MASTER E^{2}C - Corso di STATISTICA
Prova finale - 15.7.2002

Esercizio 1. In un'urna sono contenute dieci palline: su sei di queste è stampato il numero 1, su tre il numero 2 e su una il numero 4. Si consideri la variabile aleatoria discreta X corrispondente al numero ottenuto da un'estrazione casuale di una pallina.

a) Determinare la funzione massa di probabilità $p_i = P\{X = x_i\}$ e tracciarne il grafico.

b) Determinare la funzione distribuzione di probabilità $F_X(x)$ e tracciarne il grafico.

c) Determinare il valore atteso $m_x = E[X]$ e la varianza $E[(X - m_x)^2]$ di una singola estrazione.

d) Ripetere i punti *a*) e *b*) relativamente alla variabile aleatoria Z, corrispondente al numero totale ottenuto dall'estrazione di due palline.

e) Supponendo che l'estrazione di due palline abbia dato come esito $Z = 6$, determinare la probabilità che l'estrazione di una terza pallina dia esito pari a 2, condizionata all'evento $Z = 6$. Determinare inoltre la densità di probabilità condizionata $f_{X_3|Z}(x_3|Z = 6)$ e il corrispondente valore atteso condizionato $E[X_3|Z = 6]$.

Esercizio 2. Si consideri per $\theta > 0$ la funzione definita da

$$f^\theta(x) = \begin{cases} \dfrac{4}{\theta^2}x & \text{se } 0 \le x \le \dfrac{\theta}{2} \\ \dfrac{4}{\theta^2}(\theta - x) & \text{se } \dfrac{\theta}{2} < x \le \theta \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases},$$

il cui andamento è riportato in Figura 1.

a) Verificare che per ogni $\theta > 0$ $f^\theta(x)$ è una densità di probabilità.

b) Per $\theta \in \{1, 2\}$, sia X una variabile aleatoria con densità di probabilità $f^\theta(x)$, e sia x l'osservazione disponibile di X. Scrivere l'espressione della funzione di verosimiglianza $L(\theta|x)$ e calcolare la stima di massima verosimiglianza di θ.

c) Definire la proprietà di stima non polarizzata. Quindi si consideri un campione $X_1, \ldots, X_n$ di densità $f^\theta(x)$. Dimostrare che

$$\hat{\theta} = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

è una stima non polarizzata di θ.

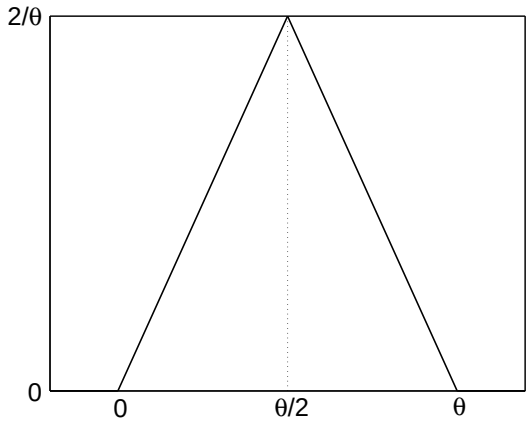


Figura 1: Densità di probabilità triangolare.

Esercizio 3. Sia θ una grandezza incognita, relativamente alla quale sono disponibili tre diverse misure:

$$\begin{aligned} y_1 &= \theta + v_1 \\ y_2 &= 2\theta + v_2 \\ y_3 &= \theta + v_3 \end{aligned}$$

dove v_i, $i = 1, 2, 3$, sono variabili aleatorie indipendenti, a media nulla.

a) Si consideri lo stimatore dato dalla media aritmetica, $\hat{\theta} = \dfrac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$. Stabilire se questo stimatore è corretto oppure polarizzato.

b) Determinare la stima ai minimi quadrati $\hat{\theta}_{LS}$ di θ, e stabilire se è polarizzata.

c) Assumendo $E[v_1^2] = E[v_2^2] = 1$ e $E[v_3^2] = \dfrac{1}{4}$, determinare la stima di Gauss-Markov $\hat{\theta}_{GM}$ di θ, e stabilire se è polarizzata.

d) Calcolare la varianza degli errori di stima $E[(\theta - \hat{\theta})^2]$, per le stime calcolate ai punti *b*) e *c*).

Esercizio 4. Si definisca il *livello di significatività* α di un test statistico, evidenziandone

- il ruolo svolto nell'ambito della verifica di ipotesi statistiche;
- la relazione con la *potenza* del test.