Esercizi su raggiungibilità e retroazione dello stato

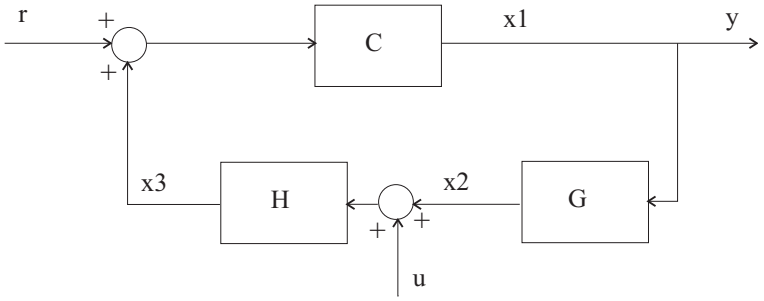
Esercizio 1.
Si consideri il sistema tempo-discreto

$$\begin{cases} x_1(t+1) &= u(t) \\ x_2(t+1) &= \alpha x_1(t) + x_3(t) \\ x_3(t+1) &= \beta x_1(t) + x_2(t) \end{cases}$$

dove α e β sono parametri reali.

1. Determinare per quali valori di α e β il sistema è completamente raggiungibile.
2. Assumendo $\alpha = 2$ e $\beta = 1$, determinare lo spazio degli stati raggiungibili e gli autovalori raggiungibili. Stabilire inoltre se il sistema può essere stabilizzato asintoticamente mediante una legge di controllo in retroazione dallo stato.
3. Assumendo $\alpha = -1$ e $\beta = 1$, determinare il minor numero di passi in cui è possibile raggiungere lo stato $x_f = (10 \;\; 2 \;\; -2)'$ a partire dallo stato iniziale nullo, e quale è la corrispondente sequenza di ingresso.
4. Assumendo $\alpha = -1$ e $\beta = 1$, determinare la sequenza di ingresso in grado di portare a zero lo stato in tre passi, ovvero $x(3) = (0 \;\; 0 \;\; 0)'$, a partire dallo stato iniziale $x(0) = (4 \;\; 4 \;\; 0)'$.

Esercizio 2.
È dato il sistema lineare tempo-discreto descritto dallo schema a blocchi in figura.



1. Determinare le matrici A, B, C, D della rappresentazione di stato Σ del sistema, che si ottiene assumendo come vettore di ingresso $u(k) = [u_1(k) \;\; u_2(k)]'$, come uscita $y(k)$ e come stato $x(k) = [x_1(k) \;\; x_2(k) \;\; x_3(k)]'$.
2. Studiare le proprietà di stabilità di Σ.
3. È Σ completamente raggiungibile? Se sì, qual è il minimo numero di passi in cui un qualunque stato può essere raggiunto a partire dallo stato nullo?
4. Determinare l'insieme degli stati che possono essere raggiunti dallo stato nullo in 1, 2 e 3 passi agendo solamente su $u_1(k)$ (supponendo cioè che $u_1(k)$ sia l'unico ingresso del sistema).
5. Supponendo ancora che $u_1(k)$ sia l'unico ingresso, determinare se possibile una legge di controllo in retroazione dallo stato $u_1(k) = F_1 x(k)$, tale per cui tutti gli autovalori del sistema ad anello chiuso risultante siano in $z = 0$.
6. Verificare che, controllando il sistema come al punto precedente, lo stato evolve verso lo stato zero in al più 3 passi, qualunque sia la condizione iniziale. Quali stati iniziali vengono portati a zero in 1, 2 e 3 passi rispettivamente?

7. È possibile rispondere alle domande 3, 4, 5, 6 mediante una semplice ispezione dello schema a blocchi proposto? Commentare.

Esercizio 3.
È dato il sistema lineare tempo-discreto

$$\begin{aligned} x_1(t+1) &= \frac{1}{2}x_1(t) + x_2(t) \\ x_2(t+1) &= x_2(t) + u(t) \\ x_3(t+1) &= x_3(t) + u(t) \\ y(t) &= x_1(t) + x_3(t) \end{aligned}$$

1. Determinare la funzione di trasferimento del sistema.
2. Calcolare la risposta forzata del sistema all'ingresso impulsivo

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t = 0 \\ 0 & t > 0 \end{cases} .$$

3. Determinare un segnale d'ingresso $u(t)$ limitato, tale che la corrispondente risposta forzata $y_f(t)$ risulti non limitata. Discutere la stabilità del sistema, sia nello spazio degli stati sia in senso ILUL.
4. Determinare l'insieme degli stati raggiungibili. Il sistema è completamente raggiungibile?
5. Determinare il numero minimo di passi in cui è possibile raggiungere lo stato $\bar{x} = (3 \;\; 1 \;\; 1)'$ a partire dallo stato iniziale nullo, e quale è la corrispondente sequenza d'ingresso.
6. Ripetere l'esercizio al punto precedente, supponendo che lo stato iniziale sia $x(0) = (0 \;\; 2 \;\; 2)'$.