Esercizi di Calcolo delle Probabilità e Statistica

Master E^2C

Andrea Garulli, Antonio Giannitrapani, Simone Paoletti

Calcolo delle probabilità

Esercizio 1. Un dado viene lanciato 3 volte. Qual è la probabilità p di ottenere 6 almeno una volta? Quante volte deve essere lanciato il dado perché la probabilità di ottenere 6 almeno una volta sia maggiore o uguale al 90%?

Esercizio 2. Due numeri vengono estratti, senza rimpiazzo, da un'urna contenente dieci palline numerate da 1 a 10. Qual è la probabilità che i due numeri estratti siano consecutivi?

Esercizio 3. Le chiavi di un mazzo che ne contiene n vengono provate una dopo l'altra fino a trovare quella giusta. Naturalmente le chiavi già provate vengono messe da parte. Qual è la probabilità che la chiave giusta venga trovata al k-esimo tentativo?

Esercizio 4. Un'urna contiene due carte: una di esse ha entrambi i lati neri, mentre l'altra ha un lato nero ed uno bianco. Una carta viene estratta e se ne guarda uno dei lati: è nero. Qual è la probabilità che anche il secondo lato sia nero?

Esercizio 5. Tre urne contengono 10 palline ciascuna. Le palline nell'urna A sono contrassegnate con i numeri che vanno dall'1 al 10, quelle nell'urna B con i numeri che vanno dal 4 al 13, mentre quelle nell'urna C sono numerate da 6 a 15. Si sceglie un'urna a caso (tra di loro equiprobabili) e si estrae una pallina. Sia $\boldsymbol{x}$ la variabile aleatoria discreta corrispondente al numero stampato sulla pallina estratta.

a) Calcolare $\mathrm{P}(\boldsymbol{x} = 10)$, cioè la probabilità che il numero estratto sia 10.

b) Calcolare $\mathrm{P}(11 \leq \boldsymbol{x} \leq 13)$, cioè la probabilità che il numero estratto sia compreso tra 11 e 13.

c) Calcolare la probabilità che si sia scelta l'urna A, sapendo che l'esito dell'estrazione è stato $\boldsymbol{x} = 5$.

Esercizio 6. Si consideri l'esperimento consistente nel lancio contemporaneo di due dadi. Uno di essi è un dado non truccato, ovvero ciascuna faccia ha la stessa probabilità di manifestarsi. L'altro dado, invece, è truccato e la probabilità $\mathrm{P}(i)$ associata all'esito della faccia i-esima vale:

$$\mathrm{P}(i) = \begin{cases} \frac{1}{10} & \text{se } i = 1, \ldots, 5 \\ \frac{1}{2} & \text{se } i = 6. \end{cases}$$

a) Calcolare la probabilità che la somma dei numeri risultanti dall'esperimento sia pari a 10.

b) Si considerino n ripetizioni indipendenti dell'esperimento precedente e sia $\boldsymbol{x}$ una variabile aleatoria corrispondente al numero di volte che il lancio ha dato esito pari a 10. Scrivere l'espressione della densità di probabilità $f_{\boldsymbol{x}}(x)$ della variabile aleatoria $\boldsymbol{x}$.

c) Scelto uno dei due dadi a caso e lanciato, calcolare la probabilità che esso sia il dado truccato noto che l'esito del lancio è stato 6.

Esercizio 7. Da un'urna contenente 6 palline numerate da 1 a 6, se ne estraggono 2 *con rimpiazzo.* Indicando con $\boldsymbol{x}_1$ e $\boldsymbol{x}_2$ rispettivamente i risultati delle due estrazioni, si calcoli la densità di probabilità congiunta $f_{\boldsymbol{x_1},\boldsymbol{x_2}}(x_1, x_2)$ e le densità di probabilità marginali $f_{\boldsymbol{x_1}}(x_1)$, $f_{\boldsymbol{x_1}}(x_1)$ di $\boldsymbol{x}_1$ e $\boldsymbol{x}_2$. Si ripeta l'esercizio nel caso in cui le due estrazioni avvengano *senza rimpiazzo.* In quale dei due casi le variabili aleatorie $\boldsymbol{x}_1$ e $\boldsymbol{x}_2$ sono indipendenti?

Esercizio 8. Una moneta ed un dado vengono lanciati insieme ripetutamente. Qual è la probabilità che la moneta dia testa prima che il dado dia 6?

Esercizio 9. In una scatola nera sono contenuti due mazzi di carte. Il primo mazzo contiene 3 carte con i numeri 1, 3 e 4. Il secondo mazzo contiene 4 carte con i numeri 1, 2, 3 e 5. Senza guardare, un bambino sceglie in maniera equiprobabile un mazzo dalla scatola, ed estrae una carta dal mazzo. Sia $\boldsymbol{x}$ la variabile aleatoria discreta corrispondente al numero della carta estratta.

a) Determinare la funzione di densità di probabilità $f_{\boldsymbol{x}}(x)$ e tracciarne il grafico.

b) Determinare la funzione di distribuzione di probabilità $F_{\boldsymbol{x}}(x)$ e tracciarne il grafico.

c) Determinare il valor medio $m_{\boldsymbol{x}}$.

d) Noto che l'esito dell'estrazione della carta ha dato $\boldsymbol{x} = 1$, calcolare la probabilità *a posteriori* di aver scelto il primo mazzo. Confrontare questo valore con la probabilità *a priori*, e spiegare intuitivamente il risultato.

Esercizio 10. Due monete vengono lanciate più volte fino a che *entrambe* abbiano ottenuto almeno una volta testa. Qual è la probabilità che occorrano k lanci?
Suggerimento: indicando con $\boldsymbol{s}$ e $\boldsymbol{t}$ il numero di lanci necessari perché la prima e la seconda moneta rispettivamente diano testa, occorre calcolare la densità della v.a. $\max(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{t})$.

Esercizio 11. Due monete vengono lanciate più volte fino a che *almeno una* delle monete dia testa. Qual è la probabilità che occorrano k lanci?

Esercizio 12. Si consideri un esperimento che consiste nel lancio di due monete non truccate. Siano $\boldsymbol{x}_i$, $i \in \{1, 2\}$, due variabili aleatorie discrete che assumono i seguenti valori:

$$\boldsymbol{x}_i = \begin{cases} 1 & \text{se l'esito del lancio della moneta } i\text{-esima è testa} \\ 0 & \text{se l'esito del lancio della moneta } i\text{-esima è croce} \end{cases}$$

a) Per ciascuno dei seguenti eventi:

1. $A = \{(\boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{x}_2) = (1, 1)\}$
2. $B = \{(\boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{x}_2) = (1, 1) \mid \boldsymbol{x}_1 = 1\}$
3. $C = \{(\boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{x}_2) = (1, 1) \mid (\boldsymbol{x}_1 = 1) \cup (\boldsymbol{x}_2 = 1)\}$

descrivere brevemente il significato e calcolare la probabilità con cui si verifica.

Esercizio 13. Un'urna contiene 112 dadi di cui la metà sono equilibrati, mentre gli altri sono stati manipolati in modo che, per ciascuno di essi, la probabilità di ottenere 1 sia pari a $\frac{1}{2}$, mentre ogni altro risultato si verifica con probabilità $\frac{1}{10}$.

a) Un dado viene estratto a caso e lanciato. Indicando con $\boldsymbol{x}$ il risultato del lancio, si calcoli la probabilità di ottenere 3 ed il valor medio $\mathbf{E}[\boldsymbol{x}]$ di $\boldsymbol{x}$.

b) Un dado viene estratto a caso e lanciato due volte ottenendo 2 e 3. Qual è la probabilità che si tratti di uno dei dadi truccati?

c) Un dado viene estratto a caso e lanciato due volte. Si indichi con $\boldsymbol{x}$ ed $\boldsymbol{y}$ il risultato dei due lanci. Si tratta di v.a. indipendenti?

Esercizio 14. Un'urna A contiene n palline tutte rosse. Un'urna B contiene n palline, di cui r rosse e $n-r$ bianche. Si sceglie a caso un'urna e da essa si effettua una successione di estrazioni con rimpiazzo.

a) Qual è la probabilità che la prima pallina estratta sia rossa?

b) Qual è la probabilità che le prime due palline estratte abbiano colori diversi?

c) Quante estrazioni sono necessarie in media per veder comparire per la prima volta una pallina rossa?

d) Sapendo che le prime k palline estratte sono rosse, qual è la probabilità che l'urna dalla quale esse sono state estratte sia l'urna A? Si supponga che $n = 12,\ r = 4$. Quanto grande dovrà essere k perché si possa concludere che l'urna da cui le palline sono state estratte sia l'urna A con una probabilità almeno del 90%?

Esercizio 15. Tre urne contengono 30 palline ciascuna. Nell'urna A si trovano 10 palline contrassegnate col numero 1 e 20 col numero 2, nell'urna B si trovano 15 palline col numero 2 e 15 col numero 3, mentre nell'urna C si trovano 15 palline col numero 1 e 15 col numero 3. Si sceglie un'urna a caso (tra di loro equiprobabili) e si estrae una pallina. Sia $\boldsymbol{x}$ la variabile aleatoria discreta corrispondente al numero stampato sulla pallina estratta.

a) Calcolare $\mathrm{P}(\boldsymbol{x} = 1)$, cioè la probabilità che il numero estratto sia 1.

b) Calcolare il valor medio $m_{\boldsymbol{x}}$ di $\boldsymbol{x}$.

c) Calcolare la probabilità che si sia scelta l'urna A, sapendo che l'esito dell'estrazione è stato $\boldsymbol{x} = 1$.

Esercizio 16. Si consideri la funzione:

$$f_{\boldsymbol{x}}(x) = \begin{cases} \gamma^2 - \frac{16}{9}x^2 & \text{se } -\frac{3}{4}\gamma \leq x < \frac{3}{4}\gamma \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

in cui γ è un numero reale positivo.

a) Determinare il valore di γ per cui $f_{\boldsymbol{x}}(x)$ rappresenta effettivamente una funzione di densità di probabilità.

b) Sia $\boldsymbol{x}$ una variabile aleatoria con densità di probabilità $f_{\boldsymbol{x}}(x)$. Calcolare il valor medio $m_{\boldsymbol{x}}$ e la varianza $\sigma^2_{\boldsymbol{x}}$ di $\boldsymbol{x}$.

Esercizio 17. Si consideri la funzione:

$$f_{\boldsymbol{x}}(x) = \begin{cases} -\frac{1}{\alpha^2}(x-\alpha) & \text{se } 0 \le x < \alpha \\ -\frac{1}{\alpha^2}(x-2\alpha) & \text{se } \alpha \le x < 2\alpha \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

a) Mostrare che per ogni $\alpha > 0$, $f_{\boldsymbol{x}}(x)$ rappresenta una funzione di densità di probabilità.

b) Sia $\boldsymbol{x}$ una variabile aleatoria con densità di probabilità $f_{\boldsymbol{x}}(x)$. Calcolare il valor medio $m_{\boldsymbol{x}}$ e la varianza $\sigma^2_{\boldsymbol{x}}$ di $\boldsymbol{x}$ nel caso in cui $\alpha = 2$.

Esercizio 18. Dopo aver verificato che la funzione:

$$f_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}}(x,y) = \begin{cases} \frac{6}{7}(x+y)^2 & 0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le 1 \\ 0 & \text{altrove,} \end{cases}$$

sia effettivamente una densità di probabilità congiunta, si calcoli il valor medio e la matrice di covarianza del vettore $[\boldsymbol{x}\ \boldsymbol{y}]^T$.

Esercizio 19. Sia $\boldsymbol{x} = [\boldsymbol{x}_1\ \boldsymbol{x}_2\ \boldsymbol{x}_3]^T$ una v.a. in $\mathbb{R}^3$, con densità di probabilità:

$$f_{\boldsymbol{x}}(x_1,x_2,x_3) = \begin{cases} \frac{1}{2}x_1 + \frac{3}{2}x_2^2 + x_3^3 & \text{se } 0 \le x_i \le 1,\ i = 1,2,3 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Dopo aver verificato che $f_{\boldsymbol{x}}(x_1,x_2,x_3)$ rappresenta una d.d.p., si calcoli il valor medio e la matrice di covarianza di $\boldsymbol{x}$.

Esercizio 20. Siano $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ due variabili aleatorie scalari aventi densità di probabilità congiunta:

$$f_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}}(x,y) = \begin{cases} \alpha e^{-(x+y)} & \text{se } 0 \le x \le \ln 2 \ \text{ e } \ 0 \le y \le \ln 2 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

a) Determinare il valore di α affinché la $f_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}}(x,y)$ sia effettivamente una densità di probabilità.

b) Le variabili aleatorie $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ sono indipendenti? Perché?

c) Calcolare il valor medio $m_{\boldsymbol{z}}$ e la matrice di covarianza $R_{\boldsymbol{z}}$ della variabile aleatoria $\boldsymbol{z} = [\boldsymbol{x}\ \boldsymbol{y}]^T$.

Esercizio 21. Si consideri una v.a. $\boldsymbol{x}$ uniformemente distribuita nell'intervallo $[5, 10]$. Calcolare la densità di probabilità della v.a. $\boldsymbol{y} = \frac{1}{\boldsymbol{x}}$.

Esercizio 22. Sia $\boldsymbol{x}$ una variabile aleatoria avente densità di probabilità:

$$f_{\boldsymbol{x}}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x-1) & \text{se } x \in [1,\ 3] \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

a) Calcolare il valor medio $\mathbf{E}[\boldsymbol{x}]$ e la varianza $\mathrm{Var}(\boldsymbol{x})$ di $\boldsymbol{x}$.

Si consideri, ora, una seconda variabile aleatoria $\boldsymbol{y}$ uniformemente distribuita nell'intervallo $[0,\ 2]$, e sia $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$. Nell'ipotesi che $\boldsymbol{x}$ ed $\boldsymbol{y}$ siano indipendenti:

b) Calcolare il valor medio $\mathbf{E}[\boldsymbol{z}]$ e la varianza $\mathrm{Var}(\boldsymbol{z})$ di $\boldsymbol{z}$.

Esercizio 23. Siano $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ due v.a. aventi densità di probabilità $f_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}}(x, y)$. Calcolare la densità di probabilità della v.a. $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}$.

Esercizio 24. Sia $\boldsymbol{x} = [\boldsymbol{x}_1\ \boldsymbol{x}_2]^T$ una variabile aleatoria (vettoriale) Gaussiana, a media nulla. Di seguito sono riportate quattro possibili matrici di covarianza della v.a. $\boldsymbol{x}$:

$$R_1 = \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad R_2 = \begin{bmatrix} 9 & 5.4 \\ 5.4 & 4 \end{bmatrix}, \quad R_3 = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}, \quad R_4 = \begin{bmatrix} 9 & -5.4 \\ -5.4 & 4 \end{bmatrix}.$$

a) Per ciascuna matrice R_i, $i = 1, \ldots, 4$, dire se le v.a. $\boldsymbol{x}_1$ e $\boldsymbol{x}_2$ sono indipendenti o meno. Giustificare la risposta.

b) In Figura 1 sono riportate 5000 realizzazioni della v.a. $\boldsymbol{x}$, generate in corrispondenza di ciascuna matrice di covarianza R_i, $i = 1, \ldots, 4$. Associare ciascun grafico $(a), \ldots, (d)$ alla corrispondente matrice di covarianza R_i. Giustificare la risposta.

Teoria della stima

Esercizio 25. Sia $\boldsymbol{x}$ una variabile aleatoria avente densità di probabilità:

$$f_{\boldsymbol{x}}^{\theta}(x) = \begin{cases} \dfrac{\theta + x}{\theta + 1} e^{-x} & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

dove θ rappresenta un parametro incognito.

a) Mostrare che per ogni valore $\theta \geq 0$, $f_{\boldsymbol{x}}^{\theta}(x)$ rappresenta una densità di probabilità.

b) Supponendo $\theta \in [0,\ 4]$, calcolare la stima a massima verosimiglianza $\hat{\theta}_{ML}$ di θ sulla base dell'osservazione $\boldsymbol{x} = \frac{1}{2}$.

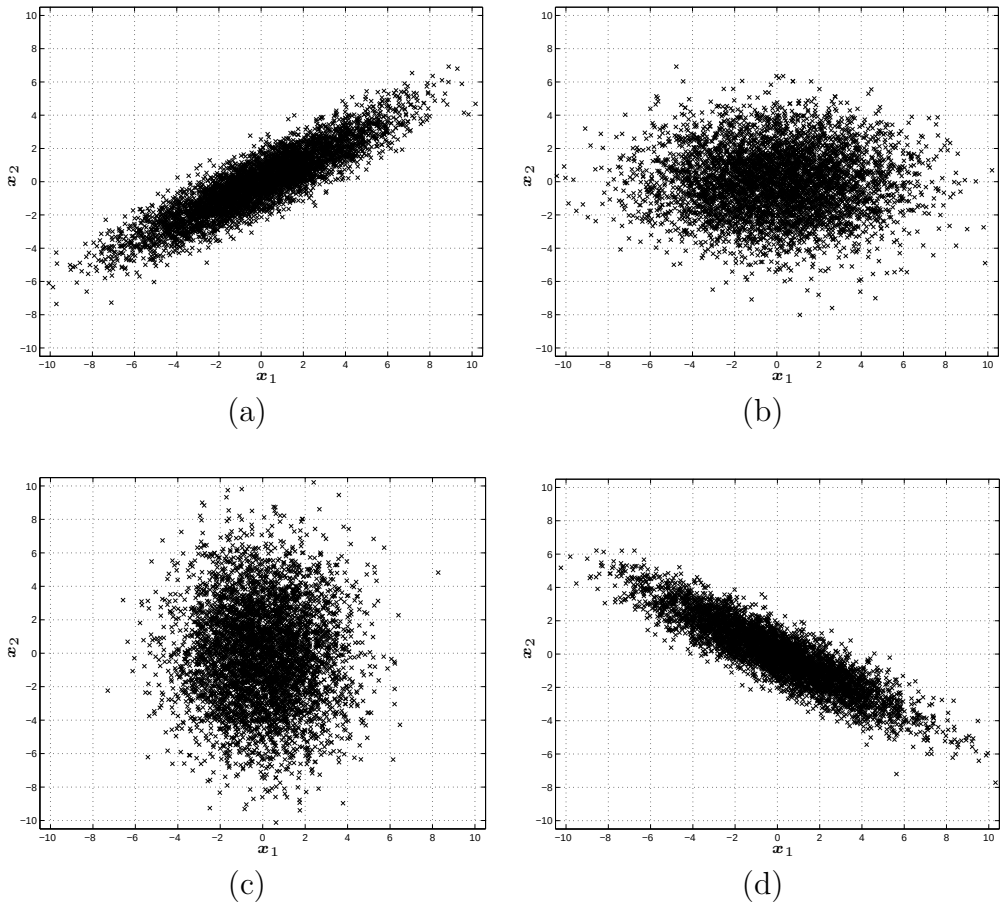


Figura 1

Esercizio 26. Siano $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ due variabili aleatorie aventi densità di probabilità congiunta:

$$f_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}}(x,y) = \begin{cases} \frac{3}{5}(x^2+y) & \text{se } -1 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

a) Calcolare le densità di probabilità marginali $f_{\boldsymbol{x}}(x)$, $f_{\boldsymbol{y}}(y)$ delle variabili aleatorie $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$.

b) Calcolare i valori medi $m_{\boldsymbol{x}}$ e $m_{\boldsymbol{y}}$ delle variabili aleatorie $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$.

c) Calcolare le varianze $\sigma^2_{\boldsymbol{x}}$ e $\sigma^2_{\boldsymbol{y}}$ delle variabili aleatorie $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$.

d) Stabilire se le variabili aleatorie $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ sono correlate o meno.

e) Calcolare la stima a minimo errore quadratico medio $\hat{x}_{MEQM}$ di $\boldsymbol{x}$ sulla base di un'osservazione della variabile aleatoria $\boldsymbol{y} = y$.

f) Verificare che la stima lineare a minimo errore quadratico medio $\hat{x}_{LMEQM}$ di $\boldsymbol{x}$ sulla base di un'osservazione della variabile aleatoria $\boldsymbol{y} = y$ vale:

$$\hat{x}_{LMEQM} = m_{\boldsymbol{x}}, \qquad \forall y,$$

dove $m_{\boldsymbol{x}}$ denota il valor medio di $\boldsymbol{x}$.

Esercizio 27. Si consideri la funzione:

$$f_{\boldsymbol{y}}^{\theta}(y) = \begin{cases} 2(y + \frac{2}{3} - \theta) & \text{se } \theta - \frac{2}{3} \leq y \leq \theta + \frac{1}{3} \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

dove $\theta \in \mathbb{R}$ rappresenta un parametro incognito. Sia $\boldsymbol{y}$ una variabile aleatoria con densità di probabilità $f_{\boldsymbol{y}}^{\theta}(y)$, e sia y l'osservazione disponibile di $\boldsymbol{y}$.

a) Scrivere l'espressione della funzione di verosimiglianza $L(\theta|y)$.

b) Calcolare la stima di massima verosimiglianza $\hat{\theta}_{ML}$ di θ.

Esercizio 28. Si consideri la variabile aleatoria $\boldsymbol{v}$, la cui funzione di densità della probabilità e rappresentata in Figura 2.

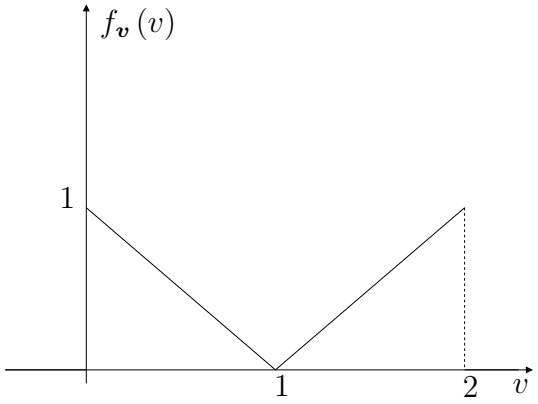


Figura 2: Densità di probabilità.

a) Calcolare la media e la varianza della variabile aleatoria $\boldsymbol{v}$.

b) Siano $\boldsymbol{y}_1$ e $\boldsymbol{y}_2$ due misure, affette da rumore, del parametro incognito θ, tali che:

$$\boldsymbol{y}_1 = \theta + \boldsymbol{v}, \quad \boldsymbol{y}_2 = \theta + \boldsymbol{w},$$

dove $\boldsymbol{v}$ è la variabile aleatoria considerata al punto *a*), e $\boldsymbol{w}$ è una v.a. gaussiana di media nulla e varianza 1, indipendente da $\boldsymbol{v}$. Si considerino gli stimatori di θ:

$$\hat{\theta}_1 = \frac{\boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{y}_2 - 1}{2}, \quad \hat{\theta}_2 = \frac{2\boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{y}_2 - 2}{3},$$

e per ciascuno di essi si stabilisca se è uno stimatore corretto oppure polarizzato.

c) Si calcoli la varianza degli stimatori $\hat{\theta}_1$ e $\hat{\theta}_2$ considerati al punto *b*).
Può esistere uno stimatore lineare non polarizzato che abbia varianza minore di $\min\{\mathrm{Var}(\hat{\theta}_1), \mathrm{Var}(\hat{\theta}_2)\}$? Perché?

Esercizio 29. Siano $\boldsymbol{d}_1$, $\boldsymbol{d}_2$ variabili aleatorie indipendenti identicamente distribuite, con densità di probabilità data da:

$$f(\delta) = \begin{cases} \theta e^{-\theta\delta} & \text{se } \delta \geq 0 \\ 0 & \text{se } \delta < 0. \end{cases}$$

Siano δ_1, δ_2 le osservazioni disponibili di $\boldsymbol{d}_1$, $\boldsymbol{d}_2$. Determinare la stima di massima verosimiglianza di θ.

Esercizio 30. Siano $\boldsymbol{d}_1$, $\boldsymbol{d}_2$ variabili aleatorie gaussiane indipendenti, tali che:

$$\mathbf{E}\left[\boldsymbol{d}_1\right] = m, \quad \mathbf{E}\left[\boldsymbol{d}_2\right] = 3m, \quad \mathbf{E}\left[(\boldsymbol{d}_1 - m)^2\right] = 2, \quad \mathbf{E}\left[(\boldsymbol{d}_2 - 3m)^2\right] = 4.$$

Siano δ_1, δ_2 le osservazioni disponibili di $\boldsymbol{d}_1$, $\boldsymbol{d}_2$. Determinare:

a) la stima lineare a minima varianza di m tra gli stimatori non polarizzati;

b) la varianza di tale stima;

c) la stima di massima verosimiglianza (c'è differenza con la stima al punto *a*)?).

Esercizio 31. Sia θ un parametro incognito, relativamente al quale sono disponibili due misure:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y}_1 &= \theta + \boldsymbol{v}_1 \\ \boldsymbol{y}_2 &= 3\theta + \boldsymbol{v}_2, \end{aligned}$$

dove $\boldsymbol{v}_1$ e $\boldsymbol{v}_2$ rappresentano gli errori di misura, che sono supposti indipendenti. Sia:

$$f_{\boldsymbol{v_1}}(v_1) = \begin{cases} 1 + v_1 & \text{se } -1 \leq v_1 \leq 0 \\ 1 - v_1 & \text{se } 0 < v_1 \leq 1 \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

la densità di probabilità di $\boldsymbol{v}_1$ e $\sigma^2_{\boldsymbol{v_2}} = \frac{1}{2}$ la varianza di $\boldsymbol{v}_2$.

a) Calcolare la stima ai minimi quadrati $\hat{\theta}_{LS}$ di θ sulla base delle osservazioni $\boldsymbol{y}_1,\ \boldsymbol{y}_2$.

b) Calcolare la stima di Gauss-Markov $\hat{\theta}_{GM}$ di θ sulla base delle osservazioni $\boldsymbol{y}_1,\ \boldsymbol{y}_2$.

c) C'è differenza fra le stime calcolate ai punti precedenti? Perché?

Esercizio 32. Sia $\boldsymbol{y}$ una variabile aleatoria avente densità di probabilità:

$$f^{\theta}_{\boldsymbol{y}}(y) = \begin{cases} c(y + \frac{3}{2} - \theta) & \text{se } \theta - \frac{3}{2} \leq y \leq \theta + \frac{1}{2} \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

dove $\theta \in \mathbb{R}$ rappresenta un parametro incognito.

a) Calcolare il valore di c affinché $f^{\theta}_{\boldsymbol{y}}(y)$ sia effettivamente una densità di probabilità.

b) Calcolare la stima di massima verosimiglianza $\hat{\theta}_{ML}$ di θ.

c) Stabilire se lo stimatore calcolato al punto precedente è polarizzato o meno.

Esercizio 33. Sia θ una grandezza incognita, relativamente alla quale sono disponibili tre diverse misure:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y}_1 &= \theta + \boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{y}_2 &= 3\theta + \boldsymbol{e}_2 \\ \boldsymbol{y}_3 &= 2\theta + \boldsymbol{e}_3, \end{aligned}$$

dove $\boldsymbol{e}_i$, $i = 1, 2$, sono variabili aleatorie gaussiane, a media nulla e varianza $\sigma_i = 2$, mentre $\boldsymbol{e}_3$ è una variabile aleatoria uniformente distribuita nell'intervallo $[-1,\ 1]$. Si supponga che i rumori di misura $\boldsymbol{e}_i$, $i = 1, 2, 3$, siano tra di loro indipendenti.

a) Stabilire quale dei seguenti stimatori è corretto oppure polarizzato:

$$\hat{\theta}_1 = \frac{\boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{y}_2 + \boldsymbol{y}_3}{3}, \quad \hat{\theta}_2 = \boldsymbol{y}_2 - 3\boldsymbol{y}_1, \quad \hat{\theta}_3 = \frac{\boldsymbol{y}_1 + 2\boldsymbol{y}_2 + \boldsymbol{y}_3}{9}, \quad \hat{\theta}_4 = \frac{\boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{y}_2 + \boldsymbol{y}_3}{6}.$$

b) Calcolare la stima ai minimi quadrati $\hat{\theta}_{LS}$ di θ sulla base delle misure $\boldsymbol{y}_i$, $i = 1, 2, 3$, e stabilire se è polarizzata.

c) Calcolare la stima di Gauss-Markov $\hat{\theta}_{GM}$ di θ sulla base delle misure $\boldsymbol{y}_i$, $i = 1, 2, 3$, e stabilire se è polarizzata.

d) Calcolare la varianza degli errori di stima $E[(\hat{\theta} - \theta)^2]$ per le stime calcolate ai punti *b*) e *c*).

Esercizio 34. Su un parametro incognito θ vengono effettuate tre misure affette da rumore:

$$\boldsymbol{y_i} = \theta + \boldsymbol{v}_i, \quad i = 1, 2, 3,$$

dove i rumori $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ sono variabili aleatorie di distribuzione uniforme nell'intervallo $[-T_i,\ T_i]$, con rispettivamente $T_1 = 1$, $T_2 = 2$ e $T_3 = 3$.

a) Calcolare la stima ai minimi quadrati $\hat{\theta}_{LS}$ di θ.

b) Calcolare la stima di Gauss-Markov $\hat{\theta}_{GM}$ di θ.

c) Ordinare i seguenti stimatori non polarizzati, in ordine decrescente di varianza dell'errore di stima:

$$\hat{\theta}_1 = \boldsymbol{y}_1, \quad \hat{\theta}_2 = \frac{\boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{y}_2}{2}, \quad \hat{\theta}_3 = \frac{4}{5}\boldsymbol{y}_1 + \frac{1}{5}\boldsymbol{y}_2, \quad \hat{\theta}_4 = \hat{\theta}_{LS}.$$

Esercizio 35. Sia $\boldsymbol{x}$ una variabile aleatoria uniformemente distribuita nell'intervallo $[-1,\ 1]$ e si consideri la nuova variabile aleatoria $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x}^3$.

a) Calcolare la densità di probabilità $f_{\boldsymbol{z}}(z)$ della variabile aleatoria $\boldsymbol{z}$.

b) Calcolare il valor medio $m_{\boldsymbol{z}}$ e la varianza $\sigma^2_{\boldsymbol{z}}$ di $\boldsymbol{z}$.

Sia θ una grandezza incognita, relativamente alla quale sono disponibili due misure:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y}_1 &= \theta + \boldsymbol{e} \\ \boldsymbol{y}_2 &= 2\theta + \boldsymbol{z}, \end{aligned}$$

dove $\boldsymbol{e}$ è una variabile aleatoria gaussiana a media nulla e varianza $\sigma_{\boldsymbol{e}}^2 = 2$, mentre $\boldsymbol{z}$ è la variabile aleatoria considerata in precedenza. Si supponga che i rumori di misura $\boldsymbol{e}$ e $\boldsymbol{z}$ siano tra di loro indipendenti.

c) Calcolare la stima ai minimi quadrati $\hat{\theta}_{LS}$ di θ sulla base delle misure $\boldsymbol{y}_i$, $i = 1, 2$, e stabilire se è polarizzata.

d) Calcolare la stima di Gauss-Markov $\hat{\theta}_{GM}$ di θ sulla base delle misure $\boldsymbol{y}_i$, $i = 1, 2$, e stabilire se è polarizzata.

Esercizio 36. Sulla grandezza incognita x sono effettuate due misure:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y}_1 &= x + \boldsymbol{d}_1 \\ \boldsymbol{y}_2 &= 2x + \boldsymbol{d}_2, \end{aligned}$$

dove $\boldsymbol{d}_1$ e $\boldsymbol{d}_2$ sono disturbi indipendenti rappresentati da v.a. con densità di probabilità:

$$f(\delta) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda\delta} & \text{se } \delta \geq 0 \\ 0 & \text{se } \delta < 0. \end{cases}$$

a) Determinare la stima di massima verosimiglianza di x.

b) Dire se la stima ottenuta è non polarizzata.

Esercizio 37. Si consideri per $\theta \in [-2, 2]$ la funzione definita da:

$$f^\theta(x) = \begin{cases} \theta x + 1 - \dfrac{\theta}{2} & \text{se } x \in [0, 1] \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

a) Mostrare che per ogni $\theta \in [-2, 2]$ f^θ è una densità di probabilità.

b) Sia $\boldsymbol{y}$ una variabile aleatoria di densità f^θ. Calcolare in funzione di θ media e varianza di $\boldsymbol{y}$.

c) Sia $\boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_n$ un campione di dimensione n della densità f^θ e si ponga:

$$T(\boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_n) = 12 \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{y}_k - \frac{1}{2} \right).$$

Mostrare che T è uno stimatore non polarizzato di θ.

Esercizio 38. Siano a e b due grandezze incognite, relativamente alle quali sono disponibili tre diverse misure:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y}_1 &= a + \boldsymbol{v}_1 \\ \boldsymbol{y}_2 &= b + \boldsymbol{v}_2 \\ \boldsymbol{y}_3 &= a + b + \boldsymbol{v}_3, \end{aligned}$$

dove $\boldsymbol{v}_i$, $i = 1, 2, 3$, sono variabili aleatorie indipendenti, a media nulla.
Assumendo $\mathbf{E}\left[\boldsymbol{v}_1^2\right] = \mathbf{E}\left[\boldsymbol{v}_3^2\right] = 1$ e $\mathbf{E}\left[\boldsymbol{v}_2^2\right] = \dfrac{1}{2}$, determinare:

a) la stima ai minimi quadrati di a e b;

b) la stima di Gauss-Markov di a e b;

c) la varianza degli errori di stima, ovvero $\mathbf{E}\left[(\hat{a} - a)^2 + (\hat{b} - b)^2\right]$, per le stime $\hat{a}$ e $\hat{b}$ calcolate ai punti *a*) e *b*).

Confrontare inoltre le stime ottenute con quelle che si avrebbero se la misura $\boldsymbol{y}_3$ non fosse disponibile. Come si modifica la varianza dell'errore di stima?

Esercizio 39. Si consideri la variabile aleatoria $\boldsymbol{x}$, la cui funzione di densità della probabilità è rappresentata in Figura 3.

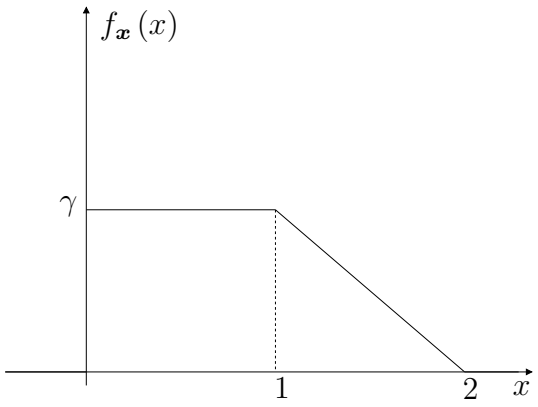


Figura 3: Densità di probabilità trapezoidale.

a) Determinare il valore della variabile γ affinché $f_{\boldsymbol{x}}(x)$ sia effettivamente una funzione di densità della probabilità.

b) Usando il valore di γ calcolato al punto *a*), determinare il valor medio $\mathbf{E}[\boldsymbol{x}]$ di $\boldsymbol{x}$.

c) Su un parametro incognito θ viene effettuata una misura $\boldsymbol{y}$, tale che:

$$\boldsymbol{y} = 3\theta + \boldsymbol{x},$$

dove $\boldsymbol{x}$ rappresenta il rumore di misura ed ha densità di probabilità pari a $f_{\boldsymbol{x}}(x)$. Determinare uno stimatore lineare affine:

$$\hat{\theta} = a\boldsymbol{y} + b,$$

con $a, b \in \mathbb{R}$ coefficienti da determinare in modo che $\hat{\theta}$ sia uno stimatore non polarizzato.

d) Determinare lo stimatore a massima verosimiglianza $\hat{\theta}_{ML}$ di θ, basato sulla misura $\boldsymbol{y}$ considerata al punto *c*). Lo stimatore a massima verosimiglianza è unico? Ne esiste almeno uno non polarizzato?

Esercizio 40. Siano $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ due variabili aleatorie aventi densità di probabilità congiunta:

$$f_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}}(x,y) = \begin{cases} \frac{2}{9}y & \text{se } y \le x \le 3,\ 0 \le y \le 3 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

a) Calcolare la densità di probabilità marginale $f_{\boldsymbol{y}}(y)$ della v.a. $\boldsymbol{y}$.

b) Calcolare il valor medio $m_{\boldsymbol{y}}$ e la varianza $\sigma^2_{\boldsymbol{y}}$ della v.a. $\boldsymbol{y}$.

c) Calcolare la stima a minimo errore quadratico medio $\hat{x}_{MEQM}$ di $\boldsymbol{x}$ sulla base di un'osservazione della variabile aleatoria $\boldsymbol{y} = y$.

Esercizio 41. Si considerino due variabili aleatorie $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$, la cui d.d.p. congiunta è:

$$f_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}}(x,y) = \begin{cases} -\frac{3}{2}x^2 + 2xy & 0 \le x \le 1,\ 1 \le y \le 2 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Si vuole determinare la stima $\hat{\boldsymbol{x}}_{LMEQM}$ di $\boldsymbol{x}$, basata su una osservazione di $\boldsymbol{y}$.
Calcolare inoltre il valore atteso delle stime trovate e confrontarlo con il valor medio a priori $\mathbf{E}[\boldsymbol{x}]$.

Esercizio 42. Siano $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ due variabili aleatorie con densità di probabilità congiunta:

$$f_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{12}(x+y)e^{-y} & 0 \le x \le 4,\ \ y \ge 0 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Si assuma di disporre di una osservazione y della v.a. $\boldsymbol{y}$.

a) Determinare le stime $\hat{\boldsymbol{x}}_{MEQM}$ e $\hat{\boldsymbol{x}}_{LMEQM}$ di $\boldsymbol{x}$.

Esercizio 43. Sia θ una grandezza incognita, relativamente alla quale sono disponibili tre diverse misure:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y}_1 &= \theta + \boldsymbol{v}_1 \\ \boldsymbol{y}_2 &= -\theta + \boldsymbol{v}_2 \\ \boldsymbol{y}_3 &= 2\theta + \boldsymbol{v}_3, \end{aligned}$$

dove $\boldsymbol{v}_i$, $i = 1, 2$, sono variabili aleatorie gaussiane, a media nulla e varianza $\sigma_i^2 = 1$, mentre $\boldsymbol{v}_3$ è una variabile aleatoria uniformemente distribuita nell'intervallo $[-\sqrt{6},\ \sqrt{6}]$. Si supponga che i rumori di misura $\boldsymbol{v}_i$, $i = 1, 2, 3$, siano tra di loro indipendenti.

a) Stabilire quale dei seguenti stimatori è corretto oppure polarizzato:

$$\hat{\theta}_1 = \boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{y}_2 + \boldsymbol{y}_3, \quad \hat{\theta}_2 = \boldsymbol{y}_1 - \boldsymbol{y}_2 - \boldsymbol{y}_3, \quad \hat{\theta}_3 = \frac{\boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{y}_2 + \boldsymbol{y}_3}{2}, \quad \hat{\theta}_4 = \boldsymbol{y}_2 + \boldsymbol{y}_3.$$

b) Calcolare la stima ai minimi quadrati $\hat{\theta}_{LS}$ di θ sulla base delle misure $\boldsymbol{y}_i$, $i = 1, 2, 3$, e stabilire se è polarizzata.

c) Calcolare la stima di Gauss-Markov $\hat{\theta}_{GM}$ di θ sulla base delle misure $\boldsymbol{y}_i$, $i = 1, 2, 3$, e stabilire se è polarizzata.

d) Calcolare la varianza degli errori di stima $E[(\hat{\theta} - \theta)^2]$, per le stime calcolate ai punti *b*) e *c*).

Esercizio 44. Siano $\boldsymbol{y}_1$ e $\boldsymbol{y}_2$ due variabili aleatorie indipendenti identicamente distribuite, con densità di probabilità:

$$f^{\theta}_{\boldsymbol{y_i}}(y_i) = \begin{cases} e^{-(y_i - \theta)} & \text{se } y_i \geq \theta \\ 0 & \text{se } y_i < \theta, \end{cases}$$

dove $\theta \geq 0$ è un parametro incognito. Avendo osservato per le v.a. $\boldsymbol{y}_i$ le realizzazioni $\boldsymbol{y}_1 = y_1$ e $\boldsymbol{y}_2 = y_2$:

a) scrivere l'espressione della verosimiglianza $L(\theta | y_1, y_2)$;

b) calcolare la stima di massima verosimiglianza $\hat{\theta}_{ML}$ di θ sulla base delle osservazioni disponibili.

MASTER E^{2}C - Corso di STATISTICA
Prova finale - 15.7.2002

Esercizio 1. In un'urna sono contenute dieci palline: su sei di queste è stampato il numero 1, su tre il numero 2 e su una il numero 4. Si consideri la variabile aleatoria discreta $\boldsymbol{x}$ corrispondente al numero ottenuto da un'estrazione casuale di una pallina.

a) Determinare la funzione massa di probabilità $p_i = P\{\boldsymbol{x} = x_i\}$ e tracciarne il grafico.

b) Determinare la funzione distribuzione di probabilità $F_{\boldsymbol{x}}(x)$ e tracciarne il grafico.

c) Determinare il valore atteso $m_{\boldsymbol{x}} = E[\boldsymbol{x}]$ e la varianza $E[(\boldsymbol{x} - m_{\boldsymbol{x}})^2]$ di una singola estrazione.

d) Ripetere i punti *a*) e *b*) relativamente alla variabile aleatoria $\boldsymbol{z}$, corrispondente al numero totale ottenuto dall'estrazione di due palline.

e) Supponendo che l'estrazione di due palline abbia dato come esito $\boldsymbol{z} = 6$, determinare la probabilità che l'estrazione di una terza pallina dia esito pari a 2, condizionata all'evento $\boldsymbol{z} = 6$. Determinare inoltre la densità di probabilità condizionata $f_{\boldsymbol{x}_3|\boldsymbol{z}}(x_3|\boldsymbol{z} = 6)$ e il corrispondente valore atteso condizionato $E[\boldsymbol{x}_3|\boldsymbol{z} = 6]$.

Esercizio 2. Si consideri per $\theta > 0$ la funzione definita da:

$$f^\theta(x) = \begin{cases} \dfrac{4}{\theta^2}x & \text{se } 0 \le x \le \dfrac{\theta}{2} \\ \dfrac{4}{\theta^2}(\theta - x) & \text{se } \dfrac{\theta}{2} < x \le \theta \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

il cui andamento è riportato in Figura 4.

a) Verificare che per ogni $\theta > 0$ $f^\theta(x)$ è una densità di probabilità.

b) Per $\theta \in \{1, 2\}$, sia $\boldsymbol{x}$ una variabile aleatoria con densità di probabilità $f^\theta(x)$, e sia x l'osservazione disponibile di $\boldsymbol{x}$. Scrivere l'espressione della funzione di verosimiglianza $L(\theta|x)$ e calcolare la stima di massima verosimiglianza di θ.

c) Definire la proprietà di stima non polarizzata. Quindi si consideri un campione $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ di densità $f^\theta(x)$. Dimostrare che:

$$\hat{\theta} = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{x}_i$$

è una stima non polarizzata di θ.

Esercizio 3. Sia θ una grandezza incognita, relativamente alla quale sono disponibili tre diverse misure:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y}_1 &= \theta + \boldsymbol{v}_1 \\ \boldsymbol{y}_2 &= 2\theta + \boldsymbol{v}_2 \\ \boldsymbol{y}_3 &= \theta + \boldsymbol{v}_3, \end{aligned}$$

dove $\boldsymbol{v}_i$, $i = 1, 2, 3$, sono variabili aleatorie indipendenti, a media nulla.

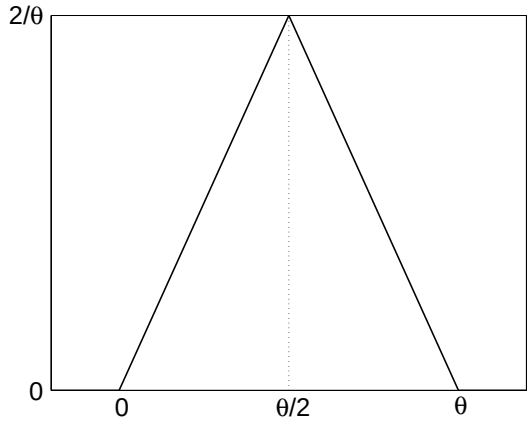


Figura 4: Densità di probabilità triangolare.

a) Si consideri lo stimatore dato dalla media aritmetica $\hat{\theta} = \dfrac{\boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{y}_2 + \boldsymbol{y}_3}{3}$. Stabilire se questo stimatore è corretto oppure polarizzato.

b) Determinare la stima ai minimi quadrati $\hat{\theta}_{LS}$ di θ, e stabilire se è polarizzata.

c) Assumendo $E[\boldsymbol{v}_1^2] = E[\boldsymbol{v}_2^2] = 1$ e $E[\boldsymbol{v}_3^2] = \dfrac{1}{4}$, determinare la stima di Gauss-Markov $\hat{\theta}_{GM}$ di θ, e stabilire se è polarizzata.

d) Calcolare la varianza degli errori di stima $E[(\hat{\theta} - \theta)^2]$, per le stime calcolate ai punti *b*) e *c*).

Esercizio 4. Si definisca il *livello di significatività* α di un test statistico, evidenziandone:

- il ruolo svolto nell'ambito della verifica di ipotesi statistiche;
- la relazione con la *potenza* del test.

MASTER E^{2}C - Corso di STATISTICA
Prova di recupero - 3.9.2002

Esercizio 1.
Si consideri un dado a sei facce: su tre facce è impresso il numero 1; su due facce il numero 3 e su una faccia il numero 6. Si definisca la variabile aleatoria discreta $\boldsymbol{x}$ corrispondente al numero ottenuto da un lancio del dado.

a) Determinare la funzione massa di probabilità $p_i = P\{\boldsymbol{x} = x_i\}$ e tracciarne il grafico.

b) Determinare la funzione distribuzione di probabilità $F_{\boldsymbol{x}}(x)$ e tracciarne il grafico.

c) Determinare il valore atteso $m_{\boldsymbol{x}} = E[\boldsymbol{x}]$ e la varianza $E[(\boldsymbol{x} - m_{\boldsymbol{x}})^2]$ di un singolo lancio.

Si consideri ora la variabile aleatoria $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2$ corrispondente alla somma dei punteggi ottenuti dal lancio di due dadi $\boldsymbol{x}_1$ e $\boldsymbol{x}_2$, con le stesse caratteristiche del dado precedente.

d) Determinare la funzione massa di probabilità $q_i = P\{\boldsymbol{z} = z_i\}$ e tracciarne il grafico.

e) Calcolare la probabilità che $\boldsymbol{z}$ sia maggiore di 8, ovvero $P\{\boldsymbol{z} > 8\}$.

f) Calcolare la probabilità che $\boldsymbol{z}$ sia maggiore di 8, sapendo che almeno uno dei due dadi ha dato come esito il numero 3, ovvero $P\{\boldsymbol{z} > 8 \mid \boldsymbol{x}_1 = 3 \text{ oppure } \boldsymbol{x}_2 = 3\}$.

Esercizio 2.
Si consideri per $\theta > 0$ la funzione definita da:

$$f^\theta(x) = \begin{cases} -\dfrac{3}{2}\theta^3 x^2 + \dfrac{3}{2}\theta & \text{se } 0 \le x \le \dfrac{1}{\theta} \\ \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

il cui andamento è riportato in Figura 5.

a) Verificare che, per ogni $\theta > 0$, $f^\theta(x)$ è una densità di probabilità.

b) Sia $\boldsymbol{x}$ una variabile aleatoria con densità di probabilità $f^\theta(x)$. Calcolare il valore atteso di $\boldsymbol{x}$, $E[\boldsymbol{x}]$.

c) Sia x l'osservazione disponibile della variabile aleatoria $\boldsymbol{x}$. Calcolare la stima di massima verosimiglianza di θ.

Esercizio 3.
Sia θ una grandezza incognita, sulla quale sono effettuate cinque misure: le prime due $(\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2)$ con uno strumento A, le rimanenti tre $(\boldsymbol{y}_3, \boldsymbol{y}_4, \boldsymbol{y}_5)$ con uno strumento B. Il rumore presente nelle cinque misure può essere rappresentato da variabili aleatorie indipendenti a media nulla, $\boldsymbol{v}_i$, $i = 1, \ldots, 5$. A causa della diversa precisione dello strumento si ha:

$$E[\boldsymbol{v}_1^2] = E[\boldsymbol{v}_2^2] = 4, \qquad E[\boldsymbol{v}_3^2] = E[\boldsymbol{v}_4^2] = E[\boldsymbol{v}_5^2] = 1.$$

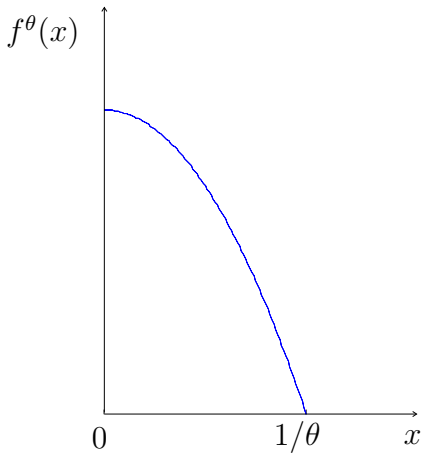


Figura 5: Densità di probabilità $f^\theta(x)$.

a) Determinare la stima ai minimi quadrati $\hat{\theta}_{LS}$ di θ, e stabilire se è polarizzata.

b) Determinare la stima di Gauss-Markov $\hat{\theta}_{GM}$ di θ, e stabilire se è polarizzata.

c) Si consideri ora la stima di θ ottenuta considerando solo le misure effettuate con lo strumento più preciso B, ovvero:

$$\hat{\theta}_B = \frac{\boldsymbol{y}_3 + \boldsymbol{y}_4 + \boldsymbol{y}_5}{3}.$$

Calcolare la varianza degli errori di stima:

$$E[(\hat{\theta}_B - \theta)^2], \quad E[(\hat{\theta}_{GM} - \theta)^2], \quad E[(\hat{\theta}_{LS} - \theta)^2].$$

Quale stimatore garantisce la maggiore precisione (cioè la minor varianza dell'errore di stima)? Come mai?

Esercizio 4.
Si descrivano i *tipi di errore* che possono essere commessi da un test statistico, spiegando il differente ruolo svolto dall'*ipotesi nulla* e dall'*ipotesi alternativa* in una procedura di verifica di ipotesi statistiche. E' possibile ridurre contemporaneamente la probabilità di commettere errori di entrambi i tipi? Se sì, come?

MASTER E^{2}C - Corso di STATISTICA
Prova finale - 2.2.2004

Esercizio 1. In un'urna sono contenute dieci palline numerate da 1 a 10. Vengono effettuate due estrazioni senza rimpiazzo. Si considerino le variabili aleatorie:

$$\boldsymbol{x}_i = \{\text{numero della pallina estratta all' } i\text{-esima estrazione}\}, \quad i = 1, 2.$$

a) Determinare le probabilità degli eventi $\{\boldsymbol{x}_1 = i, \boldsymbol{x}_2 = j\}$, per $i, j = 1, \ldots, 10$.

b) Determinare la probabilità dell'evento $\{\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 = 5\}$.

c) Determinare la probabilità dell'evento $\{\boldsymbol{x}_2$ è pari$\}$. C'è differenza con la probabilità dell'evento $\{\boldsymbol{x}_1$ è pari$\}$?

d) Determinare la probabilità dell'evento $\{\boldsymbol{x}_2 = 9\}$, sapendo che la prima estrazione ha dato un esito maggiore di 5 (ovvero $\boldsymbol{x}_1 > 5$).

Esercizio 2. Si consideri la variabile aleatoria $\boldsymbol{x}$, la cui funzione di densità della probabilità è definita da:

$$f_{\boldsymbol{x}}(x) = \begin{cases} \alpha & \text{se } \ 0 \le x < \theta \\ \dfrac{1}{2}\alpha & \text{se } \ \theta \le x \le 1 \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

dove θ è un parametro incognito compreso tra 0 e 1, e α è un coefficiente da determinare.

a) Determinare il valore di α in modo che la funzione $f_{\boldsymbol{x}}(x)$ sia effettivamente una densità di probabilità.

b) Calcolare e disegnare la funzione di distribuzione della probabilità $F_{\boldsymbol{x}}(x)$.

c) Assumendo $\theta = \dfrac{1}{2}$, calcolare media e varianza della variabile aleatoria $\boldsymbol{x}$.

d) Determinare la stima a massima verosimiglianza del parametro θ e dire se tale stima è corretta o polarizzata.

Esercizio 3. Siano a e b due parametri incogniti, e si considerino le misure:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y}_1 &= a + b + \boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{y}_2 &= a - b + \boldsymbol{e}_2, \end{aligned}$$

dove $\boldsymbol{e}_1$ e $\boldsymbol{e}_2$ sono variabili aleatorie indipendenti con densità di probabilità $N(0, \sigma_1^2)$ e $N(0, \sigma_2^2)$, rispettivamente.

a) Determinare la funzione di densità di probabilità della v.a. $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{y}_2$. Supponendo di disporre della sola misura $\boldsymbol{y} = y$, calcolare la stima di massima verosimiglianza del parametro a basata su y, $\hat{a} = T_{ML}(y)$.

b) Determinata la funzione di densità di probabilità congiunta delle v.a. $\boldsymbol{y}_1$ e $\boldsymbol{y}_2$, calcolare la stima di massima verosimiglianza del parametro a basata sulle misure $\boldsymbol{y}_1 = y_1$ e $\boldsymbol{y}_2 = y_2$, $\hat{a} = T_{ML}(y_1, y_2)$. C'è differenza tra le stime calcolate ai punti *a*) e *b*)?

c) Determinare la stima ai minimi quadrati $\hat{a}_{LS}$, $\hat{b}_{LS}$ dei parametri a e b.

d) Determinare se la stima $\hat{a}$ calcolata al punto *a*) è corretta, e calcolarne la varianza. Dimostrare che $\hat{a}$ è la miglior stima lineare non polarizzata (BLUE) di a, basata su $\boldsymbol{y}_1 = y_1$ e $\boldsymbol{y}_2 = y_2$.

Esercizio 4.
Il direttore finanziario della società di spedizioni FedEx ha escogitato il seguente sistema, per ridurre i tempi medi entro cui i propri clenti pagano le fatture mensili. Egli ha maturato la convinzione che includere nelle fatture inviate mensilmente ai propri clienti, una busta con già stampato l'indirizzo a cui spedire i pagamenti, potrebbe portare ad una riduzione dei ritardi che attualmente si riscontrano. Con il sistema di fatturazione in uso, in media i pagamenti avvengono entro 24 giorni, con una deviazione standard di 6 giorni, ed hanno una distribuzione assimilabile ad una Gaussiana.
È stato calcolato che ridurre i ritardi di pagamento ad una media di 22 giorni, consentirebbe di coprire i costi associati all'invio della busta prestampata. Per verificarne l'efficacia, il nuovo sistema è stato provato su un campione casuale di 220 clienti. Dall'indagine effettuata, il tempo medio entro cui i clienti hanno effettuato i pagamenti è risultato essere pari a 21.63 giorni.
Supponendo che la massima probabilità accettabile di introdurre inutilmente il nuovo sistema di fatturazione sia pari a 0.1, e che la deviazione standard dei tempi di pagamento rimanga invariata, si utilizzi un test per valutare la significatività statistica della apparente riduzione dei ritardi. In particolare si specifichino:

- l'ipotesi nulla $\mathbf{H_0}$ e l'ipotesi alternativa $\mathbf{H_1}$;
- la statistica di test da utilizzare;
- il livello di significatività α da adoperare;
- l'espressione della regione di rifiuto;
- l'esito del test.