Lucidi del corso di

Progetto dei sistemi di controllo

Corso di Laurea triennale in Ingegneria dell'Automazione

Università di Siena, Facoltà di Ingegneria

Parte III

Sistemi dinamici lineari a tempo continuo

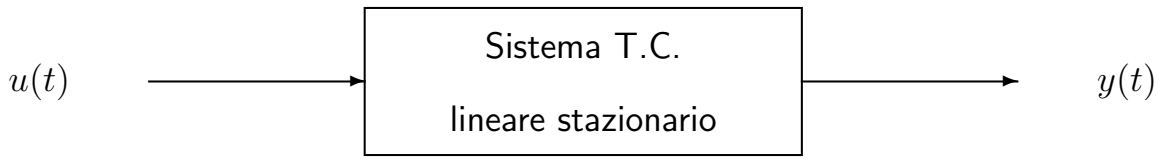
Gianni Bianchini

Alberto Tesi

© 2003-2006 - Tutti i diritti riservati. Il presente documento è rilasciato nei termini di licenze Creative Commons come indicato su

http://control.dii.unisi.it/giannibi/teaching

SISTEMI LINEARI STAZIONARI A TEMPO CONTINUO



In questo corso si considerano modelli di sistemi

1. **Dinamici.** I modelli sono descritti da *equazioni differenziali* che legano tra loro le variabili di ingresso $u(t)$ e le variabili di uscita $y(t)$

2. **A tempo continuo.** La variabile tempo è una variabile reale

3. **A parametri concentrati.** Le equazioni differenziali che descrivono i modelli sono nell'unica variabile indipendente *tempo* (equazioni differenziali ordinarie), non si ha dipendenza da coordinate spaziali

4. **Lineari.** Vale il principio di sovrapposizione degli effetti: la risposta alla combinazione lineare di più segnali è pari alla combinazione lineare delle risposte ai singoli segnali

   $$u(t) = \alpha u_1(t) + \beta u_2(t) \quad \Rightarrow y(t) = \alpha y_1(t) + \beta y_2(t)$$

   dove $y(t), y_1(t), y_2(t)$ sono rispettivamente le risposte a $u(t), u_1(t), u_2(t)$

5. **Stazionari (tempo invarianti).** La risposta ad un dato segnale è indipendente dall'istante temporale a cui il segnale è applicato. Per ogni t_0 e per ogni $u(t)$, la risposta al segnale $u(t-t_0)$ vale $y(t-t_0)$ dove $y(t)$ è la risposta a $u(t)$.

6. **Causali.** Per ogni t, la risposta $y(t)$ non dipende dal valore di $u(\tau)$ per alcun $\tau > t$. Ogni sistema fisico è causale nel tempo!

MODELLI A TEMPO CONTINUO IN EQUAZIONI DI STATO

- Sistema lineare stazionario a tempo continuo in equazioni di stato

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \\ x(0) &= x_0 \end{cases}$$

- Risposta completa (risposta libera e forzata)

$$x(t) = \underbrace{e^{At}x_0}_{x^l(t)} + \underbrace{\int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)}_{x^f(t)}$$

$$y(t) = \underbrace{Ce^{At}x_0}_{y^l(t)} + \underbrace{\int_0^t Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau) + Du(t)}_{y^f(t)}$$

- Calcolo della risposta attraverso la trasformata di Laplace.
  - Evoluzione libera

$$x^l(t) = \mathcal{L}^{-1}\{[sI - A]^{-1}x_0\}$$

$$y^l(t) = \mathcal{L}^{-1}\{C[sI - A]^{-1}x_0\}$$

  - Evoluzione forzata

$$x^f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{[sI - A]^{-1}BU(s)\}$$

$$y^f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{[C(sI - A)^{-1}B + D]U(s)\}$$

FUNZIONE DI TRASFERIMENTO

- Funzione di trasferimento $G(s)$: relazione tra la trasformata di Laplace dell'evoluzione forzata e quella dell'ingresso

$$G(s) = \frac{Y^f(s)}{U(s)} = C[sI - A]^{-1}B + D = C\frac{\text{adj}(sI - A)}{\det(sI - A)}B + D$$

$G(s)$ è una *funzione razionale fratta* della variabile s.

$$G(s) = \frac{b_m s^m + \ldots b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} \ldots a_1 s + a_0}$$

- La relazione $Y_f(s) = G(s)U(s)$ equivale nel dominio del tempo ad un'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti tra l'ingresso $u(t)$ e la corrispondente risposta forzata (indicata nel seguito solo con $y(t)$)

$$y^{(n)}(t)+a_{n-1}y^{(n-1)}(t)+\ldots+a_0 y(t) = b_m u^{(m)}(t)+b_{m-1}u^{(m-1)}(t)+\ldots+b_0 u(t)$$

- Relazione fra la dimensione dello stato e l'ordine dell'equazione ingresso-uscita: l'ordine dell'equazione ingresso-uscita è uguale o inferiore alla dimensione dello stato. Esempio:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad C = [1\ 0] \qquad D = 0$$

$$\Downarrow$$

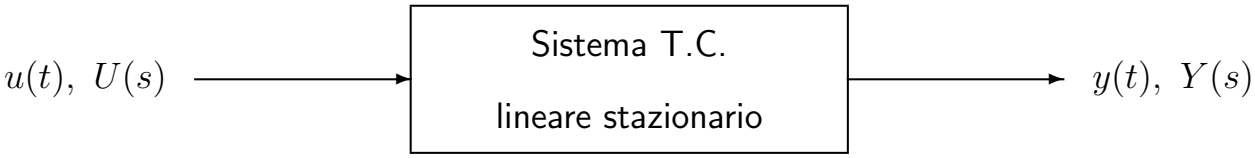
$$G(s) = C[\ sI - A\ ]^{-1}B\ +\ D = \tfrac{1}{s-1}$$

$$\Downarrow$$

$$\dot{y}(t) - y(t) = u(t)$$

- Relazione fra gli autovalori di A e i poli (zeri del denominatore) di $G(s)$: tutti i poli di $G(s)$ sono necessariamente anche autovalori di A, ma in generale non è vero il viceversa: possono infatti verificarsi cancellazioni tra numeratore e denominatore di $G(s)$.

MODELLI LINEARI A TEMPO CONTINUO INGRESSO USCITA



- Un sistema lineare stazionario a tempo continuo è descritto da un'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti che lega l'ingresso $u(t)$ alla corrispondente uscita forzata $y(t)$

$$y^{(n)}(t)+a_{n-1}y^{(n-1)}(t)+\ldots+a_0y(t) = b_mu^{(m)}(t)+b_{m-1}u^{(m-1)}(t)+\ldots+b_0u(t)$$

- Funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_ms^m + \ldots b_1s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} \ldots a_1s + a_0}$$

  La relazione $Y(s) = G(s)U(s)$, nel dominio del tempo, implica che la risposta $y(t)$ al segnale $u(t)$ è data dal prodotto di convoluzione

$$y(t) = g(t) * u(t) = \int_0^t g(t-\tau)u(\tau)\ d\tau$$

  dove

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)]$$

  rappresenta la risposta del sistema all'impulso unitario $\delta(t)$

- Funzione di trasferimento di un elemento di ritardo $y(t) = u(t-T)$: dal teorema del ritardo sulla trasformata di Laplace risulta

$$G(s) = e^{-sT} \qquad (T > 0)$$

  Non razionale!

RAPPRESENTAZIONI DELLA FUNZIONE DI TRASFERIMENTO

- Funzione di trasferimento razionale fratta

$$G(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots a_1 s + a_0}$$

- Forma poli-zeri (si esplicitano le radici di numeratore e denominatore)

$$G(s) = K' \frac{(s - z_1)(s - z_2) \cdots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n)}$$

- Forma a costanti di tempo o di Bode (si isolano poli e zeri in $s = 0$ e si raccolgono a fattor comune a numeratore e a denominatore i termini costanti sia dei binomi relativi a radici reali sia dei trinomi relativi a coppie di radici complesse coniugate)

$$G(s) = \frac{K_B}{s^h} \frac{(1 + \tau'_1 s) \cdots (1 + \tau'_{zr} s)(1 + 2\zeta'_1 \frac{s}{\omega'_{n_1}} + \frac{s^2}{\omega'^2_{n_1}}) \cdots (1 + 2\zeta'_{zc} \frac{s}{\omega'_{nzc}} + \frac{s^2}{\omega'^2_{nzc}})}{(1 + \tau_1 s) \cdots (1 + \tau_{pr} s)(1 + 2\zeta_1 \frac{s}{\omega_{n_1}} + \frac{s^2}{\omega^2_{n_1}}) \cdots (1 + 2\zeta_{pc} \frac{s}{\omega_{npc}} + \frac{s^2}{\omega^2_{npc}})}$$

$K_B = K' \tau_1 \cdots \tau_{pr} \omega'^2_{n_1} \cdots \omega'^2_{n_{zc}} \tau'^{-1}_1 \cdots \tau'^{-1}_{zr} \omega^{-2}_{n_1} \cdots \omega^{-2}_{n_{pc}}$ guadagno di Bode

$\tau'_i = -\sigma'^{-1}_i$ zeri reali $z_i = \sigma'_i$

$\zeta'_i = -\sigma'_i [\sigma'^2_i + \omega'^2_i]^{-1/2}$; $\omega'_{n_i} = \sqrt{\sigma'^2_i + \omega'^2_i}$ zeri complessi $z_i = \sigma'_i \pm j\omega'_i$

$\tau_i = -\sigma_i^{-1}$ poli reali $p_i = \sigma_i$

$\zeta_i = -\sigma_i [\sigma_i^2 + \omega_i^2]^{-1/2}$; $\omega_{n_i} = \sqrt{\sigma_i^2 + \omega_i^2}$ poli complessi $p_i = \sigma_i \pm j\omega_i$

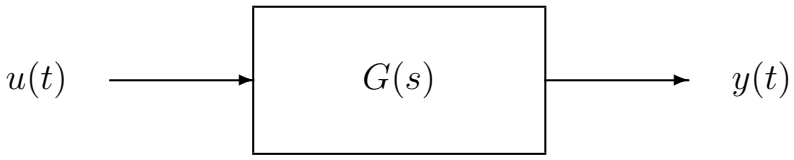
- Definizioni: se $0 < \zeta_i < 1$ (radici complesse coniugate a parte reale negativa), allora ζ_i si dice *fattore di smorzamento* e ω_{n_i} *pulsazione naturale* della coppia di poli (o zeri). $n - m$ è detto *grado relativo* di $G(s)$.

STABILITÀ

Il concetto di stabilità si introduce per caratterizzare la risposta di un sistema dinamico inizialmente in equilibrio all'azione di perturbazioni

- Stabilità alla Lyapunov dei punti di equilibrio di una rappresentazione di stato
  - Semplice
  - Asintotica
- Per i sistemi lineari stazionari in rappresentazione di stato
  - L'insieme dei punti di equilibrio è un sottospazio lineare (eventualmente la sola origine)
  - Tutti i punti di equilibrio hanno le stesse caratteristiche di stabilità, quindi la stabilità è una caratteristica del sistema
  - La stabilità semplice coincide con la limitatezza della risposta libera nello stato ad una qualunque condizione iniziale
  - La stabilità asintotica coincide con la limitatezza e convergenza a zero per $t \to \infty$ della risposta libera nello stato ad una qualunque condizione iniziale
  - Il sistema è stabile se e solo se tutti gli autovalori della matrice A hanno parte reale non positiva e quelli con parte reale nulla hanno un autospazio di dimensione pari alla molteplicità algebrica
  - Il sistema è asintoticamente stabile se e solo se tutti gli autovalori della matrice A hanno parte reale strettamente negativa

STABILITÀ INGRESSO LIMITATO - USCITA LIMITATA



- Definizione di *stabilità ILUL* (o *BIBO*) (ingresso limitato - uscita limitata)

  Un sistema lineare stazionario si dice ILUL stabile rispetto all'ingresso $u(t)$ se ad ogni segnale in ingresso $u(t)$ limitato in ampiezza corrisponde una risposta $y(t)$ anch'essa limitata, ovvero

$$\forall M_u > 0 \; \exists M_y > 0 \; :$$
$$\forall u(\cdot) \; : \; |u(t)| \leq M_u \;\; \forall t \geq t_0 \implies |y(t)| \leq M_y \;\; \forall t \geq t_0$$

STABILITÀ INGRESSO LIMITATO - USCITA LIMITATA

- **Criterio** di stabilità ILUL per sistemi lineari stazionari: *Un sistema lineare stazionario è ILUL stabile se e solo se la sua risposta impulsiva $g(t)$ è sommabile in valore assoluto, ovvero esiste finito $M > 0$ tale che*

$$\int_0^\infty |g(t)|dt \leq M$$

ovvero esiste finito $M > 0$ tale che

$$\int_0^t |g(\tau)|d\tau \leq M \quad \forall t \geq 0 \quad (*)$$

  - Dimostrazione parte sufficiente. Sia $|u(t)| \leq M_u$. Se vale $(*)$ allora per ogni t

$$|y(t)| = |\int_0^t g(t-\tau)u(\tau)d\tau| \leq \int_0^t |g(t-\tau)||u(\tau)|d\tau \leq$$

$$\leq \int_0^t |g(t-\tau)|d\tau M_u \leq M M_u$$

    e quindi il sistema è ILUL stabile

  - Dimostrazione parte necessaria. Se il sistema è ILUL stabile, si supponga per assurdo che non valga $(*)$, ovvero si supponga che

$$\forall M > 0 \;\; \exists t_0 \geq 0 \quad : \quad \int_0^{t_0} |g(t)|dt > M$$

    si valuti allora $y(t_0)$ in corrispondenza dell'ingresso dato da

$$u(t) = \text{sgn}[g(t_0 - t)]$$

    Si ha

$$|y(t_0)| = \int_0^{t_0} |g(t_0 - \tau)|d\tau = \int_0^{t_0} |g(t)|dt > M$$

    e dunque

$$\forall M > 0 \;\; \exists t_0 \geq 0, \; u(t) \quad : \quad |y(t_0)| > M$$

    assurdo.

STABILITÀ INGRESSO LIMITATO - USCITA LIMITATA

- Criterio equivalente di stabilità ILUL per sistemi lineari stazionari, descritti da funzioni di trasferimento razionali fratte

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{B(s)}{A(s)}U(s)$$

  - Un sistema lineare stazionario è ILUL stabile se e solo se i poli della funzione di trasferimento $G(s)$ hanno parte reale strettamente minore di zero ovvero, equivalentemente, se e solo se la risposta impulsiva $g(t)$ tende a 0 per $t \to \infty$.

    Infatti, essendo $G(s)$ razionale fratta, i modi della risposta impulsiva $g(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)]$ sono polinomiali, sinusoidali o esponenziali (generalizzati), quindi $g(t)$ converge a zero se e solo se è definitivamente maggiorata in valore assoluto da un'esponenziale decrescente, e pertanto la convergenza a zero di $g(t)$ è equivalente alla limitatezza dell'integrale di $|g(t)|$, ovvero la condizione di stabilità ILUL.

- Osservazioni

  - Il precedente criterio è evidentemente valido anche in presenza di un elemento di ritardo in $G(s)$, i.e., $G(s) = G'(s)e^{-sT}$, infatti il ritardo non influenza la limitatezza della risposta
  - Un sistema lineare stazionario avente una rappresentazione di stato asintoticamente stabile è anche ILUL stabile, poiché tutti i poli di $G(s)$ sono autovalori di A. In generale non è vero il viceversa (alcuni autovalori di A possono non comparire tra i poli di $G(s)$).

(Si veda anche Giua, cap. 9)

CRITERIO DI ROUTH

Lo studio della stabilità di un sistema lineare stazionario si riconduce sempre allo studio della posizione delle radici di un polinomio (il pol. caratteristico della matrice A nel caso della stabilità della rappresentazione di stato o il denominatore di $G(s)$ nel caso della stabilità ILUL) rispetto all'asse immaginario

- Polinomio di grado n

$$P_n(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots a_1 s + a_0$$

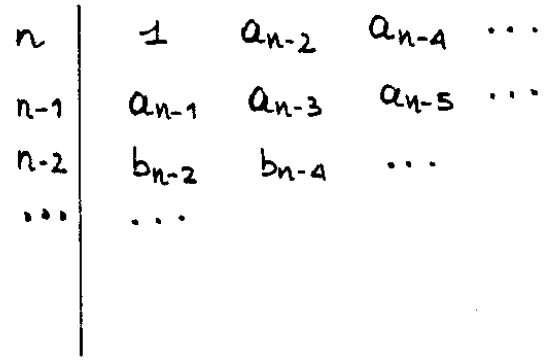
- Condizione necessaria affinché tutte le radici abbiano parte reale < 0:

$$a_i > 0 \text{ per ogni } i = 0, 1, \dots, n-1$$

  (necessaria e sufficiente nel caso $n = 2$, regola di Cartesio)

- Condizione necessaria e sufficiente affinché tutte le radici abbiano parte reale < 0: criterio di Routh-Hurwitz.

  – Si costruisce la *tabella di Routh* come in figura



$$b_{n-2} = \frac{a_{n-1}a_{n-2} - a_{n-3}}{a_{n-1}}$$

$$b_{n-4} = \frac{a_{n-1}a_{n-4} - a_{n-5}}{a_{n-1}}$$

  – **Criterio di Routh-Hurwitz.** Ad ogni variazione di segno che si presenta nella prima colonna della tabella corrisponde una radice di $P_n(s)$ con parte reale positiva e ad ogni permanenza una radice a parte reale negativa.

CRITERIO DI ROUTH: CASI SINGOLARI

Se ad un certo passo si ottiene una riga con uno zero nella prima colonna, non è possibile continuare la costruzione della tabella.

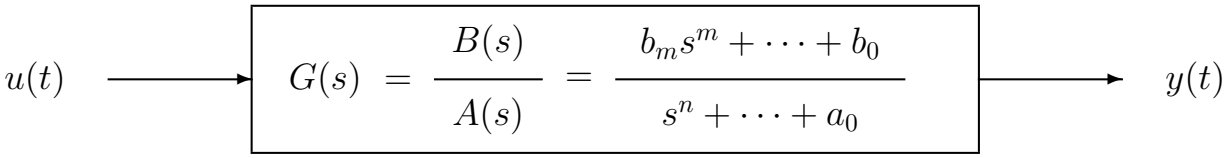
- Se gli altri elementi della riga non sono tutti nulli si può procedere in tre modi:

  1. Si sostituisce ϵ al posto dello 0 e si continua la tabella considerando alla fine il limite per ϵ tendente a zero dei coefficienti in prima colonna
  2. Si ripete l'algoritmo di Routh con il polinomio $(s+\lambda)P_n(s)$ con $\lambda > 0$ qualunque: il numero di radici con p.r. ≥ 0 chiaramente non cambia.
  3. Si studiano le radici di $P_n(1/s)$, le cui parti reali hanno lo stesso segno di quelle delle radici di $P_n(s)$.

- Se la costruzione della tabella dà luogo ad una riga di elementi tutti nulli, si procede come segue: si applica il criterio di Routh fino alla riga precedente quella nulla. L'analisi viene poi completata costruendo un polinomio ausiliario $P_a(s)$ definito dagli elementi della riga precedente quella nulla, e proseguendo la costruzione della tabella sostituendo alla riga nulla i coefficienti della derivata di $P_a(s)$. In tal caso, si dimostra che ogni variazione di segno nella nuova tabella corrisponde ad una radice a parte reale positiva e che ogni permanenza corrisponde ad una radice a parte reale nulla o negativa.

  Importante. Se si verifica una riga nulla, si dimostra che le radici di $P_a(s)$ sono anche radici di $P_n(s)$, e che queste radici sono a due a due opposte. Dunque in questo caso $P_n(s)$ non può avere tutte radici con parte reale strettamente negativa.

ANALISI DELLA RISPOSTA FORZATA



Si desidera caratterizzare la risposta forzata di un sistema descritto da una funzione di trasferimento $G(s)$ ad un segnale generico.

- Classe dei segnali d'ingresso di interesse: funzioni $u(t)$ trasformabili secondo Laplace con trasformata razionale fratta (funzioni costanti, esponenziali, sinusoidali, polinomiali, impulsive e combinazioni di queste)

  $$\mathcal{U} := \left\{ u(\cdot) : \ U(s) = \frac{N(s)}{Q(s)} = \frac{\Pi_{i=1}^{l}(s - z_i)}{\Pi_{i=1}^{r}(s - p_i)}, \quad l \leq r \right\}$$

  Per semplicità, si supponga che l'insieme dei poli di $G(s)$ sia disgiunto dall'insieme di quelli di $U(s)$ (zeri del polinomio $Q(s)$ distinti dagli zeri del polinomio $A(s)$)

- Sotto l'ipotesi precedente, effettuando la scomposizione in fratti semplici di $Y(s)$, si può scrivere

  $$Y(s) = G(s)U(s) = Y^G(s) + Y^U(s)$$

  dove $Y^G(s)$ è una funzione i cui poli sono i poli di $G(s)$ e $Y^U(s)$ è una funzione i cui poli sono i poli di $U(s)$

- Antitrasformando, la risposta forzata risulta scomposta come

  $$y(t) = y^G(t) + y^U(t)$$

  dove $y^G(t)$ contiene solo modi dati dai poli di $G(s)$ e $y^U(t)$ contiene solo modi dati dai poli di $U(s)$

  Importante. Se $G(s)$ è ILUL stabile, allora $y^G(t)$ tende a zero per $t \to \infty$, per cui dopo un tempo sufficientemente lungo si raggiunge una situazione *di regime* in cui $y(t) \approx y^U(t)$.

RISPOSTA AL GRADINO

- Funzione gradino unitario $1(t)$

$$1(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \qquad \mathcal{L}[1(t)] = \frac{1}{s}$$

- Risposta al gradino unitario di un sistema con f.d.t. $G(s)$

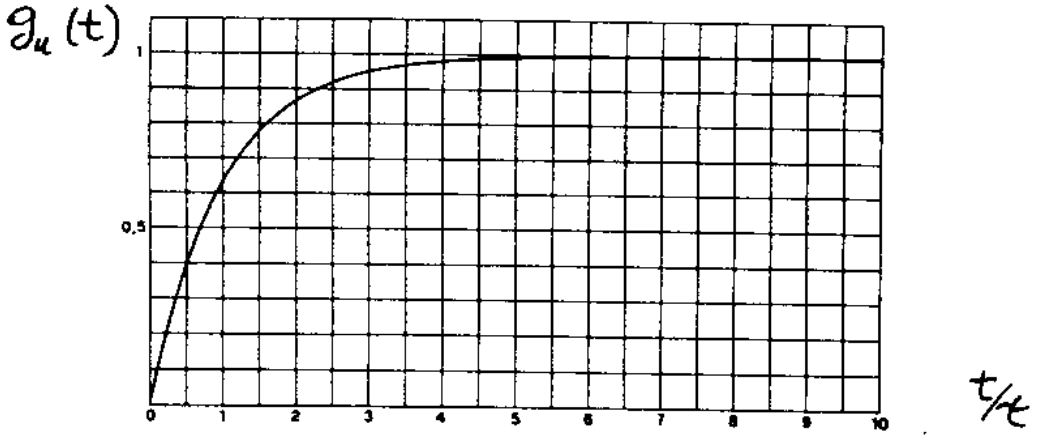
$$g_u(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{G(s)}{s}\right]$$

- Risposta al gradino unitario di un sistema del primo ordine

$$G(s) = \frac{1}{1+\tau s}; \qquad g(t) = \frac{1}{\tau}e^{-t/\tau}$$

$$g_u(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(1+\tau s)}\right\} = \underbrace{\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-\tau}{(1+\tau s)}\right\}}_{y^G(t)} + \underbrace{\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}}_{y^U(t)} = -e^{-t/\tau} + 1$$

  - Andamento nel tempo ($\tau > 0$).



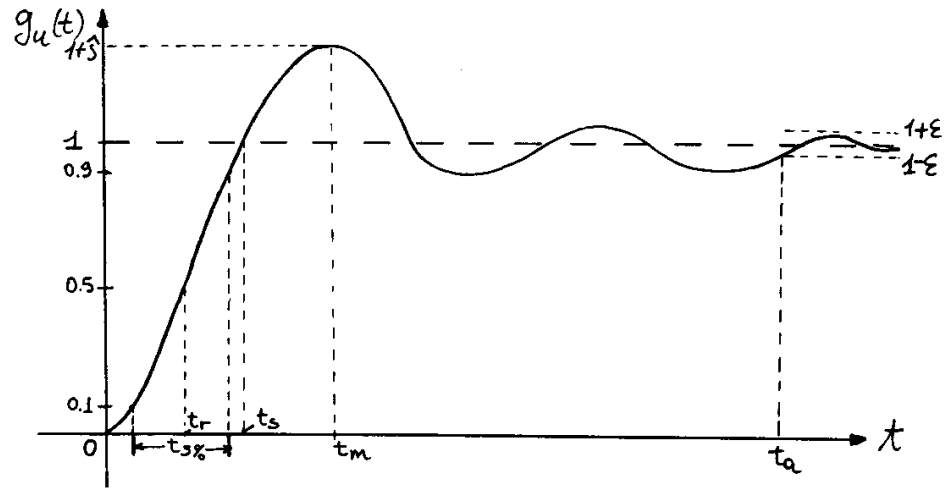
- Se $G(s)$ ha tutti poli con parte reale < 0, dai teorema del valore finale sulla trasformata di Laplace risulta

$$g_u(+\infty) = G(0)$$

$G(0)$ è detto *guadagno in continua* di $G(s)$ ed è pari al guadagno di Bode K_B.

PARAMETRI CARATTERISTICI DELLA RISPOSTA AL GRADINO

Per un generico sistema $G(s)$ ILUL stabile si definiscono i seguenti parametri caratteristici della risposta al gradino



- Massima sovraelongazione $\hat{s}$: pari al valore di picco della risposta al gradino unitario meno 1 (espresso in percentuale sul valore di regime se il sistema non ha guadagno in continua unitario)
- Tempo di ritardo t_r: pari all'istante in cui la risposta raggiunge la metà del valore di regime
- Tempo di salita t_s: pari all'istante in cui la risposta raggiunge per la prima volta il valore di regime (se la risposta presenta sovraelongazione)
- Tempo di salita $t_{s\%}$: pari al tempo che la risposta impiega ad evolvere dal 10% al 90% del valore di regime (se la risposta non presenta sovraelongazione)
- Tempo di assestamento t_a: pari all'istante oltre il quale la risposta permane in un intorno di raggio ε (tipicamente il 2% o il 5%) del valore di regime
- Istante di massima sovraelongazione t_m

RISPOSTA AL GRADINO: SISTEMI DEL SECONDO ORDINE

- Sistema del secondo ordine con poli complessi coniugati a parte reale < 0, senza zeri

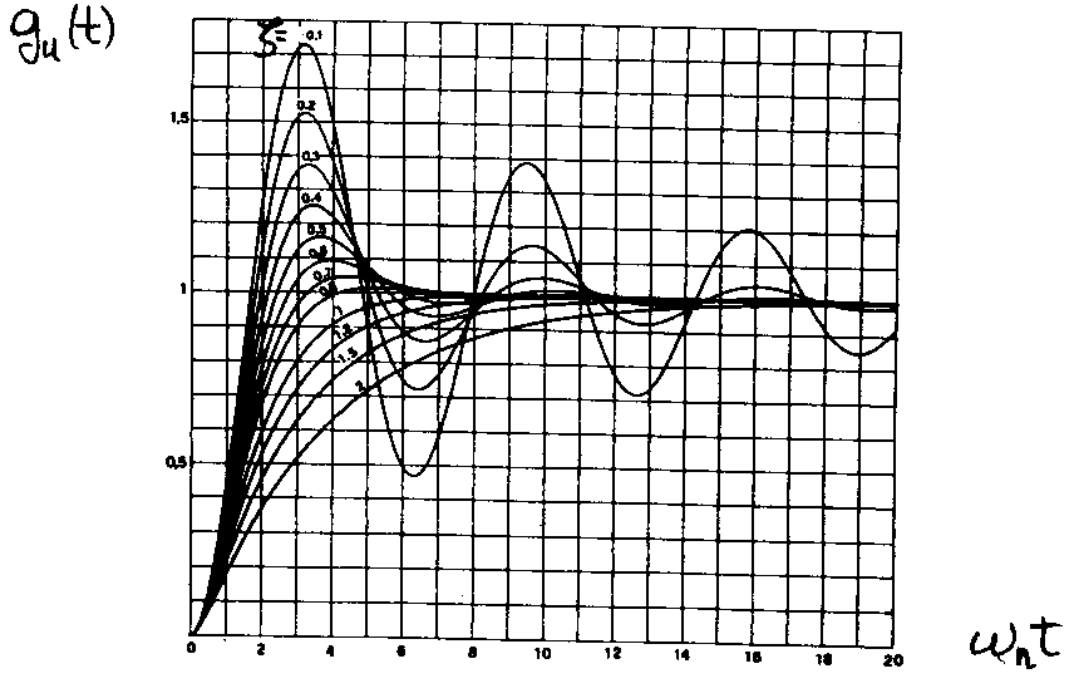
$$G(s) = \frac{1}{1 + 2\zeta\frac{s}{\omega_n} + \frac{s^2}{\omega_n^2}} \qquad 0 < \zeta < 1, \quad \omega_n > 0$$

- Risposta al gradino

$$g_u(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{1 + 2\zeta\frac{s}{\omega_n} + \frac{s^2}{\omega_n^2}}\frac{1}{s}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{-\frac{2\zeta}{\omega_n}\frac{1 + \frac{s}{2\zeta\omega_n}}{1 + 2\zeta\frac{s}{\omega_n} + \frac{s^2}{\omega_n^2}}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_n t}\sin(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t + \arctan\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}) + 1$$

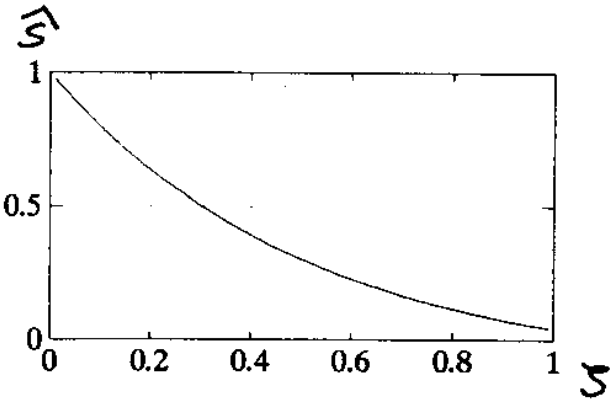
- Andamento della risposta al gradino al variare di ζ e ω_n



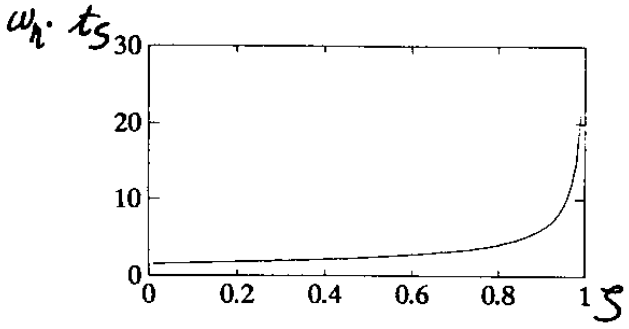
N.B. La pulsazione naturale costituisce un fattore di scala dell'asse dei tempi, infatti l'espressione della risposta dipende dal fattore $\omega_n t$

PARAMETRI CARATTERISTICI VS. ζ E ω_n

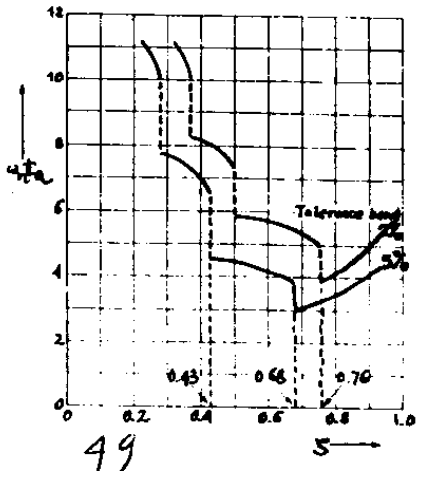
- Massima sovraelongazione: $\hat{s} = \exp(-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2})$



- Tempo di salita: $t_s = \omega_n^{-1}[1-\zeta^2]^{-1/2}[\pi - \arctan\zeta^{-1}\sqrt{1-\zeta^2}]$



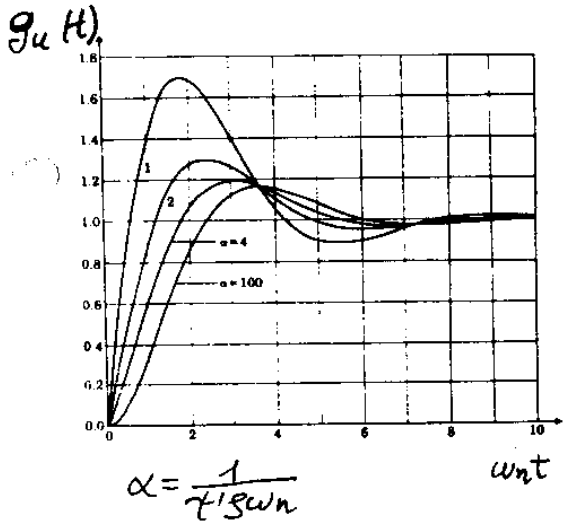
- Tempo di assestamento

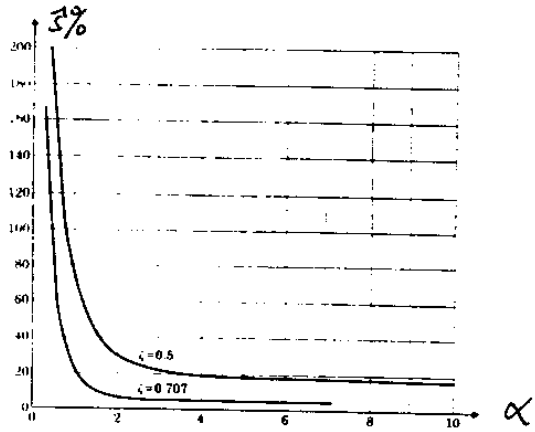


RISPOSTA AL GRADINO: SISTEMI DEL SECONDO ORDINE

- Effetto dell'aggiunta di uno zero ($\tau > 0$)

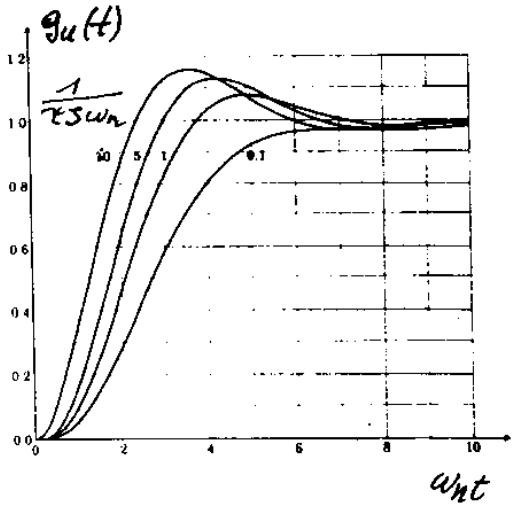
$$G(s) = \frac{1 + \tau' s}{1 + 2\zeta \frac{s}{\omega_n} + \frac{s^2}{\omega_n^2}}$$

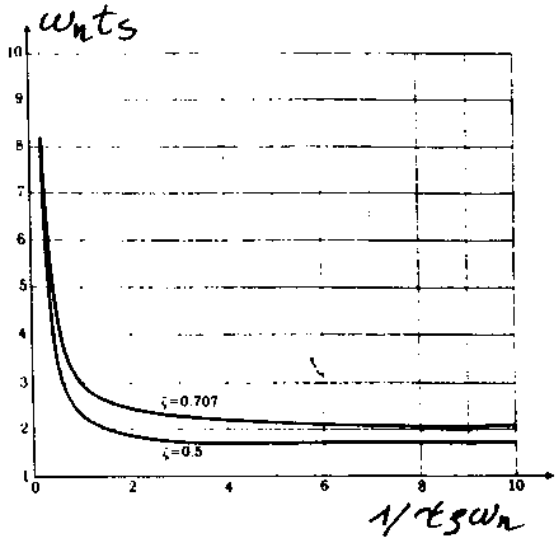




- Effetto dell'aggiunta di un polo ($\tau > 0$)

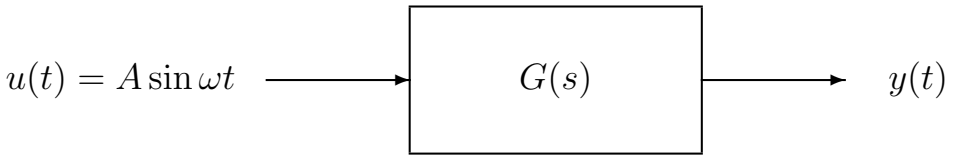
$$G(s) = \frac{1}{(1 + \tau s)(1 + 2\zeta \frac{s}{\omega_n} + \frac{s^2}{\omega_n^2})}$$





RISPOSTA IN FREQUENZA

Problema della risposta in frequenza. Valutare, quando esiste, la risposta di regime di un sistema lineare stazionario ad una sinusoide di pulsazione ω



Teorema (della risposta in frequenza). Dato un sistema lineare stazionario a tempo continuo con f.d.t. $G(s)$ avente tutti i poli con parte reale strettamente negativa, la risposta forzata alla sinusoide è data da

$$y(t) = y^G(t) + y^U(t)$$

dove $y^G(t)$ (transitorio) tende a zero per $t \to +\infty$ e $y^U(t)$ (permanente) vale

$$y^U(t) = A|G(j\omega)|\sin[\omega t + \arg G(j\omega)]$$

Prova. Si scompone la risposta fratti semplici

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{G(s)\frac{A\omega}{s^2+\omega^2}\right\} = \underbrace{\mathcal{L}^{-1}\left\{Y^G(s)\right\}}_{y^G(t)} + \underbrace{A\omega\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{k}{s-j\omega} + \frac{\bar{k}}{s+j\omega}\right\}}_{y^U(t)}$$

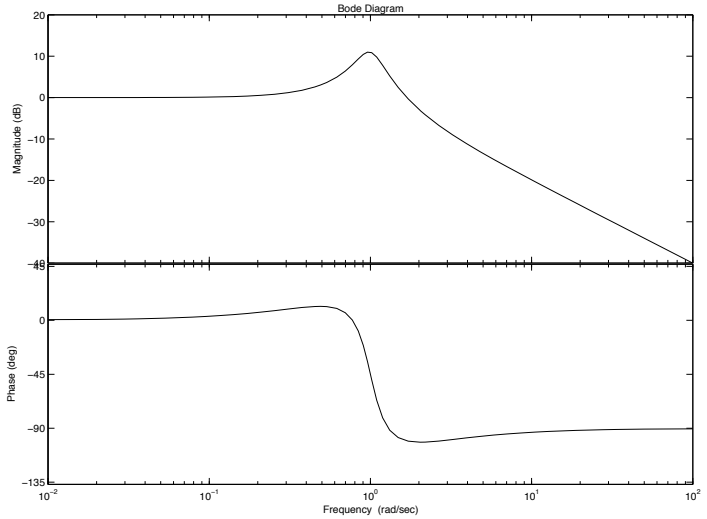
con

$$k = \left.\frac{G(s)}{s+j\omega}\right|_{s=j\omega}$$

Poiché il sistema è ILUL stabile, a regime risulta $y^G(t) \to 0$. Inoltre antitrasformando si trova facilmente $y^U(t) = A|G(j\omega)|\sin[\omega t + \arg G(j\omega)]$.

DIAGRAMMI DI BODE

Sono la rappresentazione grafica del modulo $|G(j\omega)|$ (tipicamente in dB) e della fase $\arg G(j\omega)$ (in radianti o gradi) della risposta in frequenza $G(j\omega)$ in funzione della pulsazione ω, tipicamente espressa in scala logaritmica



$$|G(j\omega)|_{\mathrm{dB}} = 20 \log_{10} |G(j\omega)|$$

- Le grandezze in dB e le fasi sono additive: se $G(s) = G_1(s)G_2(s)$ allora

$$|G(j\omega)|_{\mathrm{dB}} = |G_1(j\omega)|_{\mathrm{dB}} + |G_2(j\omega)|_{\mathrm{dB}}$$

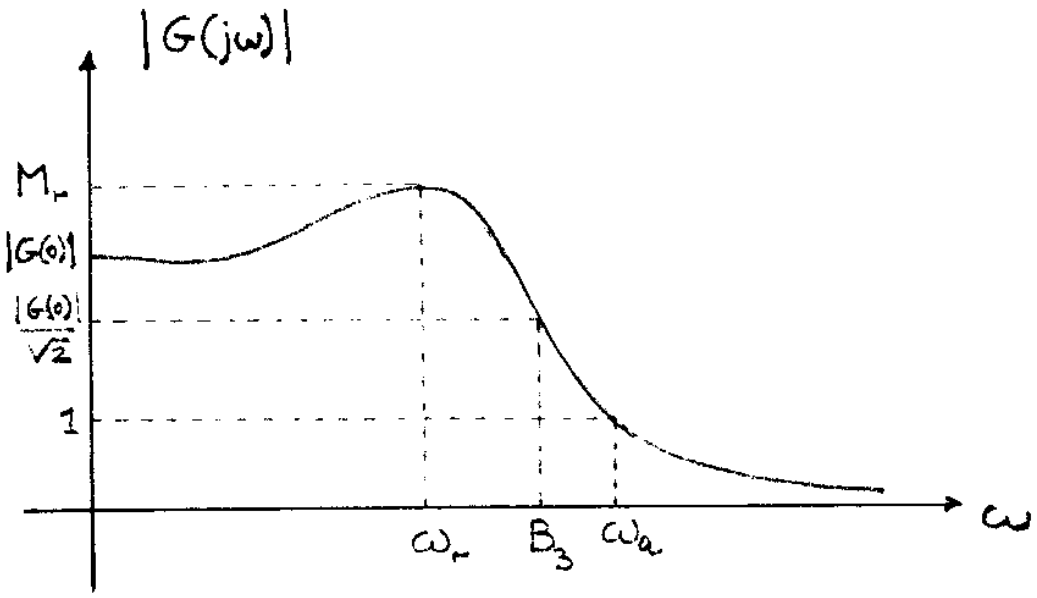
$$\arg G(j\omega) = \arg G_1(j\omega) + \arg G_2(j\omega)$$

  è quindi possibile ricavare i diagrammi di Bode di $G(j\omega)$ sommando tra loro gli andamenti dei diagrammi relativi a ciascuno dei fattori della forma di Bode di $G(s)$.

- I diagrammi di Bode di $G(j\omega)$ possono essere tracciati anche quando $G(s)$ non ha tutti poli con parte reale < 0. In questo caso però si deve tener presente che il modulo e la fase di $G(j\omega)$ non hanno il significato stabilito dal teorema della risposta in frequenza, poiché questa non è definita.

DIAGRAMMI DI BODE: PARAMETRI CARATTERISTICI

- Diagramma del modulo (in scala lineare)



- Picco di risonanza M_r: valore massimo di $|G(j\omega)|$
- Pulsazione di risonanza ω_r: $|G(j\omega_r)| = M_r$
- Banda a 3dB B_3: pulsazione alla quale $|G(j\omega)|$ "è 3 dB al di sotto del guadagno in continua", i.e., $|G(jB_3)|_{\text{dB}} = |G(0)|_{\text{dB}} - 3$ (in scala lineare $|G(jB_3)| = |G(0)|/\sqrt{2}$)
- Pulsazione di attraversamento ω_a: $|G(j\omega_a)|_{\text{dB}} = 0$
  (in scala lineare $|G(j\omega_a)| = 1$)

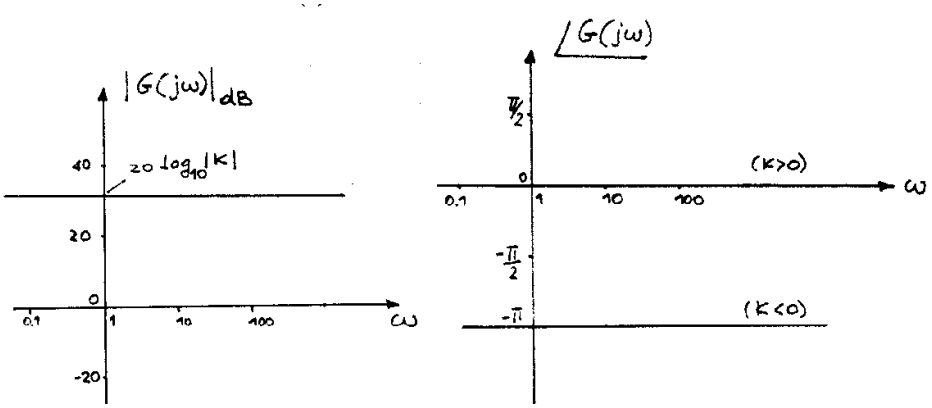
DIAGRAMMI DI BODE DI SISTEMI ELEMENTARI

- I diagrammi elementari (cioè dei fattori della forma di Bode) possono essere utilizzati per ricavare i diagrammi di Bode di una f.d.t. qualunque, grazie all'additività.

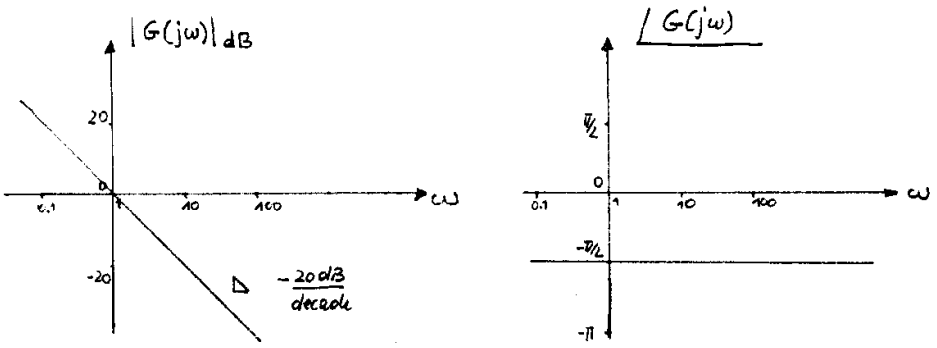
- I diagrammi dei fattori reciproci di quelli proposti si ottengono come ribaltamento rispetto all'asse delle ascisse. Infatti se $H(s) = G^{-1}(s)$ si ha $|H(j\omega)|_{\text{dB}} = -|G(j\omega)|_{\text{dB}}$ e $\arg H(j\omega) = -\arg G(j\omega)$.

- Se $G^i(s) = G(-s)$ con $G(s)$ razionale fratta, allora $G^i(j\omega) = \overline{G(j\omega)}$, i.e., $|G^i(j\omega)|_{\text{dB}} = |G(j\omega)|_{\text{dB}}$ e $\arg G^i(j\omega) = -\arg G(j\omega)$.

- Sistema statico: $G(s) = K$

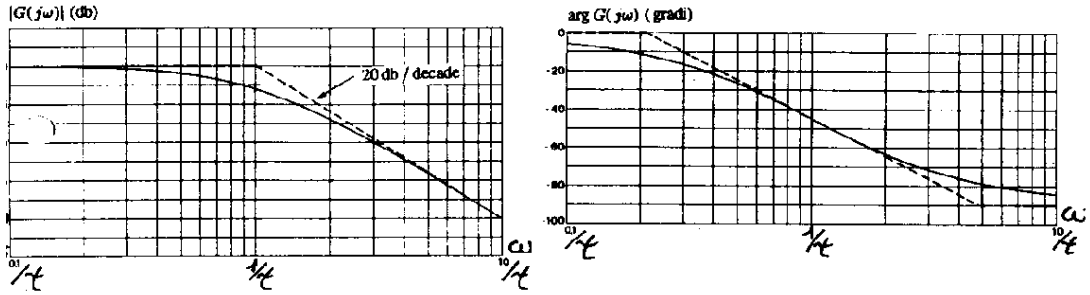


- Un polo in zero (integratore): $G(s) = \dfrac{1}{s}$



DIAGRAMMI DI BODE DI SISTEMI ELEMENTARI

- Sistema del primo ordine: $G(s) = \dfrac{1}{1+\tau s}, \quad \tau > 0.$



$$G(j\omega) \approx \begin{cases} 1 \ [|G(j\omega)|_{\mathrm{dB}} \approx 0, \ \ \arg G(j\omega) \approx 0] & \omega << 1/\tau \\ (j\omega\tau)^{-1} \ [|G(j\omega)|_{\mathrm{dB}} \approx -20\log_{10}\omega\tau, \ \ \arg G(j\omega) \approx -\pi/2] & \omega >> 1/\tau \end{cases}$$

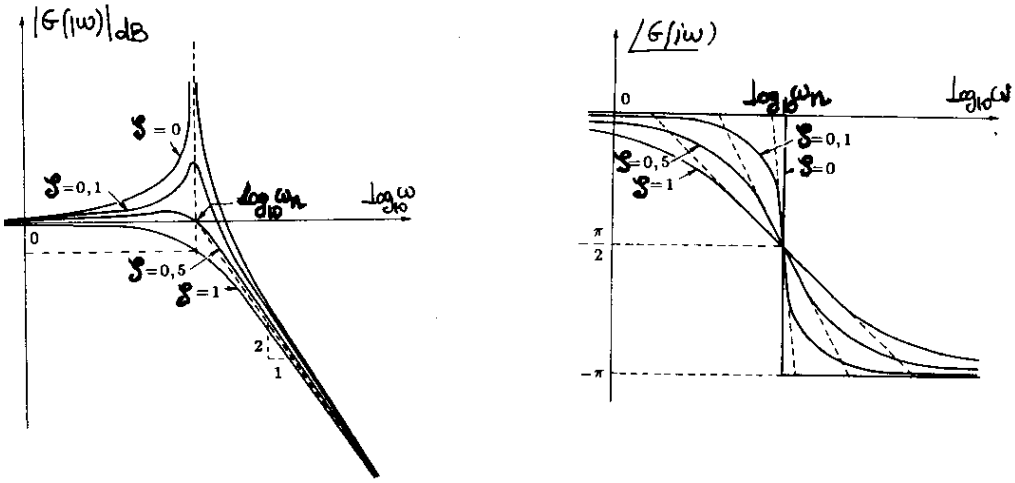
Si usa approssimare l'andamento reale dei diagrammi di Bode con il loro andamento asintotico per $\omega << 1/\tau$ e per $\omega >> 1/\tau$ raccordati nel punto $\omega = 1/\tau$ (diagrammi asintotici).

  - Il diagramma asintotico del modulo per $\omega > 1/\tau$ è una retta con pendenza -20 dB/decade ed è una retta orizzontale a 0 dB per $\omega < 1/\tau$
  - Il diagramma della fase può essere approssimato con una spezzata che vale 0 per $\omega < 0.1/\tau$, $-\pi/2$ per $\omega > 10/\tau$ ed ha una pendenza di $-\pi/4$ rad/decade per $0.1/\tau < \omega < 10/\tau$.
  - Alternativamente, il diagramma asintotico della fase si rappresenta con un gradino di ampiezza $-\pi/2$ in $\omega = 1/\tau$

- Il diagramma di Bode di $G^i(s) = \dfrac{1}{1-\tau s}, \ \ \tau > 0$ ha stesso modulo e fase opposta, infatti $G^i(j\omega) = \overline{G(i\omega)}$

DIAGRAMMI DI BODE DI SISTEMI ELEMENTARI

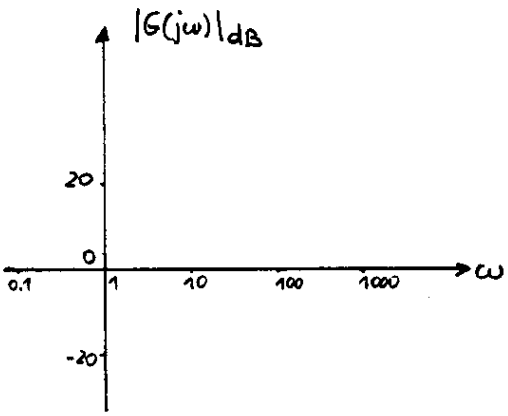
- Sistema del secondo ordine: $G(s) = \dfrac{1}{1 + 2\zeta\frac{s}{\omega_n} + \frac{s^2}{\omega_n^2}}$, $(\omega_n > 0; 0 \leq \zeta < 1)$.

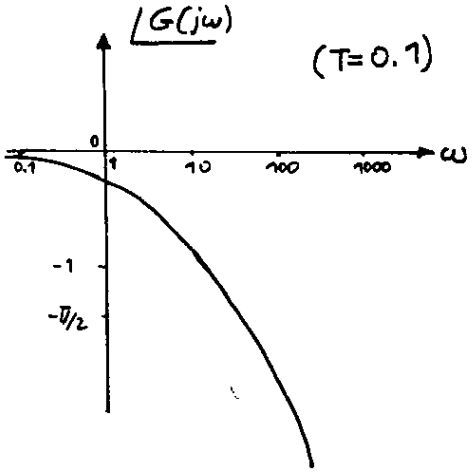


  - Il diagramma asintotico del modulo per $\omega > \omega_n$ è una retta con pendenza -40 dB/decade ed è una retta a 0 dB per $\omega < \omega_n$
  - Il diagramma della fase può essere approssimato con una spezzata che vale 0 per $\omega < 0.1\omega_n$, $-\pi$ per $\omega > 10\omega_n$ ed ha una pendenza di $-\pi/2$ rad/decade per $0.1\omega_n < \omega < 10\omega_n$.
  - Per $\zeta \to 0$, il modulo reale tende a diventare infinito per $\omega \to \omega_n$
  - Se $\zeta < 1\sqrt{2}$, il modulo reale ha un massimo M_r (picco di risonanza) ad una certa pulsazione ω_r (pulsazione di risonanza)
  - Al diminuire di ζ, la variazione della fase reale tende a divenire più concentrata attorno a ω_n (per $\zeta = 0$ si ha un "salto" di π)
  - $\Rightarrow$ per $\zeta \to 0$, gli andamenti asintotico e reale dei diagrammi sono molto discordanti intorno a ω_n
  - Il diagramma di $G^i(s) = \dfrac{1}{1 - 2\zeta\frac{s}{\omega_n} + \frac{s^2}{\omega_n^2}}$, $(\omega_n > 0; 0 \leq \zeta < 1)$ ha stesso modulo e fase opposta rispetto a $G(s)$.

DIAGRAMMI DI BODE DI SISTEMI ELEMENTARI

- Elemento di ritardo: $G(s) = e^{-sT}, \quad T > 0$





  - Il modulo è costante e pari a 0 dB
  - La fase decresce linearmente con ω (se ω è rappresentata in scala logaritmica, l'andamento della fase è una curva esponenziale)

AZIONI FILTRANTI

Una f.d.t. $G(s)$ che soddisfi le ipotesi del teorema della risposta in frequenza funziona da *filtro*, ovvero è in grado di attenuare o amplificare (a regime) l'ampiezza dei segnali in ingresso a seconda della loro frequenza, in accordo con l'andamento di $|G(j\omega)|$.

- *Passa-basso*: attenua i segnali di frequenza superiore ad un dato limite. Ad es, una f.d.t. elementare del primo o del secondo ordine con una certa banda B_3 è l'approssimazione di un filtro passa-basso.

- *Passa-alto*: attenua i segnali di frequenza inferiore ad un dato limite. La f.d.t. (con uno zero in $s = 0$ e grado relativo $n - m = 0$)

$$G(s) = \frac{s}{1+s}$$

  approssima un passa-basso.

- *Passa-banda*: attenua i segnali con frequenza esterna ad un dato intervallo. La f.d.t. (con uno zero in $s = 0$ e grado relativo $n - m > 0$)

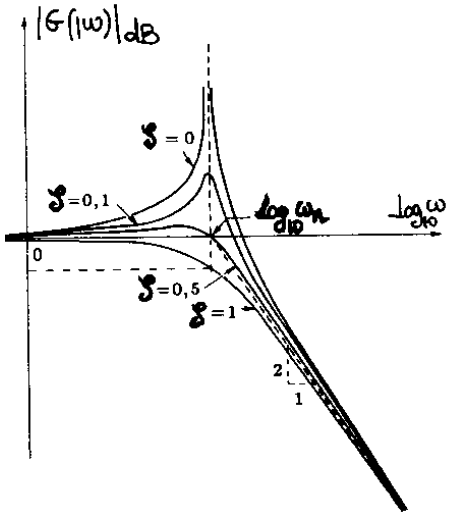
$$G(s) = \frac{s}{s^2+s+1}$$

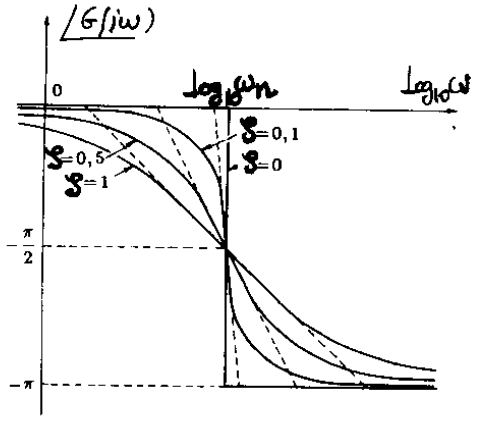
  approssima un passa-banda.

Vincolo di fisica realizzabilità. Una f.d.t. $G(s)$ con grado relativo $n - m < 0$ (non propria), ovvero con modulo della risposta in frequenza $|G(j\omega)|$ tendente all'infinito per $\omega \to \infty$, non può rappresentare alcun sistema fisico, poiché la sua risposta ad un segnale (ad es. sinusoidale) di ampiezza (e quindi potenza) finite tende ad avere ampiezza (e potenza) infinite al crescere della frequenza, e non esiste sistema fisico in grado di generare potenza arbitrariamente elevata.

RELAZIONI PER SISTEMI DEL SECONDO ORDINE

- Sistema del secondo ordine: $G(s) = \dfrac{1}{1 + 2\zeta\frac{s}{\omega_n} + \frac{s^2}{\omega_n^2}}$, $(\omega_n > 0; 0 \leq \zeta < 1)$.





- Banda a 3dB

$$B_3 = \omega_n\sqrt{1 - 2\zeta^2 + \sqrt{2 - 4\zeta^2 + 4\zeta^4}}$$

- Pulsazione di risonanza

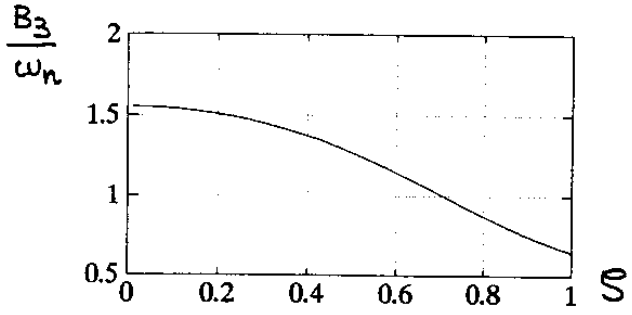
$$\omega_r = \omega_n\sqrt{1 - 2\zeta^2}$$

- Picco di risonanza

$$M_r = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1 - \zeta^2}}$$

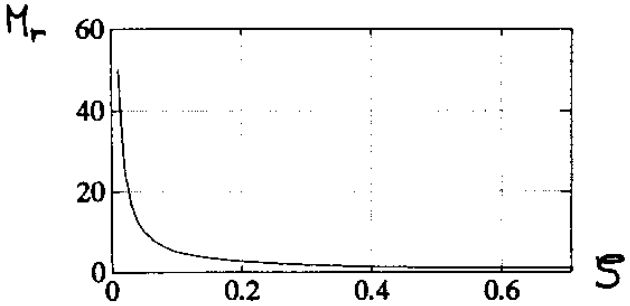
RELAZIONI PER SISTEMI DEL SECONDO ORDINE

- Banda a 3dB in funzione di ζ

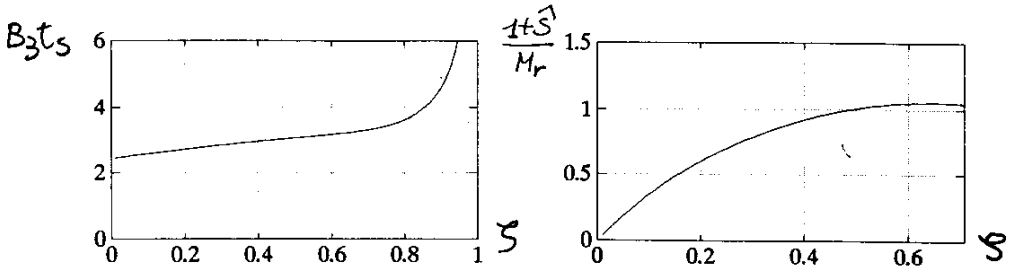


  ω_n funge da fattore di scala per l'asse delle pulsazioni, infatti $G(j\omega)$ dipende dal rapporto ω/ω_n

- Modulo alla risonanza in funzione di ζ



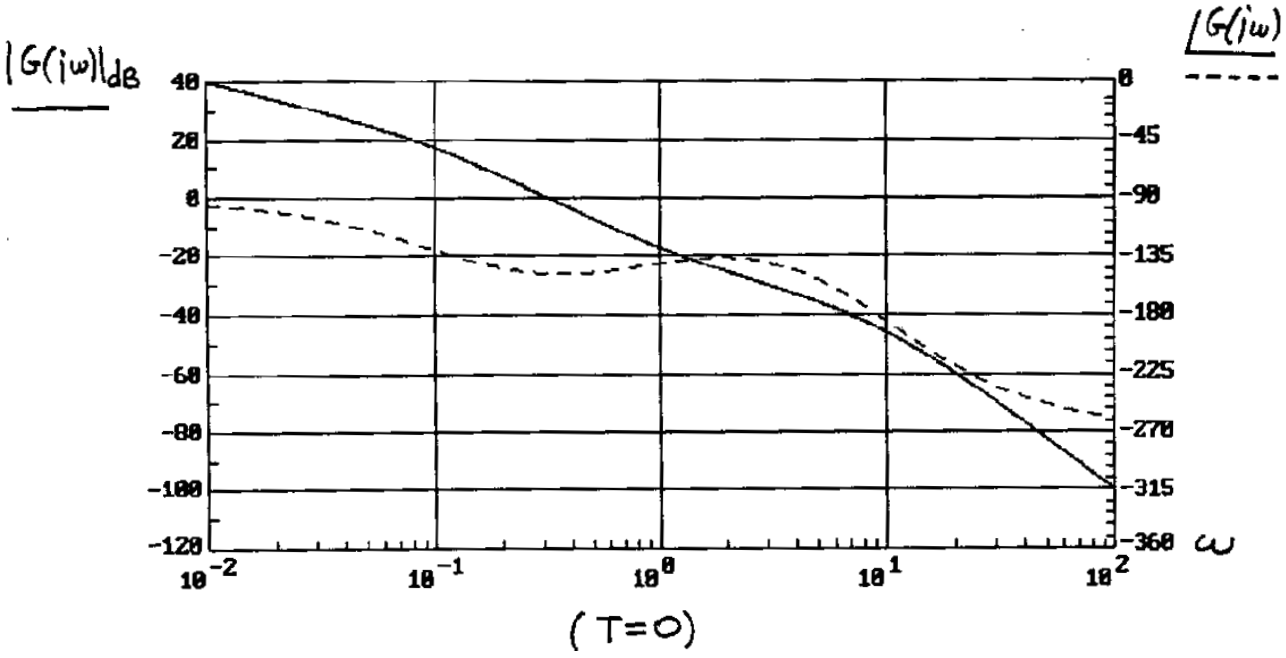
- Relazioni fra i parametri della risposta al gradino e quelli della risposta in frequenza in funzione dello smorzamento ζ (t_s vs. B_3 e $\hat{s}$ vs. M_r).



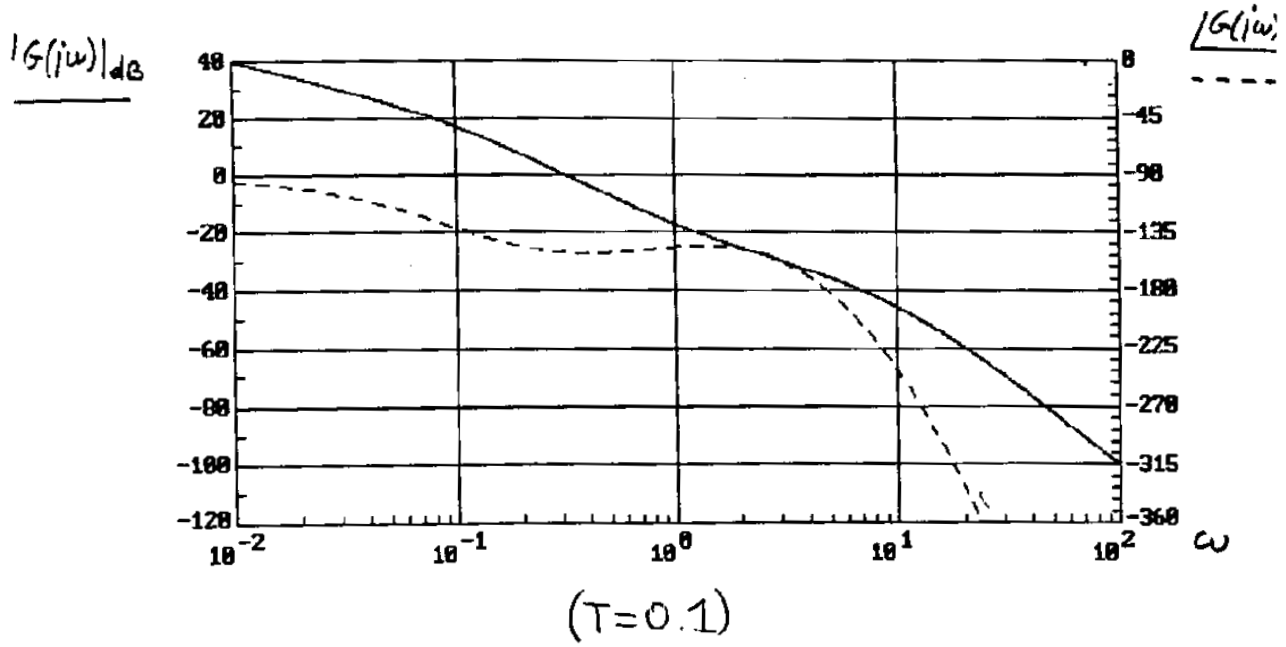
  Osservare che $B_3 t_s \approx 3$ e che $(1+\hat{s})/M_r \approx [0.85 \div 1]$ quasi indipendentemente da ζ per un ampio intervallo di valori di ζ, es. $\zeta \in [0.4, 0.7]$. Questo tornerà molto utile.

ESEMPI DI TRACCIAMENTO DIAGRAMMI DI BODE

$$G(s) = e^{-sT} \frac{1+s}{s(1+10s)(1+0.1s)^2}$$



(T=0)



(T=0.1)

ESEMPI DI TRACCIAMENTO DIAGRAMMI DI BODE

$$G(s) = \frac{8(s^2 + s + 15)}{s^3 + 9s^2 + 15s + 120}$$

- Forma di Bode

$$G(s) = \frac{1 + 2\zeta_z \frac{s}{\omega_{n_z}} + \frac{s^2}{\omega_{n_z}^2}}{(1 + s\tau_p)(1 + 2\zeta_p \frac{s}{\omega_{n_p}} + \frac{s^2}{\omega_{n_p}^2})}$$

$\omega_{n_z} \approx 3.873; \qquad \zeta_z \approx 0.129; \qquad \tau_p \approx 0.113; \qquad \omega_{n_p} \approx 3.685; \qquad \zeta_p \approx 0.022$

