Prova in itinere di SISTEMI DINAMICI del 14.1.2026

Candidato: ....

Esercizio 1. Si consideri il sistema lineare a tempo continuo, descritto dal modello

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t)\\ \dot{x}_2(t) &= x_3(t)\\ \dot{x}_3(t) &= -3x_2(t) - 2x_3(t) + u(t)\end{aligned}$$

I) Studiare la stabilità del sistema e riportarne i modi.

II) Determinare, se possibile, una legge di controllo in retroazione dello stato $u(t) = Fx(t)$, tale per cui la risposta libera del sistema risultante contenga i modi $\mathbb{1}(t)$, $\cos(2t)$, $\sin(2t)$.

III) Supponendo ora di applicare la legge di retroazione dello stato non lineare

$$u(t) = \frac{e^{-\beta x_1(t)} - \alpha}{e^{-\beta x_1(t)} + \alpha},$$

dove α e β sono due parametri reali positivi, determinare gli stati di equilibrio del sistema in funzione di α e β.

IV) Studiare la stabilità degli stati di equilibrio calcolati al punto III), in funzione di α e β.

Esercizio 2. Si consideri una rete di agenti collegati mediante una rete a stella, come quella mostrata in Figura 1.

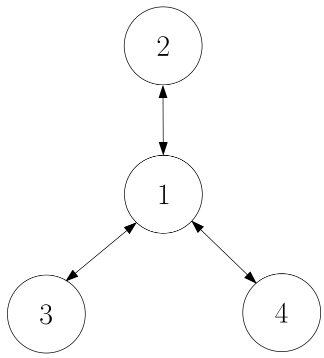

Figura 1.

Ogni nodo i della rete aggiorna il proprio stato $x_i(k) \in \mathbb{R}$ ad ogni istante di tempo discreto $k \in \mathbb{Z}$. All'istante $k+1$, il nodo centrale assegna al proprio stato il valore dell'ingresso $u(k)$, ovvero $x_1(k+1) = u(k)$. Gli altri stati, effettuano una media pesata tra il proprio stato e il valore dello stato del nodo centrale, secondo l'equazione

$$x_i(k+1) = x_1(k) + \gamma_i x_i(k) \ , \quad i = 2, 3, 4$$

dove γ_i, $i = 2, 3, 4$, sono coefficienti reali.

I) Assumendo $\gamma_2 = \gamma_3 = \gamma_4 = \gamma$, studiare la raggiungibilità del sistema e determinare il sottospazio $\mathcal{X}^r$ degli stati raggiungibili al variare di $\gamma \in \mathbb{R}$.

II) Si assuma ora $\gamma_2 = 0$, $\gamma_3 = 1$, $\gamma_4 = 2$. Dimostrare che il sistema è completamente raggiungibile. Determinare la sequenza di ingressi di lunghezza minima in grado di portare il sistema dallo stato iniziale nullo, allo stato finale $\bar{x} = (0\ 0\ 0\ 1)'$.

III) Nelle stesse condizioni del punto II), determinare tutte le sequenze di ingresso in grado di portare il sistema dallo stato iniziale nullo, allo stato finale $\bar{x} = (0\ 0\ 0\ 1)'$ in cinque passi (ovvero $x(5) = \bar{x}$). Tra queste sequenze, individuarne, se possibile, una tale che $|u(k)| \leq 1$, per $0 \leq k \leq 4$.

Esercizio 3. Si consideri il sistema lineare a tempo continuo, descritto dallo schema a blocchi rappresentato in Figura 2, dove K è un parametro reale.

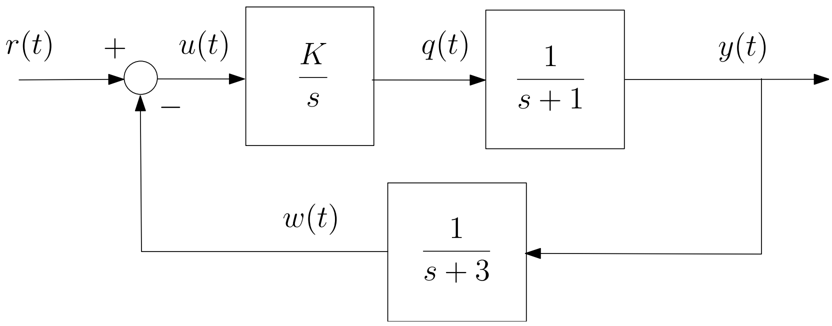

Figura 2.

I) Determinare una rappresentazione ingresso-stato-uscita del sistema, avente ingresso $r(t)$, uscita $y(t)$ e come variabili di stato i segnali $q(t)$, $y(t)$ e $w(t)$ rappresentati in figura.

II) Si assuma $K = 1$. Determinare un osservatore asintotico ad anello chiuso dello stato del sistema ottenuto al punto I), basato sulle osservazioni di $r(t)$ e $y(t)$, tale per cui i modi della dinamica dell'errore di stima dello stato $\tilde{x}(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ siano e^{-t}, e^{-2t}, e^{-3t}.

III) Determinare per quali valori di K la risposta di regime permanente $y_{perm}(t)$ relativa all'ingresso $r(t) = \cos(t)$ ha ampiezza maggiore di 3 ed è l'unica componente della risposta forzata che non tende a zero.

IV) Assumendo $K = 12$, determinare per quali pulsazioni $\omega > 0$, la risposta di regime permanente $y_{perm}(t)$ relativa all'ingresso $r(t) = \cos(\omega t)$ ha ampiezza maggiore di 1.

NOTA IMPORTANTE: Consegnare lo svolgimento dettagliato di ogni esercizio. Nel caso si usi Matlab per effettuare alcune parti degli esercizi, riportare esplicitamente i comandi o le righe di codice che sono state utilizzate.