

- L'algoritmo inizia con una partizione P={F,A} degli stati che contiene l'insieme degli stati finali (F) e quello degli altri stati (A)
- **Repeat**
  - scegli un insieme S in P e un simbolo a tale che tr(S,a)$\notin$P
  - suddividi S in insiemi S1, S2, ..Sn tali che quando P viene aggiornato tr(Si,a)$\in$P
  - **until** tr(S,a)$\in$P per ogni a e ogni S

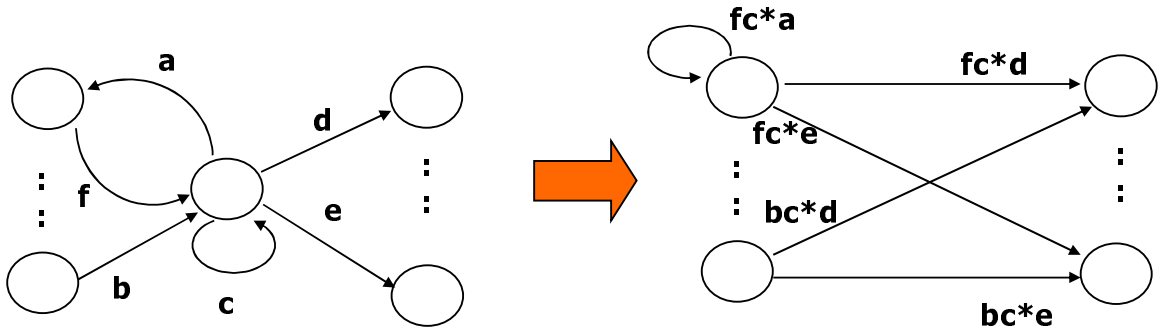
Un esempio



- All'inizio P={{A,B,C}, {D}}
- Si considera {A,B,C} e il simbolo b
- Si osserva che tr(B,b)={D}, mentre tr({A,C},b)={C}
- Quindi P={{A,C}, {B}, {D} }
- A questo punto l'algoritmo si può fermare!!

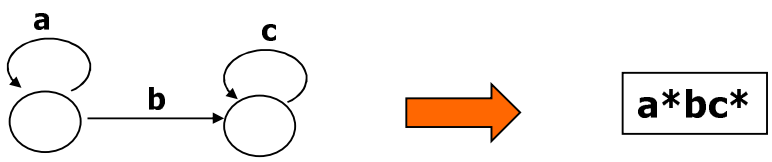
Da automa a espressione regolare

- Dato un automa è possibile generare l'espressione regolare che esso accetta
- Occorre rimuovere, ad uno ad uno, tutti gli stati dell'automa

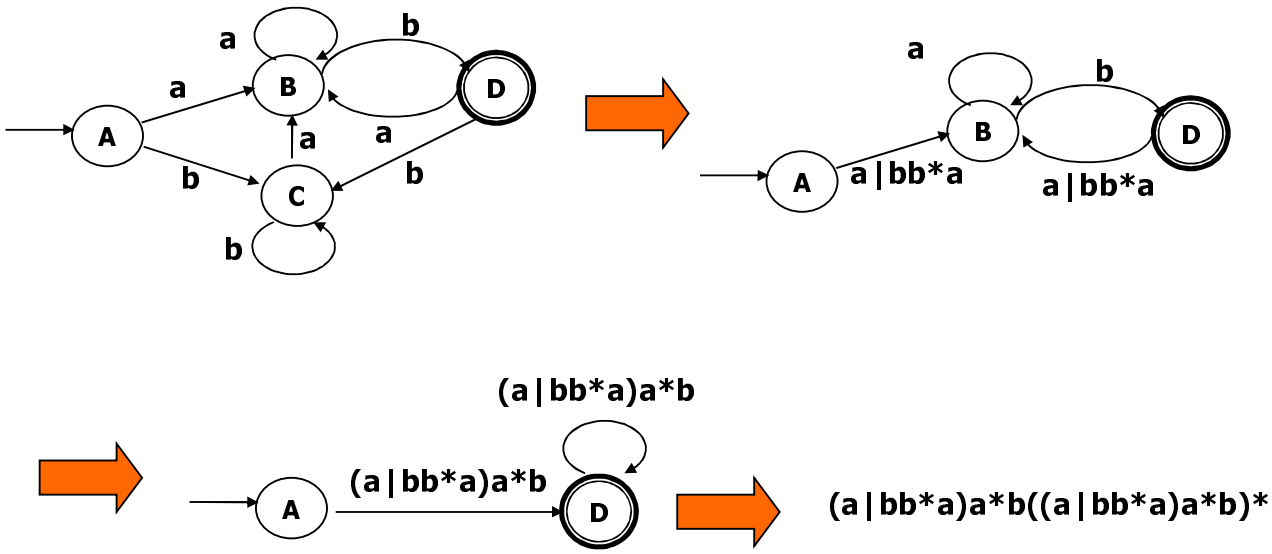


Da automa a espressione regolare II

- Si considerano **tutti** gli stati finali, **uno alla volta**
- Si **rimuovono gli stati** dell'automa fino quando non rimangono solo quello iniziale e quello finale scelto



Un esempio



Dove si usano le espressioni regolari ?

- Le espressioni regolari sono usate per
  - generazione di **analizzatori lessicali**
  - comandi di ricerca **negli editor**
  - **funzioni di libreria** che implementano il matching con espressioni regolari
  - **comandi** per la ricerca di pattern
- Molti di questi programmi sono stati sviluppati originariamente in Unix

Esempio: il comando grep

- Il comando Unix **grep** permette di realizzare un filtro con cui selezionare alcune righe di un testo

Questo comando Unix mostra il contenuto di una directory selezionando solo alcune righe

```
ls -l | grep '[mg]'
```

Comando che visualizza il contenuto di una directory

Simbolo di pipe, ridirige l'output

Seleziona solo le righe che soddisfano l'espressione regolare '[mg]'

Posix 1003.2

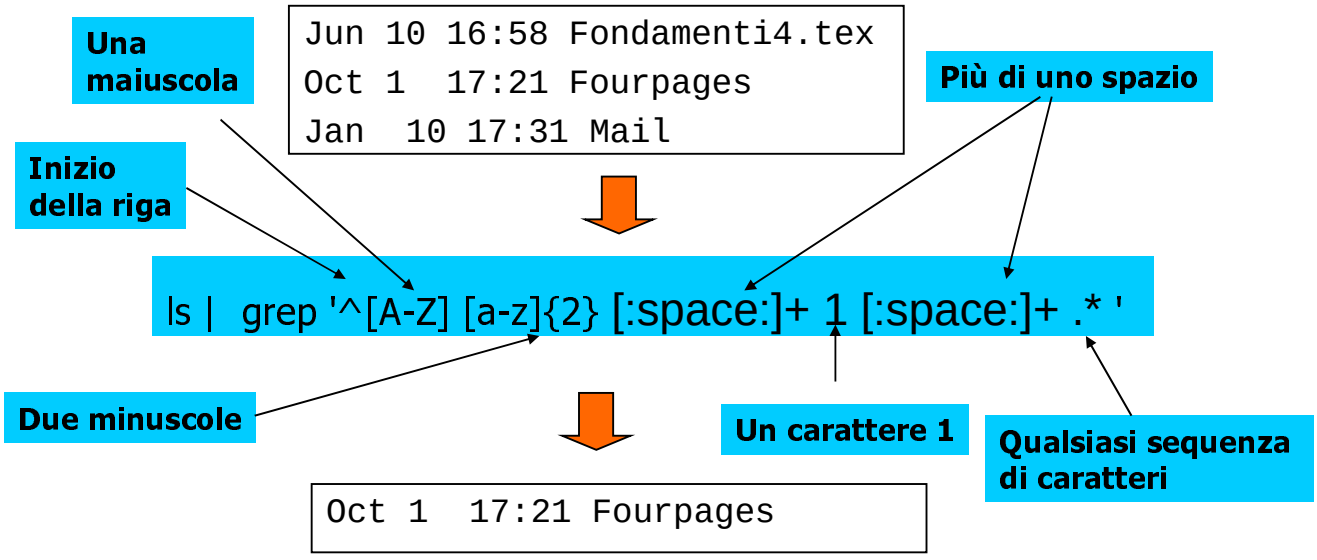
- Posix 1003.2 definisce uno standard con cui si specificano le espressioni regolari
- Operatori
  - E? (L'espressione E è opzionale)
  - E* (Chiusura di Kleene)
  - E+ (L'espressione E è ripetuta almeno una volta).
  - E{*n*} (L'espressione E è ripetuta esattamente n volte)
  - ^E (indica che E appare all'inizio di una riga)
  - E$ (indica che E appare alla fine di una riga)

Posix 1003.2 II

- Atomi
  - . (il punto indica un qualsiasi carattere)
  - [abcd] (qualsiasi carattere fra a, b, c, d)
  - [0-9] (le cifre, il simbolo "-" specifica che si devono prendere tutti in caratteri compresi fra 0 e 9)
  - [a-zA-Z] (tutte le lettere, maiuscole e minuscole)
- Classi predefinite
  - [:alpha:] (qualsiasi lettera)
  - [:digit:] (qualsiasi cifra)
  - [:space:] (qualsiasi carattere di spaziatura)

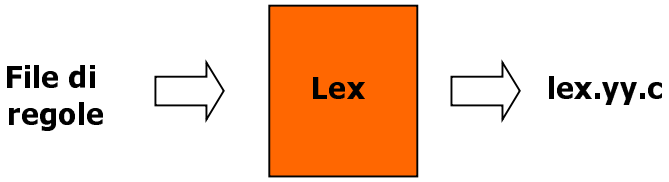
Un esempio

- Questo comando seleziona tutti i file modificati il primo del mese



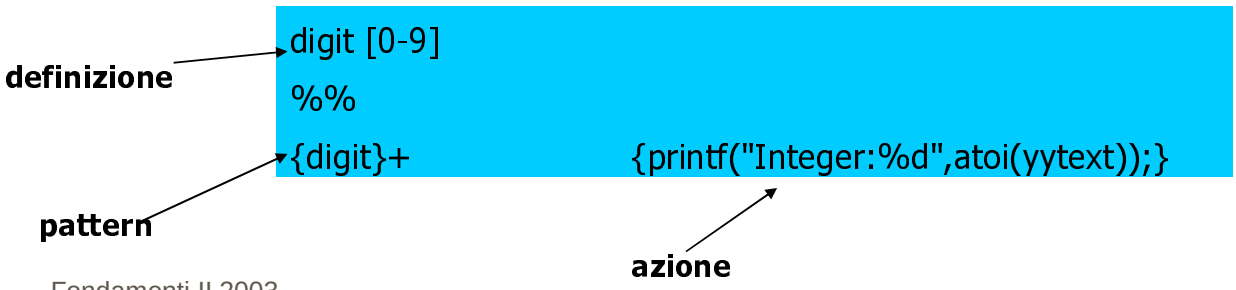
Generazione di analizzatori lessicali (Lex)

- In pratica, esistono strumenti che facilitano la realizzazione di analizzatori lessicali
- Lex è un generatore di analizzatori lessicali
- Lex prende in ingresso un file che contiene un insieme di regole e genera un file C che implementa un analizzatore lessicale



File di regole Lex

- Un file di regole Lex è costituito da una parte di **definizioni** e una di **regole**
- Le regole sono costituite da un **pattern** e **un'azione**
  - il pattern è un'espressione regolare
  - l'azione è codice C
  - l'analizzatore esegue il comando quando riconosce il pattern



Un esempio: riconoscere identificatori e parole chiave

Definizioni	digit [0-9]	
	id [a-z][a-z0-9]*	
inizio regole	%%	
interi	{digit}+	{printf("Integer:%d",atoi(yytext));}
reali	{digit}+"."{digit}+	{printf("Float:%g",atof(yytext));}
parole chiave	if|then|begin|end	{printf("Keyword:%s",yytext);}
identificatori	{id}	{printf("Identifier:%s",yytext);}
operatori	"+"|"-"|"/"|"*"	{printf("Operator:%s",yytext);}
rimuove gli spazi	[\t\n]	
caratteri sconosciuto	.	{printf("Unknown char.:%s",yytext);}

Analisi Sintattica

Le grammatiche libere da contesto

- Le **grammatiche libere** da contesto (context free) sono uno strumento con cui si possono definire i principali linguaggi di programmazione
- Una grammatica libera da contesto è definita da
  - Un insieme di **simboli terminali** che definiscono i simboli atomici del linguaggio
  - Un insieme di **simboli non terminali** (variabili) che definiscono le categorie sintattiche
  - Un insieme di **produzioni** che sono regole che definiscono come si possono generare le stringhe del linguaggio

Le grammatiche libere da contesto: un esempio

- La seguente grammatica genere le espressioni aritmetiche

regole

E -> n

E -> (E)

E -> E+E

E -> E-E

E -> E*E

E -> E/E

Il simbolo n indica un numero

Simboli terminali

T={(,), +, -, *, /, n}

Simboli non terminali

NT={E}

Esempi di espressioni generate dalla grammatica

n*n-n

(n+n)*n

(n-n)*(n+n)

La derivazione di un'espressione aritmetica

E -> E-E -> E*E-E -> n*E-E -> n*n-E -> n*n-n

Le grammatiche libere da contesto II

- Formalmente una grammatica libera da contesto è una quadrupla G=(V,T,P,S)
  - V è un insieme di **simboli non terminali**
  - T un insieme di **simboli terminali**
  - P un insieme di **produzioni** del tipo $A \to \alpha$, dove $A \in V$ e $\alpha \in (V \cup T)^*$
  - $S \in V$ è lo scopo o **simbolo di partenza**

Le grammatiche libere da contesto III

- Una **derivazione diretta**
  - $\beta A \gamma \Rightarrow \beta \alpha \gamma$
  - dove $\beta, \alpha, \gamma \in (V \cup T)^*$ e $A \to \alpha \in P$
- Una **derivazione**
  - $\alpha_1 \Rightarrow^* \alpha_n$
  - dove $\alpha_1,\ldots,\alpha_n \in (V \cup T)^*$ e $\alpha_1 \Rightarrow \alpha_2 \ldots \alpha_{n-1} \Rightarrow \alpha_n$
- Il **linguaggio L(G) generato** da una grammatica
  - $L(G)=\{\alpha \mid \alpha \in T^*,\ S \Rightarrow^* \alpha\}$

Un esempio

- In generale determinare cosa genera una grammatica è **un problema difficile**

Una grammatica che genera tutte le stringhe con lo stesso numeri di a e b

V={S,A,B}

T={a,b}

S->aB A->bA

S->bA B->b

A->a B->bS

A-aS B->aBB

Ipotesi

- S->α se e solo se α ha lo stesso numero di a e b
- A->α se e solo se α ha un numero di a maggiore di uno rispetto al numero dei b
- A->α se e solo se α ha un numero di b maggiore di uno rispetto al numero degli a

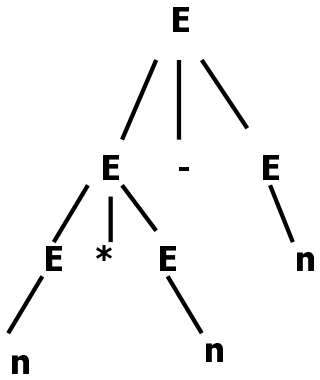
Dimostrazione per induzione su | α |

- se | α |=1, le uniche produzioni possibili sono A->a e B->b
- se | α |>1, si considera la prima produzione di A $\Rightarrow^*$ α
  - se è S->aB, allora aB contiene un a in più .....

Alberi sintattici e derivazioni

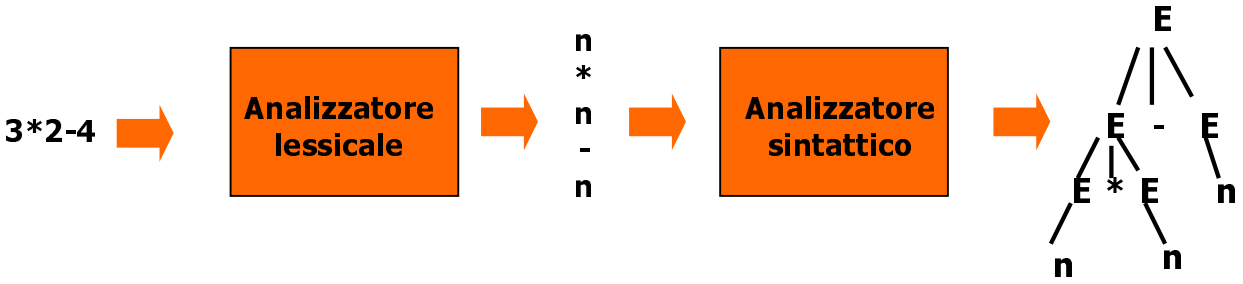
- Un **albero sintattico** (o albero di analisi) è una rappresentazione di una derivazione
- Ogni nodo corrisponde ad una produzione
- L'albero rappresenta quali produzioni sono state usate, ma **non l'ordine** in cui sono state usate

E -> E-E -> E*E-E -> n*E-E -> n*n-E -> n*n-n



Come cooperano l'analizzatore lessicale e quello sintattico

- Nei comuni compilatori
  - l'analizzatore lessicale riconoscere i **token** (simboli terminali) del linguaggio: numeri interi, reali, variabili, parole chiave, operatori, ...
  - l'analizzatore lessicale invia all'analizzatore sintattico la sequenza dei simboli terminali individuati
  - l'analizzatore sintattico analizza la sequenza di simboli terminali e produce l'albero sintattico



Costruire un analizzatore sintattico dalla grammatica

- Come fa un analizzatore a decidere se una stringa w appartiene al linguaggio generato dalla grammatica G ?

- Analizzatori discendenti (top down)
  - Partendo da simbolo S si tenta di ricostruire l'albero di derivazione con cui si ottiene w
  - Si usa le regole della grammatica in avanti

  S -> aABe -> aAbcBe -> abbcBe ->abbcde

Prima il simbolo più a sinistra

- Analizzatori ascendenti (bottom up)
  - Partendo da w si tenta di ricondurci a S
  - Si usa le regole della grammatica all'indietro

  abbcde -> aAbcde -> aAde -> aABe -> S

Prima il simbolo più a destra

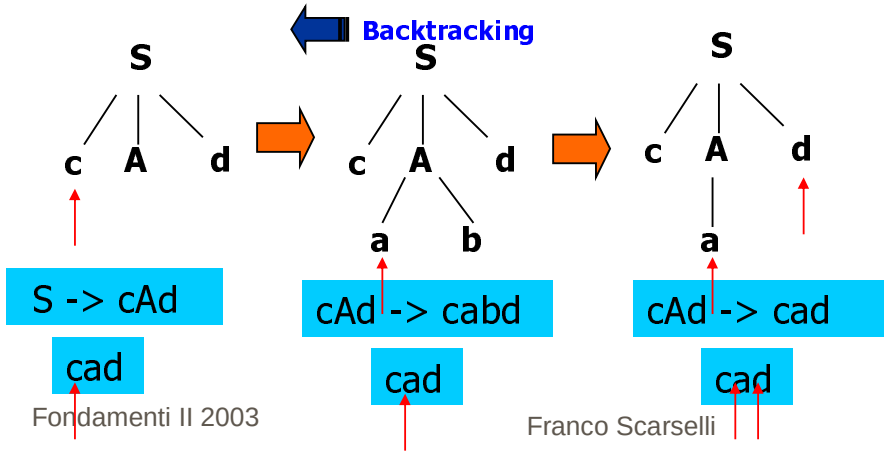
(1) S -> aABe
(2) A -> Abc|b
(3) B ->d

w=abbcde

Analisi discendente

Analisi discendente

- Si applicano le regole in maniera ricorsiva verificando se la stringa generata è compatibile con quella da riconoscere
- Può essere necessario fare backtracking
- La computazione finisce quando la stringa è stata generata (stringa generata) o non è possibile provare altre regole (stringa rifiutata)



(1) S -> cAd
(2) A -> ab | a
w=cad

Analisi ricorsiva discendente

- Si tiene **traccia del prossimo simbolo** da sinistra della stringa in ingresso che deve essere generato dall'albero di analisi
  - serve a limitare l'insieme di produzioni che possono essere usate
- Si espandono i nodi **da sinistra a destra**
  - Un simbolo terminale soddisfa l'obbiettivo se coincide con il prossimo simbolo in ingresso
  - Un simbolo non terminale soddisfa l'obbiettivo se lo soddisfa un suo albero di analisi
- Quando espandendo una produzione e si genera un simbolo terminale **si verifica se corrisponde con quello in ingresso**
  - Sì - Si sposta il cursore in avanti e si prosegue
  - No - Si fallisce e si prova a soddisfare l'obbiettivo con un altro albero

Analisi risorsiva discendente: un esempio

cursore

Stringa in ingresso

La grammatica

B->(B) B

B->ε

Si prova la regola B->(B)B

```
Tree  B(int *c, char *s){
  Tree *b1, b2;
    if(s[*c]=='(' ){
        (*c)++;
        b1=B(c,s);
        if((s[*c]==')') &&(b1!=null)){
            (*c)++;
            b2=B(c,s);
            if(b2==null) return(null);
              else return(mktree('B','(',b1,')',b2));}
        else return null; }
    else return mktree('B','ε');
}
```

Si legge '('

Si sposta il cursore

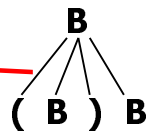
Analisi di B

Si legge ')'

Si sposta il cursore

Analisi di B

Fallimento



Fallimento

Si prova la regola B-> ε

Analizzatori predittivi

- Un **analizzatore predittivo** è un analizzatore che guardando il prossimo simbolo della stringa in ingresso è in grado di
  - prevedere quale regola deve essere usata ad ogni passo
  - evitare il backtracking

Il simbolo terminale in ingresso: a
Il simbolo non terminale: A
Un insieme di regole per A: A-> $w_1|w_2|$ ...$|w_n$

Esiste una sola regola i t.c.
A-> w_i -> $a\alpha$

Un esempio: ad ogni passo conosco quale regola scegliere

S->aSc |bSc | d
w=abdcc

S->aSc
abdcc

->abScc
abdcc

->abdcc
abdcc

Analizzatori predittivi II

- **Solo alcune grammatiche** permettono di realizzare analizzatori predittivi
- Occorre
  - evitare grammatiche **ambigue**
  - rimuovere la **ricorsione a sinistra**
  - **fattorizzare la grammatica a sinistra**

Come faccio a scegliere la regola giusta guardando solo il primo simbolo in ingresso?

S->aSc |aSd
w=aacd

?

S->aSc
S->aSd

S->Sa|Sb
w=abb

?

S->Sa
S->Sb

Ambiguità

- Una grammatica si dice **ambigua** se ci sono due alberi di analisi che producono la stessa stringa

Una grammatica ambigua che produce le parentesi bilanciate

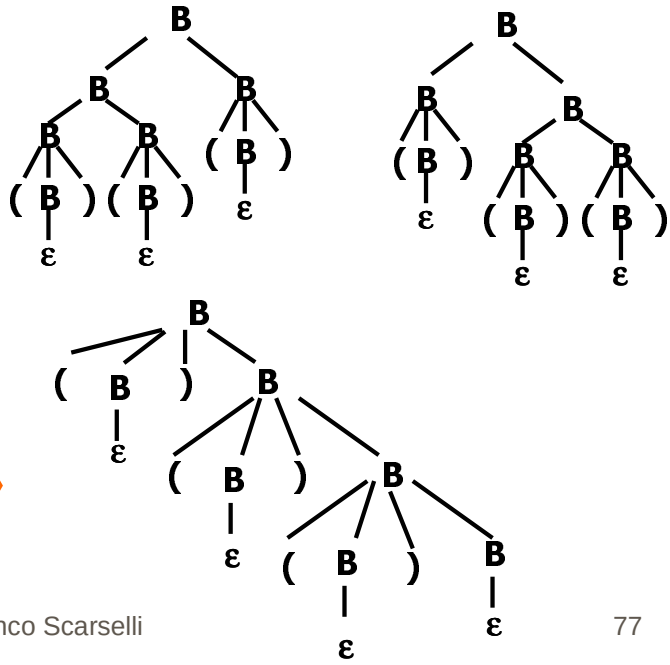
B->(B) B->BB B->ε

Esempi di parentesi bilanciate

()()() (())() (())(())

Una grammatica non ambigua

B->(B) B B->ε

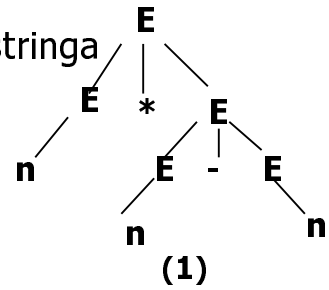


Problemi dovuti all'ambiguità

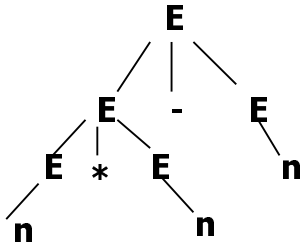
- L'ambiguità
  - non è possibile scegliere un'unica regola di derivazione
  - può causare problemi nell'interpretazione di una stringa
    - Nell'esempio sottostante usando (1) invece di (2) **non si rispetta la precedenza** fra gli operatori

(1) E -> E*E -> E*E-E -> n*E-E -> n*n-E -> n*n-n

(2) E -> E-E -> E*E-E -> n*E-E -> n*n-E -> n*n-n



(1)



(2)

Eliminazione dell'ambiguità per le espressioni aritmetiche

- Per risolvere il problema della precedenza degli operatori occorre trovare un'altra grammatica non ambigua per lo stesso linguaggio
- Si introducono **nuovi simboli non terminali**
  - E (Espressione)
  - T (Termine)
  - F (Fattore)

Grammatica non ambigua

E -> E+T | E-T |T

T-> T*F | T/F |F

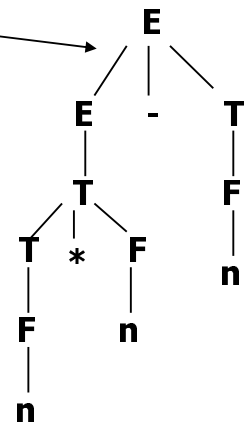
F->(E) | n

Un esempio di derivazione

E-> E-T -> T-T -> T*F-T

-> F*F -T ->n*F-T

->n*n-T-> n*n-F -> n*n-n



La grammatica determina l'ordine di raggruppamento

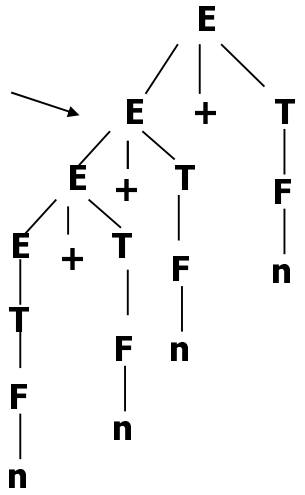
- La nuova grammatica usa produzioni dove la variabile da sostituire appare a sinistra nella stringa prodotta (cioè, produzioni del tipo A->Aw)
  - le espressioni saranno valutate **raggruppando a sinistra**

E -> E+T | E-T |T

T-> T*F | T/F |F

F->(E) | n

L'albero dell'espressione n+n+n+n



Eliminazione dell'ambiguità nel caso dell' if-then-else

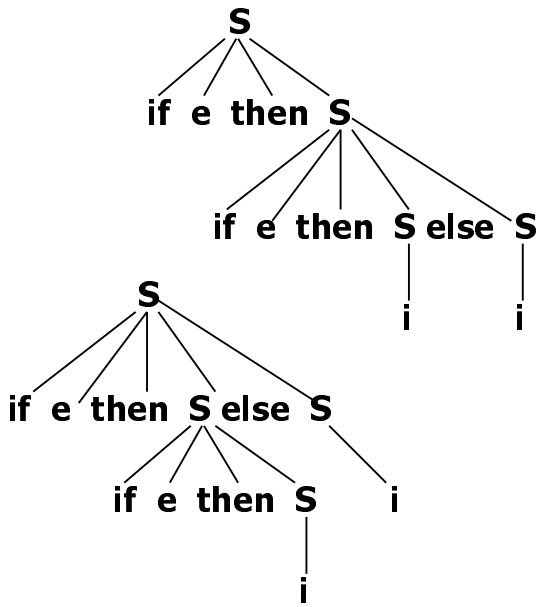
- La seguente grammatica che genera un linguaggio contenente il comando if-then-else è ambigua

S -> **if** e **then** S

S -> **if** e **then** S **else** S

S -> i

Altre istruzioni



L'istruzione dopo else è legata al primo o il secondo if ?

if e then if e **then** i **else** i

Eliminazione dell'ambiguità nel caso dell' if-then-else II

- Per eliminare l'ambiguità si introducono nuove variabili
  - S (uno statment)
  - I (un statment **if** incompleto, cioè senza **else**)
  - C (un statment **if** completo)
- La grammatica associa la parte else all'if più vicino (l'ultimo)

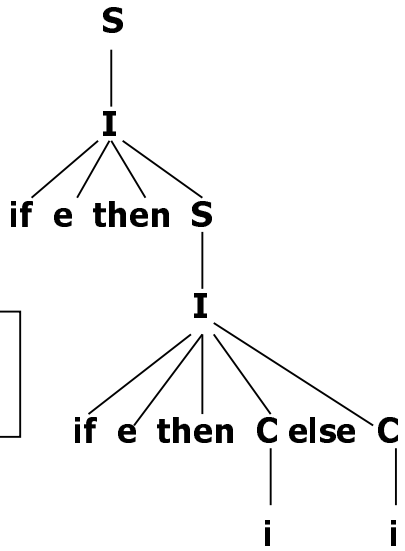
S -> C | I

C -> **if** e **then** C **else** C | i

I -> **if** e **then** S |

if e **then** C **else** I

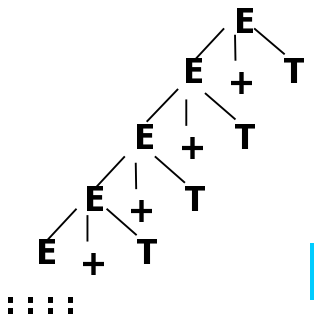
Fra un then e un else ci può essere solo uno statment completo



Ricorsione a sinistra

- Una grammatica si dice **ricorsiva a sinistra** se
  - esiste una derivazione t.c. $A \Rightarrow^* A\alpha$, dove $\alpha \in (V \cup T)^*$
- Nel caso più semplice la grammatica contiene una produzione $A \rightarrow A\alpha$ questa viene detta **ricorsione immediata**
- Il problema è che non si capisce **quando fermare l'espansione** del non terminale

E->E+T | T
E->T*F | F
F->(E)| n
w=n+n+n



Quando mi fermo ?

E->E+T->E+E+T->E+E+E+T ->....

Eliminare la ricorsione a sinistra

- Per eliminare la ricorsione sinistra immediata
  - Si trasforma la ricorsione da sinistra a destra
  - Occorre introdurre un nuovo simbolo non terminale

Non contengono A (a sinistra)

$A \rightarrow \beta_1 | \ldots | \beta_m$

$A \rightarrow A\,\alpha_1 | \ldots | A\,\alpha_n$

$A \rightarrow \beta_1 A' | \ldots | \beta_m A'$

$A' \rightarrow \alpha_1 A' | \ldots | \alpha_n A' | \varepsilon$

Eliminazione della ricorsione a sinistra: un esempio

- L'eliminazione della ricorsione nel caso delle espressioni aritmetiche

E->E+T | T
T->T*F | F
F->(E)| n

E->TE'
E'->+TE' | ε
T-> FT'
T'->*FT' | ε
F->(E)| n

- Si osservi che
  - nel caso in cui gli α, β della produzione (A->A α| β) contengano copie di A, può essere necessario iterare la trasformazione
  - abbiamo descritto come rimuovere la ricorsione immediata, ma esiste anche un **algoritmo per la ricorsione non immediata**

Fattorizzazione a sinistra

- Una grammatica è **fattorizzabile a sinistra** se una variabile ha due produzioni che la espandono in stringhe con lo stesso prefisso

$$A \rightarrow \alpha\beta \mid \alpha\gamma$$

- Il problema è: come si espande A quando vedo α ?
- Per fattorizzare a sinistra la grammatica
  - Si raggruppano le regole che generano lo stesso prefisso
  - Si introduce un nuovo simbolo per generare la parte destra della regola

$A \rightarrow \alpha\beta_1 | \ldots | \alpha\beta_m | \gamma$

$A \rightarrow \alpha A' | \gamma$

$A' \rightarrow \beta_1 | \ldots | \beta_m$

Fattorizzazione a sinistra: un esempio

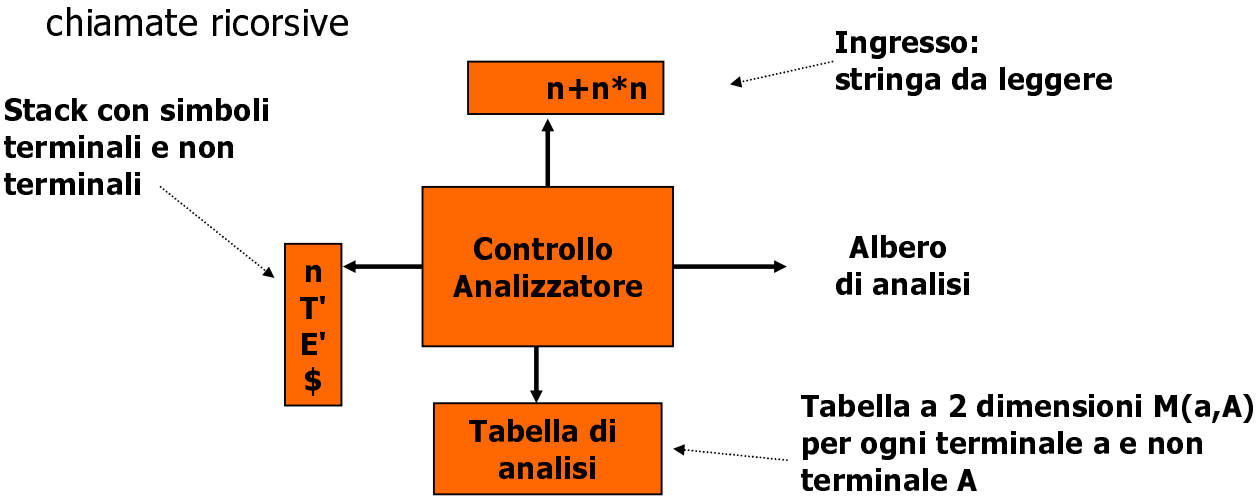
- Nel caso dell'if-then-else si introduce un nuovo non terminale E che rappresenta la parte **else**

S -> **if** e **then** S
S -> **if** e **then** S **else** S
S -> i

S -> **if** e **then** S E | i
E -> **else** S | ε

Costruire un analizzatore predittivo

- Riassumendo occorre: Eliminare eventuali ambiguità, eliminare la ricorsione a sinistra, fattorizzare la grammatica
- Poi, per realizzare un analizzatore predittivo si usa uno stack invece di chiamate ricorsive



Un esempio

Analisi di n+n*n

Stack	Input	Produzioni
$E	n+n*n$	
$E'T	n+n*n$	E->TE'
$E'T'F	n+n*n$	T->FT'
$E'T'n	n+n*n$	F->n
$E'T'	+n*n$	
$E'	+n*n$	T'-> ε
$E'T+	+n*n$	E'->+TE'
$E'T	n*n$	

Grammatica

E->TE'
E'->+TE' | ε
T-> FT'
T'->*FT' | ε
F->(E)| n

Tabella di analisi

	n	+	*	(	)	$
E	TE'			TE'		
E'		+TE'			ε	ε
T	FT'			FT'		
T'		ε	*FT'		ε	ε
F'	n			(n)		

Un esempio II

Analisi di n+n*n

Stack	Input	Produzioni
$E'T'F	n*n$	T->FT'
$E'T'n	n*n$	F->n
$E'T'	*n$	
$E'T'F*	*n$	T->*FT'
$E'T'F	n$	
$E'T'n	n$	F->n
$E'T'	$	
$E'	$	T'->ε
$	$	E'-> ε

Grammatica

E->TE'
E'->+TE' | ε
T-> FT'
T->*FT' | ε
F->(E)| n

Tabella di analisi

	n	+	*	(	)	$
E	TE'			TE'		
E'		+TE'			ε	ε
T	FT'			FT'		
T'		ε	*FT'		ε	ε
F	n			(n)		

Costruzione della tabella di analisi

- Si costruiscono due funzioni FIRST e FOLLOW
  - $w \in (V \cup T)^*$, FIRST(w) = l'insieme dei simboli terminali che iniziano le stringhe derivate da w

    (se $w \Rightarrow^* abAXs$ .. allora $a \in$ FIRST(w))
  - $A \in V$, FOLLOW(A) = l'insieme dei simboli terminali che possono seguire A in stringhe derivate da S

    (se $S \Rightarrow^* bcAas$.. allora $a \in$ FOLLOW(A))

Calcolare FIRST

- **FIRST(X), $X \in (V \cup T)$**
  1) se X è un terminale, allora FIRST(X)={X}
  2) se X -> ε è una produzione, allora $\varepsilon \in$ FIRST(X)
  3) se X -> $Y_1Y_2..Y_n$ è una produzione,
     - se $a \in$ FIRST(Y_i) e per ogni $1 \le j < i$ vale $\varepsilon \in$ FIRST(Y_j) allora $a \in$ FIRST(X) ($Y_1Y_2..Y_{i-1} \Rightarrow^* \varepsilon$)
     - se per ogni $1 \le j \le n$ vale $\varepsilon \in$ FIRST(Y_j) allora $\varepsilon \in$ FIRST(X)
- **FIRST(w), $w \in (V \cup T)^*$,** si calcola come in (3)
  - Per costruire la tabella di analisi **occorre conoscere FIRST(w), per ogni regola A->w**
- FIRST(X), viene calcolato ricorsivamente con le regole descritte sopra

Calcolare FIRST: un esempio

E->TE'
E'->+TE' | ε
T-> FT'
T'->*FT' | ε
F->(E)| n

FIRST(E)=FIRST(T)=FIRST(F)={(,n}
FIRST(E')={+, ε}
FIRST(T)=FIRST(F)={(,n}
FIRST(T')={*, ε}
FIRST(F)={(,n}

FIRST(TE')=FIRST(T) ={(,n}
FIRST(+TE')={+} FIRST(ε)= {ε}
FIRST(FT')= FIRST(F)={(,n}
FIRST(*FT)={*} FIRST(ε)= {ε}
FIRST((E))={(} FIRST(n)={n}

Calcolare FIRST: un esempio II

S->ABCde | fAg
A->ad | ε
B->b | ε |C
C->c | ε | B

FIRST(S)={f}UFIRST(A) U FIRST(B)
U FIRST(C) U {d}={f,a,b,c,d}
FIRST(A)={a, ε}
FIRST(B)={b, ε} U FIRST(C)={b,c,ε}
FIRST(C)={c, ε} U FIRST(B) ={b,c,ε}

FIRST(ABCde)=FIRST(A) U FIRST(B)
U FIRST(C) U {d}={a,b,c,d} FIRST(fAg)={f}
FIRST(ad)={a} FIRST(ε)={ε}
FIRST(b)={b} FIRST(ε)={ε} FIRST(C)={b,c,ε}
FIRST(c)={c} FIRST(ε)={ε} FIRST(B)={b,c,ε}

Calcolare FOLLLOW

- FOLLOWS(X)
  - $\$ \in$ FOLLOW(S), dove $ rappresenta la fine della stringa
  - se A ->α Bβ è una produzione, allora FIRST(β) \{ε} $\subseteq$ FOLLOW(B)
    (B è seguito dai primi caratteri di β)
  - se A ->αB è una produzione oppure se A ->α Bβ è una produzione
    e se $\varepsilon \in$ FIRST(β), allora FOLLOW(A) $\subseteq$ FOLLOW(B)
    (se nella produzione non compare niente a destra di B allora B è seguito da ciò che segue A)

- Prima occorre calcolare FIRST, poi FOLLOW viene calcolato applicando ricorsivamente le regole descritte sopra

Calcolare FOLLOW: un esempio

E->TE'
E'->+TE' | ε
T-> FT'
T'->*FT' | ε
F->(E)| n

FIRST(E)=FIRST(T)=FIRST(F)={(,n}
FIRST(E')={+, ε}
FIRST(T)=FIRST(F)={(,n}
FIRST(T')={*, ε}
FIRST(F)={(,n}

FOLLOW(E)={$}U {)}={$,)}
FOLLOW(E')=FOLLOW(E)={$,)}
FOLLOW(T)= FIRST(E') U
FOLLOW(E')UFOLLOW(E)={+.$,)}
FOLLOW(T')= FOLLOW(T) ={+.$,)}
FOLLOW(F)=FIRST(T')UFOLLOW(T) U
FOLLOW(T')={*,+,$,)}

Calcolare FOLLOW: un esempio II

S->ABCde | fAg
A->ad | ε
B->b | ε |C
C->c | ε | B

FIRST(S)={f}UFIRST(A) U FIRST(B)
U FIRST(C) U {d}==={f,a,b,c,d}
FIRST(A)={a, ε}
FIRST(B)={b, ε} U FIRST(C)={b,c,ε}
FIRST(C)={c, ε} U FIRST(B) ={b,c,ε}

FOLLOW(S)={$}
FOLLOW(A)=FIRST(B) U FIRST(C) U {d,g}={b,c,d,g}
FOLLOW(B)=FIRST(C)U{d}UFOLLOW(C)={b,c,d}
FOLLOW(C)={d} U FOLLOW(B) ={b,c,d}

Costruire la tabella di analisi

- Per ogni produzione A->w si **calcola FOLLOW(A) e FIRST(w)**
- La tabella M[A,a] **è definita** da
  - se A->w e a∈FIRST(w), allora M[A,a]={A->w}
    (se vedo a in ingresso e A è il prossimo simbolo sullo stack, allora espando A->w)
  - se A->w, ε∈FIRST(w) e a∈FOLLOW(A) , allora M[A,a]={A->ε}
    (se vedo a in ingresso e A è il prossimo simbolo sullo stack, allora espando A->ε)

Costruire la tabella di analisi: un esempio

FIRST(TE')=FIRST(T) ={(,n}
FIRST(+TE')={+} FIRST(ε)= {ε}
FIRST(FT')= FIRST(F)={(,n}
FIRST(*FT)={*} FIRST(ε)= {ε}
FIRST((E))={(} FIRST(n)={n}

E->TE'
E'->+TE' | ε
T-> FT'
T'->*FT' | ε
F->(E)| n

FOLLOW(E)={$}U {)}={$,)}
FOLLOW(E')=FOLLOW(E)={$,)}
FOLLOW(T)= FIRST(E') U FOLLOW(E')UFOLLOW(E)={+.$,)}
FOLLOW(T')= FOLLOW(T) ={+.$,)}
FOLLOW(F)=FIRST(T')UFOLLOW(T) U FOLLOW(T')={*,+,$,)}

	n	+	*	(	)	$
E	TE'			TE'		
E'		E->+TE'			ε	ε
T	FT'			FT'		
T'		ε	*FT'		ε	ε
F	n			(E)		

Costruire la tabella di analisi: un esempio II

FIRST(ABCde)={a,b,c,d} FIRST(fAg)={f}
FIRST(ad)={a} FIRST(ε)={ε}
FIRST(b)={b} FIRST(ε)={ε} FIRST(C)={b,c,ε}
FIRST(c)={c} FIRST(ε)={ε} FIRST(B)={b,c,ε}

S->ABCde | fAg
A->ad | ε
B->b | ε |C
C->c | ε | B

FOLLOW(S)={$}
FOLLOW(A)={b,c,d,g}
FOLLOW(B)= {b,c,d}
FOLLOW(C)={b,c,d}

	a	b	c	d	e	f	g
S	ABCde	ABCde	ABCde	ABCde		fAg	
A	ad	ε	ε	ε			ε
B		b, C,	C,				
		ε	ε	ε			
C		B	c,B				
		ε	ε	ε			

Più regole sono applicabili

Analizzatori discendenti e grammatiche LL(1)

- Una grammatica la cui tabella di analisi per un analizzatore discendente non ha definizioni multiple si dice **LL(1)**
  - Left to right (scansione dell'ingresso)
  - leftmost (si espande il simbolo più a sinistra)
  - 1 simbolo per la previsione
- Non tutte le grammatiche sono LL(1)
  - es. grammatiche ambigue e non fattorizzate a sinistra **non sono LL(1)**
- Occorre
  - Eliminare l'ambiguità
  - eliminare la ricorsione a sinistra
  - Fattorizzare a sinistra
  - ma, **non è detto che si ottenga una grammatica LL(1)**

Analisi ascendente

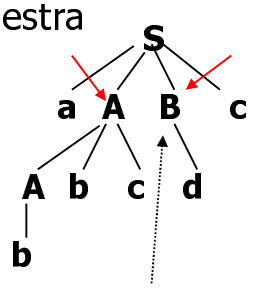
Analisi ascendente (bottom up)

- Si costruisce l'albero di analisi **dalle foglie verso la radice**.
  - Si riduce una una stringa allo scopo S
  - Ad ogni passo una sottostringa che corrisponde alla **parte di sinistra** di una produzione è rimpiazzata col **simbolo di destra**
- Se ci sono più stringhe da ridurre, si sceglie quella **più a sinistra**
  - cioè si sceglie di espandere il simbolo terminale più a destra

S -> aABe
A -> Abc|b
B ->d

abbcde -> aAbcde -> aAde -> aABe -> S

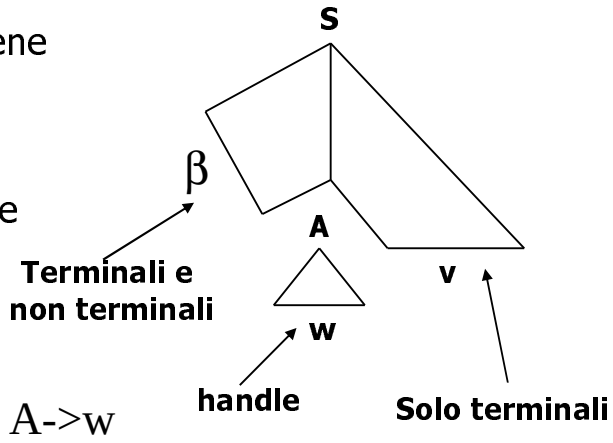
Prima b->A o d->B ?
La stringa più a sinistra



Prima A->Abc o B->d ?
Il simbolo più a destra

Le sottostringe "Handle" (di aggancio)

- **Handle**: sottostringa tale che
  - corrisponde la lato destro di una produzione A->w
  - si può rimpiazzare nella stringa di partenza w con A ottenendo una derivazione destra
  - $S \Rightarrow^* \beta Av \rightarrow \beta wv$, dove v contiene **solo simboli terminali**
- una grammatica **ambigua** può avere più handle



Implementazione

- Si usa uno **stack** per i simboli della grammatica
  - Il parser inserisce simboli sullo stack fino a quando non trova un handle w (ad es. A->w)
    - Il parser riduce w al simbolo non terminale corrispondente A
- Il parser può fare le seguenti azioni
  - **sposta (shift):** il prossimo simbolo in ingresso e messo sullo stack
  - **riduce (reduce):** viene riconosciuto un handle sullo stack e sostituito da un non terminale
  - **accetta**: sullo stack è rimasto S e in ingresso non c'è niente
  - **errore**: si è riconosciuto un errore di sintassi

Un esempio

Stack	Ingresso	Azione
$	n+n*n$	Sposta
$n	+n*n$	Riduci E->n
$E	+n*n$	Sposta
$E+	n*n$	Sposta
$E+n	*n$	Riduci E->n
$E+E	*n$	Sposta
$E+E*	n$	Sposta
$E+E*n	$	Riduci E->n
$E+E*E	$	Riduci E->E*E
$E+E	$	Riduci E->E+E
$E	$	Accetta

E -> E+E

E-> E*E

E -> (E)

E-> n

Si anche poteva scegliere di ridurre

I conflitti

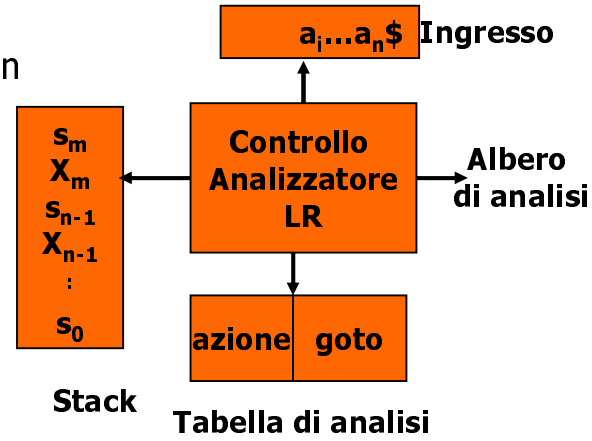
- Ci sono grammatiche per le quali non si può applicare l'analisi ascendente perché noto il contenuto dello stack e il prossimo simbolo
  - è possibile sia ridurre che spostare (**conflitto shift/reduce**)
  - è possibile ridurre con più produzioni (**conflitto reduce/reduce**)
- Le grammatiche per cui non esistono conflitti si dicono **LR**
- Gli analizzatori bottom up
  - in caso di conflitto **usano un criterio** per decidere cosa fare (ad esempio, se esiste una precedenza fra gli operatori)
  - usano **grammatiche LR** (analizzatori LR)

Analizzatori LR

- **Analisi LR(K)**
  - L (left to right): analisi della stringa da sinistra a destra
  - R (rightmost derivation): si applica una derivazione che espande il non terminale più a destra
  - K: numero di simboli di previsione
- LR indica che la grammatica è LR(k) per un qualche k

Funzionamento di un analizzatore LR

- Lo **stack** contiene una stringa del tipo $s_0X_1s_1...X_ms_m$,
  - Dove X_i è un **simbolo** della grammatica e S_i uno **stato**
  - Ogni **stato** S_i riassume l'informazione contenuta nello stack al di sotto di esso
  - Nell'implementazione i simboli X_i non sono necessari
- L'azione del parser è determinata **dallo stato in testa allo stack e dal simbolo corrente**
- La tabella di analisi è divisa in una **parte azione e una parte goto**



Funzionamento di un analizzatore LR II

- La **configurazione** dell'analizzatore è dato dal contenuto dello stack e dalla parte di ingresso ancora da leggere

$$s_0X_1s_1...X_ms_m\ a_i...a_n$$

- La configurazione rappresenta una stringa derivata sostituendo a destra

$$X_1...X_m\ a_i...a_n$$

- **Controllo dell'analizzatore**:
  - dati s_m stato in testa allo stack, a_i simbolo corrente si determina l'azione sulla base di AZIONE[s_m , a_i]

Funzionamento di un analizzatore LR III

- **AZIONE[s_m , a_i] =sposta s**
  - Si spostano a_i e s sullo stack (si va allo stato s)
  - Stack= $s_0X_1s_1...X_ms_m$ Ingresso= a_i a_{i-1} ...a_n
  - Stack= $s_0X_1s_1...X_ms_m$ a_is Ingresso= a_{i-1}...a_n

- **AZIONE[s_m , a_i] =riduci A->w** **(w=$X_{m-r+1}...X_m$)**
  - Si rimuove r=|w| simboli dallo stack,
    si mette A sullo stack a_i e si va allo stato s=GOTO(S_{m-r}, **A)**
  - Stack= $s_0X_1s_1...$ $\mathbf{X_{m-r}s_{m-r}}$ $\mathbf{X_{m-r+1}s_{m-r+1}...X_m}s_m$ Ingresso=a_i...a_n
  - Stack= $s_0X_1s_1...$ $\mathbf{X_{m-r}s_{m-r}}$ As Ingresso=a_i...a_n

- **AZIONE[s_m , a_i] =accetta:** L'analisi è completata
- **AZIONE[s_m , a_i] =errore:** Si è scoperto un errore

Un esempio

stat	n	+	*	(	)	$	E	T	F
0	s5			s4			1	2	3
1		s6				acc			
2		r2	s7		r2	r2			
3		r4	r4		r4	r4			
4	s5			s4			8	2	3
5		r6	r6		r6	r6			
6	s5			s4				9	3
7	s5			s4					10
8		s6			s11				
9		r1	s7		r1	r1			
10		r3	r3		r3	r3			
11		r5	r5		r5	r5			

(1) E -> E+T (2) E-> T
(3)T->T*F (4)T->F
(5) F->(E) (6)F->n

Stack	Input	Azione	Goto
0	n*n+n$	s5	
0n5	*n+n$	r6	3
0F3	*n+n$	r4	2
0T2	*n+n$	s7	
0T2*7	n+n$	s5	
0T2*7n5	+n	r6	10
0T2*7F10	+n$	r3	2

Un esempio II

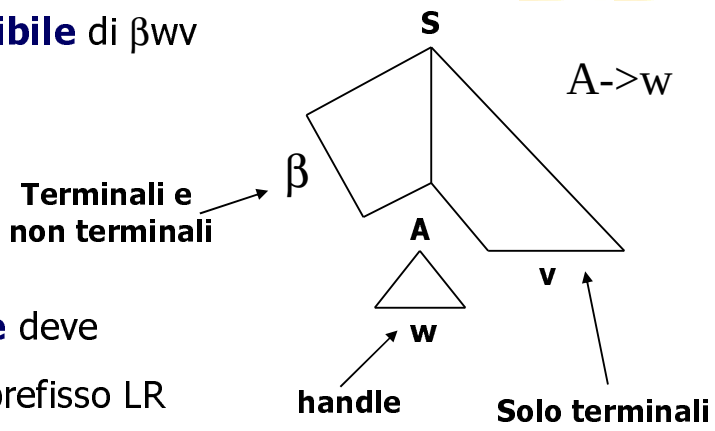
stat	n	+	*	(	)	$	E	T	F
0	s5			s4			1	2	3
1		s6				acc			
2		r2	s7		r2	r2			
3		r4	r4		r4	r4			
4	s5			s4			8	2	3
5		r6	r6		r6	r6			
6	s5			s4				9	3
7	s5			s4					10
8		s6			s11				
9		r1	s7		r1	r1			
10		r3	r3		r3	r3			
11		r5	r5		r5	r5			

(1) E -> E+T (2) E-> T
(3)T->T*F (4)T->F
(5) F->(E) (6)F->n

Stack	Input	Azione	Goto
0T2	+n$	r2	1
0E1	+n$	s6	
0E1+6	n$	s5	
0E1+6n5	$	r6	3
0E1+6F3	$	r4	9
0E1+6T9	$	r1	1
0E1	$	acc	

Perché gli analizzatore LR funzionano?

- La stringa βw è un **prefisso riducibile** di βwv
- Si dice **prefisso LR** un qualsiasi prefisso di un prefisso riducibile
- Un analizzatore LR per **funzionare** deve
  - riconoscere la presenza di un prefisso LR
  - decidere se il prefisso è riducibile
  - decidere con quale regola ridurre



Perché gli analizzatori LR funzionano? II

- I simboli dello stack sono **prefissi LR**
  - sono prefissi riducibili quando si fa una riduzione
  - sono semplici prefissi LR quando si uno spostamento
- Si può dimostrare che i prefissi LR sono **riconoscibili da un automa a stati finiti**
- Lo stato in cima allo stack è rappresenta lo stato in cui si trova l'automa a stati finiti
- Un automa LR **utilizza lo stato in testa allo stack per sapere a che punto è nella lettura del prefisso e si aiuta con il primo simbolo in ingresso per decidere cosa fare**

Costruzione dell'automa che riconosce i prefissi

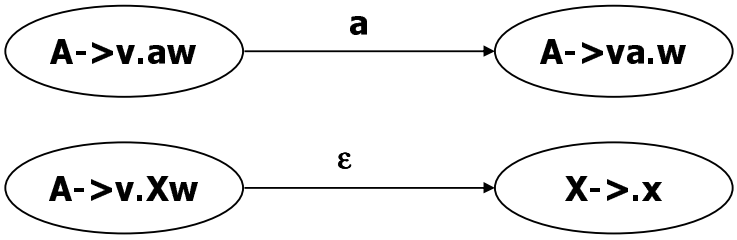
- Un **elemento LR(0)** di una grammatica è una produzione annotata con un punto
  - A->.xya
  - A->x.ya
  - A->xy.a
  - A->xya.
- Un elemento è individuato da una coppia di indici: numero produzione, posizione punto
- Il **punto** tiene traccia di quanto è stato già letto

Costruzione dell'automa che riconosce i prefissi II

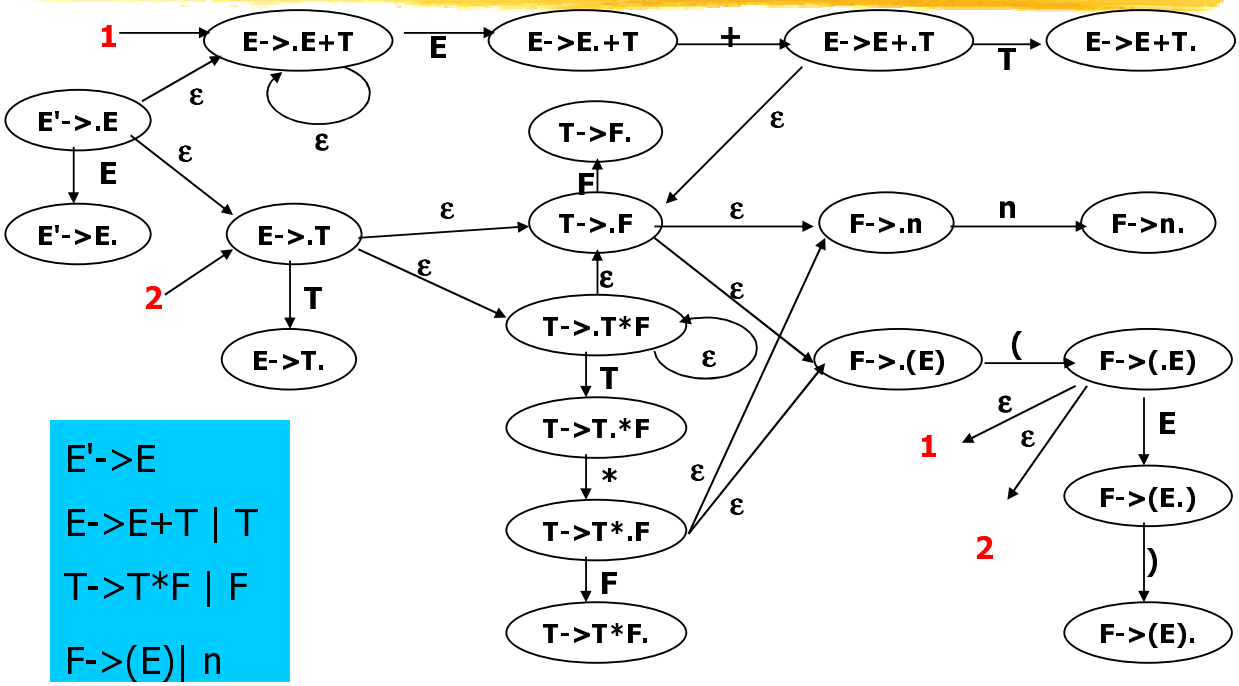
- **L'automa**
  - gli **stati** sono elementi LR(0)
  - se **A->vaw∈P** e **a ∈T**, c'è un **arco**

    [A ->v.aw] --a-> [A-va.w]
  - se **A->vXw∈P** e **X ∈V** c'è un **arco**

    [A ->v.Xw] --ε-> [X->.x]



Costruzione dell'automa che riconosce i prefissi: un esempio



E'->E

E->E+T | T

T->T*F | F

F->(E)| n

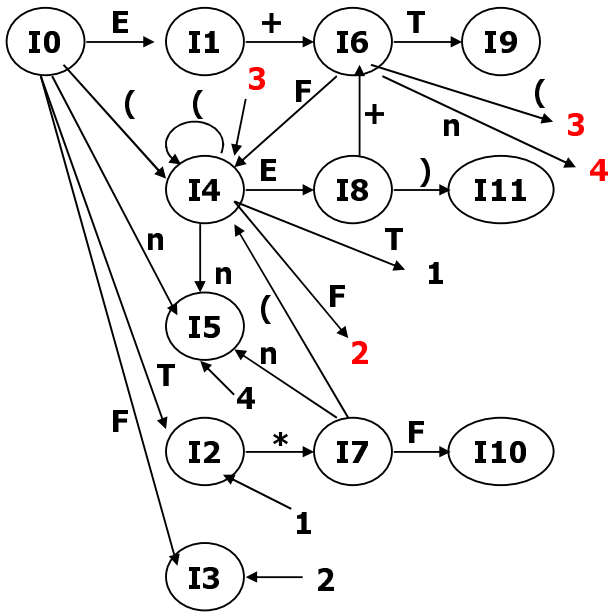
L'automa deterministico

- Gli automi costruiti con il metodo precedente sono **non deterministici**
  - occorre trasformali in automi deterministici
  - si usa la solita procedura per passare da NFA a DFA

- Alla fine **ogni stato** I dell'automa deterministico corrisponde ad **un insieme di elementi LR(0)**
  - ad es. I={F->.n, F->.(E), T->T*.F}

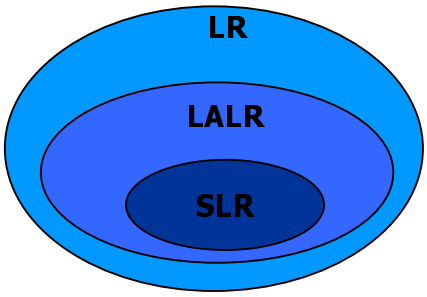
L'automa deterministico: un esempio

I0={E'->.E, E->.E+T,E->.T, T->.F, T->.T*F,F->.n, F->.(E)}
I1={E'->E.,E->E.+T}
I2={E->T., E->E.+T} I3={T->F.}
I4={F->(.E), E->.E+T,E->.T, T->.F, T->.T*F,F->.n, F->.(E)}
I5={F->n.}
I6={T->.F,T->.T*F,F->.n, F->.(E)}
I7={F->.n, F->.(E), T->T*.F}
I8={F->(E.),F->E.+T}
I9={E->E+T.,T->T.*F}
I10={T->T*F.} I11={F->(E).}



Costruzione di tabelle di analisi

- Dopo l'automa con stati $\{I_1,..,I_n\}$ si costruiscono le **tabelle di analisi**
- Esistono vari modi di costruire le tabelle
  - Analizzatori **SLR** (simple LR), **LALR** (Lookahead LR), e **LR**
  - **tabelle più grandi** e complesse da costruire corrispondono a minori conflitti **e linguaggi più generici**
  - **tabelle più piccole** e semplici da costruire corrispondono a più conflitti e **linguaggi più ristretti**
- La maggior parte dei compilatori usa LALR
- **Noi vedremo SLR(1)**



Costruzione di tabelle di analisi SLR

- Per un analizzatore **SLR (simple LR),** AZIONE e GOTO saranno
- **Spostamenti**
  - se $a \in T$ e l'automa contiene la transizione I_h--a-> I_k

    AZIONE[h,a]= sposta k
  - (si passa al nuovo stato dell'automa, il prefisso **non è ancora riducibile**)
- **Riduzioni**
- se [A->w.]$\in I_h$ e a $\in$ FOLLOW(A)

  AZIONE[h,a]= riduci A->w
  - (Si riduce, il prefisso **è riducibile**)

Costruzione di tabelle di analisi SLR II

- **Riduzioni**
- se [S'->S.]$\in I_h$

  AZIONE[h,$]= accetta

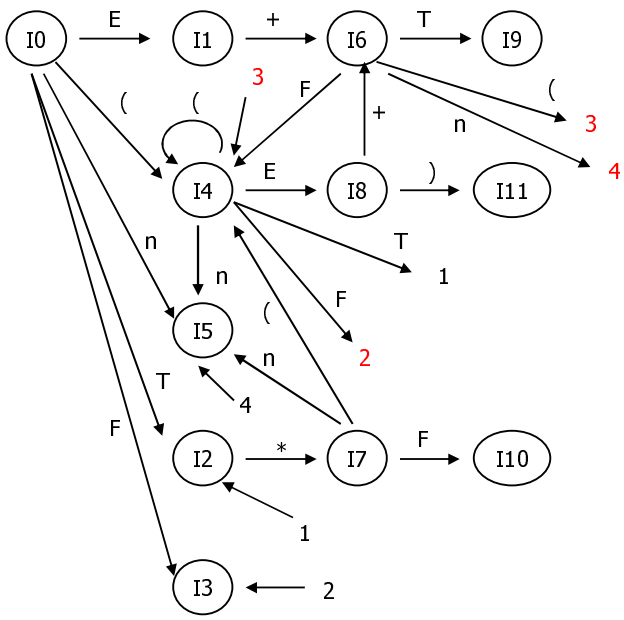
  - (S'->S è una **nuova regola** aggiunta al linguaggio)
- **La tabella GOTO**
  - se I_h--A-> I_k

    GOTO[h,A]=k

  - Lo stato iniziale è quello che contiene [S'->.S]
  - Le componenti non definite producono un errore

Costruzione della tabella AZIONE: gli spostamenti

stato	n	+	*	(	)	$
0	s5			s4		
1		s6				
2			s7			
3						
4	s5			s4		
5						
6	s5			s4		
7	s5			s4		
8		s6			s11	
9			s7			
10						
11						



Costruzione della tabella AZIONE: le riduzioni

stato	n	+	*	(	)	$
0	s5			s4		
1		s6				acc
2		r2	s7		r2	r2
3		r4	r4		r4	r4
4	s5			s4		
5		r6	r6		r6	r6
6	s5			s4		
7	s5			s4		
8		s6			s11	
9		r1	s7		r1	r1
10		r3	r3		r3	r3
11		r5	r5		r5	r5

(0) E'->E

(1) E->E+T

(2) E->T

(3) T->T*F

(4) T-> F

(5) F->(E)

(6) F-> n

I1={E'->E., ...}

I2={E->T., ...}

I3={T->F., ...}

I5={F->n., ...}

I9={E->E+T., ...}

I10={T->T*F. .....}

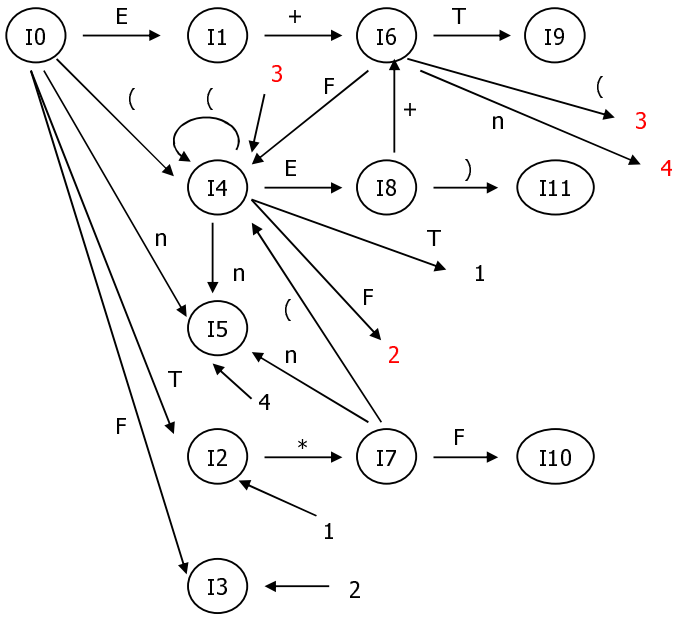
I11={F->(E)., ...}

FOLLOW(E')={$} FOLLOW(E)={+,),$}

FOLLOW(T)={+,*,),$} FOLLOW(F)={+,*,),$}

Costruzione tabella GOTO: un esempio

stato	E	T	F
0	1	2	3
1			
2			
3			
4	8	2	3
5			
6		9	3
7			10
8			
9			
10			
11			



Grammatiche LR(1)

- **Una grammatica si dice SLR(1) se** la corrispondente tabella di analisi costruita come appena mostrato **non contiene conflitti**
- Costruzione di tabelle per analizzatori LR (idea base)
  - Gli stati memorizzano **esplicitamente i non terminali b che possono seguire un handle y**
  - Gli elementi di una grammatica LR(1) sono del tipo [A->.xya, b], [A->x.ya, b]
  - Si costruisce un automa deterministico con tali elementi
  - Con [A->w., b] **si riduce solo se il prossimo simbolo è b**

YACC: Yet Another Compiler Compiler

- **Yacc** è un generatore di analizzatori sintattici in linguaggio C a partire dalla grammatica LALR(1)
- L'ingresso è un file che descrive la grammatica: **simboli non terminali, simboli terminali, produzioni**

Terminali

Non terminali

Produzioni

```
%token <val> NUM
%token <sptr> VAR
%type <val> exp

%%
input: /* vuota */
      | input exp '\n'
;
exp:  NUM {$$=$1;}
    | VAR {$$=$1->value.var;}
    | VAR '=' exp {$$=$3;$1->value.var=$3;}
    | exp '+' exp {$$=$1+$3;}
    | exp '*' exp {$$=$1*$3;}
    | '(' exp ')' {$$=$2;}
;
```

I simboli

- Ad ogni simbolo è associato **un tipo e un valore semantico**
- Il valore semantico definisce **il significato di un simbolo**
  - Un intero NUM: la costante associata al numero
  - Una variabile VAR: il puntatore alla locazione della variabile
  - Un'espressione expr: il valore dell'espressione
- Il tipo definisce **il tipo C** del valore associato al valore semantico

```
%union{
  double val;
  symbtbl *sptr;
}
%token <val> NUM
%token <sptr> VAR
%type <val> exp
. . . . . .
```

Il tipo di espressioni e numeri

Il tipo delle variabili è un puntatore alla tabella dei simboli

Le produzioni

- Alle produzioni **sono associate azioni** (codice C) che ne definisco il significato
- Ogni volta che viene applicata la regola **si esegue il codice**
- L'azione permette di combinare i valori associati ai simboli per **calcolare il valore semantico del simbolo a sinistra** della produzione

```
          1     2     3
expr: expr '+' expr    {$$ = $1+$3}
;
```

Valore del simbolo di sinistra

Valore del simbolo 1

Valore del simbolo 3

Una calcolatrice

Definisce la precedenza fra gli operatori

Calcola il valore di un'espressione

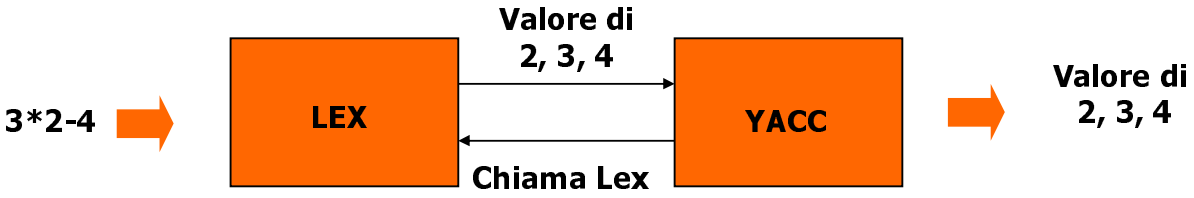
```
%union{
  double val;
  symbtbl *sptr;}
%token <val> NUM
%token <sptr> VAR
%type <val> exp

%right '='
%left '+'
%left '*'

%%
input: /* vuota */
      | input exp '\n'
;
exp:  NUM {$$=$1;}
    | VAR {$$=$1->value.var;}
    | VAR '=' exp {$$=$3;$1->value.var=$3;}
    | exp '+' exp {$$=$1+$3;}
    | exp '*' exp {$$=$1*$3;}
    | '(' exp ')' {$$=$2;}
;
```


YACC e LEX

- Il valore semantico
  - nella calcolatrice è il valore dell'espressione
  - in compilatore è un albero sintattico
- Il valore dei simboli
  - **simboli terminali** viene calcolato da **LEX**
  - **simboli non terminali** viene calcolato da **YACC**
- YACC chiama automaticamente LEX attraverso una funzione (yyparse()) per fare l'analisi lessicale



Grammatiche non contestuali

Grammatiche formali

- Esistono altre grammatiche oltre quelle libere da contesto
- Il tipo **più generale di grammatiche** prevede regole nel quale la parte sinistra può essere una **qualsiasi stringa di terminali e non terminali**

- Una **grammatica formale** è una quadrupla G=(V,T,P,S)
  - V è un insieme di simboli non terminali, T un insieme di simboli terminali, S∈V è lo scopo o simbolo di partenza
  - P un insieme di **produzioni** del tipo
    - **v->w , dove v,w ∈ (V U T)***

Grammatiche formali: un esempio

- Le seguente grammatica genera le stringhe del tipo $a^n b^n$

T={a,b}, V={A,B,S}

(1) S -> ABS
(2) S -> ε
(3) BA -> AB
(4) BS -> b
(5) Bb -> bb
(6) Ab -> ab
(7) Aa -> aa

Derivazione di aaabbb

S $->_{(1)}$ AB S $->_{(1)}$ ABAB S $->_{(1)}$
$->_{(1)}$ ABA BA BS $->_{(3)}$ A BA ABBS $->_{(3)}$
$->_{(3)}$ AA BA ABBS $->_{(3)}$ AAA BA BBS $->_{(3)}$
$->_{(3)}$ AAABB BS $->_{(4)}$ AAAB Bb $->_{(5)}$
$->_{(5)}$ AAA Bb b $->_{(5)}$ AA Ab bb $->_{(7)}$
$->_{(7)}$ A Aa bbb $->_{(7)}$ Aa abbb $->_{(7)}$ aaabbb

Il trucco:

- **A e B possono essere scambiati**
- **gli A e B sono convertiti in a e b partendo dal fondo si propaga al resto della stringa**

Grammatiche formali II

- **Grammatiche generiche**
  - nessuna limitazione
- **Grammatiche contestuali** (def. 1 e def. 2 sono equivalenti, esiste un algoritmo che trasforma una grammatica da una a l'altra forma)
  - **def. 1:** le produzioni sostituiscono un solo non simbolo A;

    $vAw \to v\alpha w$, dove $A \in V$, $v,w \in (V \cup T)^*$ e $\alpha \in (V \cup T)^+$

  V,w **definiscono il contesto** nel quale la sostituzione è ammissibile

  - **def. 2: non** sono ammesse produzioni che realizzano **contrazioni**

    $v \to w$, dove $v,w \in (V \cup T)^*$ e $|v| \leq |w|$

Grammatiche contestuali e non contestuali

- Le grammatiche contestuali hanno **un maggior potere espressivo** delle non contestuali
- Linguaggi che appartengono alla classe dei linguaggi contestuali ma non a quella dei linguaggi non contestuali
  - il linguaggio degli **identificatori**:

    Le stringhe wcw, dove $v,w \in T^*$ $c \in T$

    si verifica che un occorrenza di un identificatore (seconda occorrenza diw) sia uguale a quello dichiarato (prima occorrenza di w)
  - il linguaggio delle **chiamate di funzioni**

    Le stringhe $a^n b^m c^n d^m$, dove $a,b,c,d \in T$

    si verifica che il tipo dei parametri di un'occorrenza di procedura (cccdd indica 3 parametri interi e 2 reali) corrispondano a quelli dichiarati (aaabb)

Grammatiche contestuali: un esempio

- Le seguente grammatica genera le stringhe del tipo wcw con $w \in (a|b)^*$

(1) S -> AA'S
(2) S -> BB'S
(3) S -> C
(4) A'A -> AA'
(5) B'B -> BB'
(6) A'B -> BA'
(7) B'A -> AB'
(8) A'C -> CA'
(9) B'C -> CB'
(10) C -> c

(11) Ac -> ac
(12) Bc -> bc
(13) Aa -> aa
(14) Ab -> ab
(15) Ba -> ba
(16) Bb -> bb
(17) cA'=ca
(18) cB'=cb
(19) aA'=aa
(20) aB'=cb
(21) bA'=ba
(22) bB'=bb

Derivazione di abcab

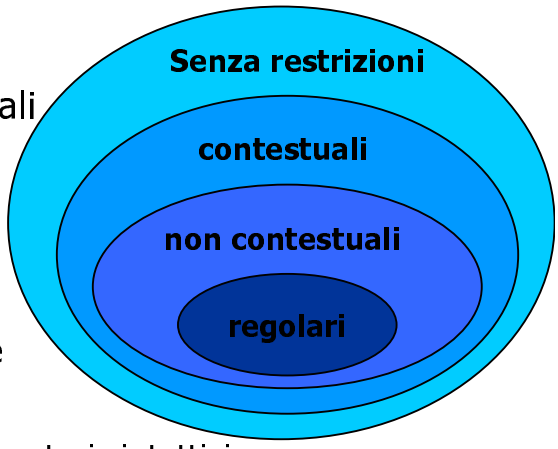
S $->_{(1)}$ AA' S $->_{(2)}$ AA'BB' S $->_{(3)}$ $->_{(3)}$A A'B B'C $->_{(6)}$ ABA' B'C $->_{(9)}$ $->_{(9)}$ AB A'C B' $->_{(8)}$ AB C A'B' $->_{(10)}$ $->_{(10)}$ A Bc A'B' $->_{(12)}$ Ab cA'B' $->_{(11)}$ $->_{(11)}$ ab cA' B' $->_{(17)}$ abc aB' $->_{(20)}$ $->_{(20)}$ abcab

Il trucco:

- **A e B sono portati in testa alla stringa, A' e B' in fondo, C al centro**
- **L'ordine fra A e B e fra A' e B' viene mantenuto**
- **la conversione di A, B, A', B', C in a, b,c inizia dal centro e si propaga al resto della stringa**

La gerarchia di Chomsky

- **Chomsky** ha chiarito quale sia il potere espressivo delle grammatiche regolari, con contestuali, contestuali senza restrizioni
- Le inclusioni sono tutte **inclusioni strette**: ci sono linguaggi che generati dalle grammatiche senza restrizioni e non dalle grammatiche contestuali ...
- I linguaggi **non contestuali e regolari**
  - si usano negli analizzatori sintattici e lessicali
  - sono facili da implementare
- I **linguaggi contestuali**
  - difficili da implementare
  - lo sono i comuni linguaggi di programmazione
  - L'analisi semantica serve a riconoscere le caratteristiche non riconoscibili solo con gli analizzatori sintattici

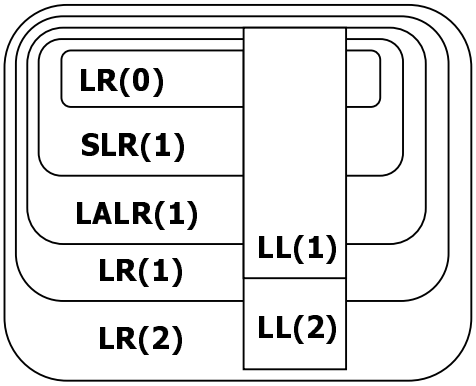


Cacolabilità e linguaggi

- I **linguaggi contestuali** sono un sottoinsieme dei **linguaggi decidibili**
  - Un linguaggio L è decidibile se esiste un programma (della macchina di Turing) che data una stringa w decide se appartiene del linguaggio **(risponde a "w $\in$ L?")**
- I linguaggi generati dalle **grammatiche senza restrizioni** sono tutti i linguaggi **ricorsivamente enumerabili**
  - Un linguaggio L è risorsivamente enumerabile se esiste un programma che genera tutte le stringhe di L **(rispondendo a "w $\in$ L?" il programma può non terminare)**

Grammatiche contestuali

- Per le grammatiche valgono le seguenti relazioni
  - **LR(O) ⊂ SLR(1) ⊂ LALR(1) ⊂ LR(1) ⊂ LR(2)**
  - **LL(k) ⊂ LR(k),** per ogni k (per questo si preferisce le LR)



Linguaggi contestuali

- Un linguaggio è **LR(k),**
  - **se esiste una grammatica LR(k) che lo genera**
- Un linguaggio è
  - **LR se è LR(K) per qualche k**
- Per i linguaggi vale
  - **LR(K)=LR(1)=LR(0)= =SLR(1)=LALR(1)**
  - LL(1) ⊂ **LL(2) ⊂ LL(3)**
- Per la maggior parte dei linguaggi è possibile trovare grammatiche di ogni tipo