

ROBUSTEZZA DI SISTEMI LINEARI STAZIONARI CON PERTURBAZIONI ALTAMENTE STRUTTURATE E COMPENSATORI PERIODICI

Sergio Galesni, Oswaldo Maria Grasselli,
Laura Menini

OBIETTIVI

- Motivare l'uso di compensatori periodici per problemi di controllo (robusto) su sistemi stazionari (con perturbazioni fortemente strutturate)
- Fornire nozioni di base sui sistemi periodici a tempo discreto (rappresentazione stazionaria, stabilità, propr. strutturali, dualità)
- Stabilizzazione forte
- Stabilizzazione con margine di guadagno infinito (per sistemi M.I.M.O.)

Casi in cui il controllo periodico di sistemi lineari stazionari è vantaggioso

- STABILIZZAZIONE FORTE

ovvero mediante compensatore asintoticamente stabile.

L'uso di compensatori periodici permette di superare l'ostruzione legata alla P.I.P. che vale per compensatori stazionari.

- STABILIZZAZIONE SIMULTANEA

di $N \geq 2$ sistemi mediante lo stesso compensatore.

- MARGINE DI GUADAGNO

robustezza rispetto a variazioni di guadagni scalari agenti su ogni ingresso o su ogni uscita del sistema.

— margine arbitrario

— margine infinito

MARGINE DI GUADAGNO

Sistemi S.I.S.O

Esempio (Khargonekar, Poolla, Tannenbaum, 1985)

$$P(z) = K \frac{z-2}{z-3} \quad \leftarrow \text{legame diretto}$$

Mediante un compensatore stazionario è possibile ottenere stabilità ss. a ciclo chiuso $\forall K \in [a, b]$ se e solo se $\frac{b}{a} < 2.25$

Il compensatore periodico

$$x_c(k+1) = u_c(k)$$

$$y_c(k) = h(k) x_c(k) + d(k) u_c(k) \quad \leftarrow \text{legame diretto}$$

$$h(k) = \begin{cases} 0 & k \text{ pari} \\ 108 & k \text{ dispari} \end{cases}$$

$$d(k) = \begin{cases} 0 & k \text{ dispari} \\ 18 & k \text{ pari} \end{cases}$$

stabilizza $P(z) \quad \forall K \in [0.5, 5]$.

Nello stesso articolo:

- Procedura per ottenere margine di guadagno ∞ per sistemi non strettamente propri
- Congettura sull'impossibilità di fare altrettanto per sistemi strettamente propri

MARGINE DI GUADAGNO (segue)

Caso M.I.M.O

Sono possibili diverse estensioni del problema

Yang, Kabamba, 1994:

Perturbazioni: guadagni scalari indipendenti sulle uscite del sistema

Margine di guadagno arbitrario per sistemi a tempo continuo, campionati, possibilmente strettamente propri, Tramite GSHF.

Yan, Anderson, Bitmead, 1994:

Perturbazioni: uno stesso guadagno scalare su tutti gli ingressi/uscite del sistema

Margine di guadagno infinito per sistemi a tempo continuo, campionati, non strettamente propri

Casi in cui il controllo periodico
NON è vantaggioso

PLANT UNCERTAINTY PRINCIPLE
(Kharagonkar, Poolla, 1989)

In robust multivariable control problems,
NON LINEAR TIME-VARYING controllers
yield (significant) advantages over
LINEAR TIME-INVARIANT controllers if and
only if there is (significant) parametric
or structured uncertainty.

SISTEMI LINEARI PERIODICI A TEMPO DISCRETO (LPTV)

periodico

$$\tilde{\Theta} = (\tilde{A}(k), \tilde{B}(k), \tilde{C}(k), \tilde{D}(k)) \quad , \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\tilde{\Theta}: \begin{cases} x(k+1) = \tilde{A}(k)x(k) + \tilde{B}(k)u(k) & , \quad x(k) \in \mathbb{R}^n, u(k) \in \mathbb{R}^p \\ y(k) = \tilde{C}(k)x(k) + \tilde{D}(k)u(k) & \quad y(k) \in \mathbb{R}^q \end{cases}$$

$\tilde{A}(\cdot), \tilde{B}(\cdot), \tilde{C}(\cdot)$ e $\tilde{D}(\cdot)$ periodiche con periodo ω
 $\tilde{A}(k+\omega) = \tilde{A}(k), \quad \forall k \in \mathbb{Z}, \dots$

matrice di transizione dello stato (da i a j):

$$\Phi(j, i) := \begin{cases} I_n, & \text{se } i=j \\ \tilde{A}(j-1)\tilde{A}(j-2)\dots\tilde{A}(i), & \text{se } i < j \end{cases}$$

matrice di monodromia di $\tilde{A}(\cdot)$ al tempo k_0 :

$$\Phi(k_0+\omega, k_0)$$

Proprietà (Evans, 1972)

$\det(\lambda I_n - \Phi(k_0+\omega, k_0))$ è indipendente da k_0 .

moltiplicatori caratteristici di $\tilde{A}(\cdot)$:

radici di $\det(\lambda I_n - \Phi(k_0+\omega, k_0))$

($\approx$ autovalori per sist. LTI)

RAPPRESENTAZIONE STAZIONARIA

Per un dato $k_0 \in \mathbb{Z}$, per ogni $h \in \mathbb{Z}$:

$$x_{k_0}(h) := x(k_0 + hw) \quad , \quad x_{k_0}(h) \in \mathbb{R}^n$$

($\approx$ campionamento di $x(k)$)

$$u_{k_0}(h) := \begin{bmatrix} u(k_0 + hw) \\ u(k_0 + hw + 1) \\ \vdots \\ u(k_0 + hw + w - 1) \end{bmatrix} \quad , \quad u_{k_0}(h) \in \mathbb{R}^{wp}$$

(u e y sono "impilati" = lifted)

$$y_{k_0}(h) := \begin{bmatrix} y(k_0 + hw) \\ y(k_0 + hw + 1) \\ \vdots \\ y(k_0 + hw + w - 1) \end{bmatrix} \quad , \quad y_{k_0}(h) \in \mathbb{R}^{wq}$$

Sistema associato di $\tilde{\Theta}$ al tempo k_0

$$\tilde{\Theta}_{k_0} : \begin{cases} x_{k_0}(h+1) = \tilde{A}_{k_0} x_{k_0}(h) + \tilde{B}_{k_0} u_{k_0}(h) \\ y_{k_0}(h) = \tilde{C}_{k_0} x_{k_0}(h) + \tilde{D}_{k_0} u_{k_0}(h) \end{cases}$$

In questo
caso $\sim$ no
non periodico!

||

lifted representation
(Meyer, Burrus, 1975)

RAPPR. STAZIONARIA (segue)

$$\tilde{A}_{k_0} := \phi(k_0 + w, k_0)$$

$$\tilde{B}_{k_0} := \left[\begin{array}{c|c|c} \phi(k_0 + w, k_0 + 1) \tilde{B}(k_0) & \phi(k_0 + w, k_0 + 2) \tilde{B}(k_0 + 1) & \dots \\ \hline & \underbrace{\phi(k_0 + w, k_0 + w) \tilde{B}(k_0 + w - 1)}_{\text{I}} & \end{array} \right]$$

$$\tilde{C}_{k_0} := \left[\begin{array}{c} \tilde{C}(k_0) (\phi(k_0, k_0))^{-1} \text{I} \\ \tilde{C}(k_0 + 1) \phi(k_0 + 1, k_0) \\ \vdots \\ C(k_0 + w - 1) \phi(k_0 + w - 1, k_0) \end{array} \right]$$

$$\tilde{D}_{k_0} := \left[\begin{array}{c|c|c|c|c} D(k_0) & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \hline C(k_0 + 1) B(k_0) & D(k_0 + 1) & \emptyset & \vdots & \vdots \\ \vdots & C(k_0 + 2) B(k_0 + 1) & \ddots & \emptyset & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \underbrace{D(k_0 + w - 2)}_{\text{I}} & \emptyset \\ \vdots & \vdots & \vdots & C(k_0 + w - 1) B(k_0 + w - 2) & D(k_0 + w - 1) \end{array} \right]$$

blocco (i, j) : $C(k_0 + i - 1) \phi(k_0 + i - 1, k_0 + j) B(k_0 + j - 1)$

Oss. 1 $\tilde{D}_{k_0} \neq 0$ anche se $\tilde{B}(k) \equiv 0$

Oss. 2 $\tilde{B}(k) \equiv 0 \Rightarrow$ diagonale (e blocchi) principale di $\tilde{D}_{k_0}$ è nulla.

sistema associato (relativamente a un arbitrario periodo w) per un sistema L.T.I.

$$S = (A, B, C, D) \quad \text{sistema stazionario}$$

Per ogni k_0 il sistema associato sarà

$$S_0 = (A_0, B_0, C_0, D_0)$$

$$A_0 = A^w$$

$$B_0 = [A^{w-1}B \mid \dots \mid AB \mid B]$$

$$C_0 = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{w-1} \end{bmatrix}$$

$$D_0 = \left[\begin{array}{c|c} D & 0 \\ \hline CB & D \\ CAB & CB \\ \vdots & \vdots \\ CA^{w-2}B & \vdots \end{array} \right] \dots \left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & \vdots \\ \hline D & 0 \\ CB & D \end{array} \right]$$

l'uso del sistema associato per sistemi periodici (o di altre rappresentazioni stazionarie, e.g. stacked representation) permette di : (attraverso tecniche usuali per sistemi L.T.I. !)

- calcolare la risposta
- dimostrare che

(a) Il sistema $\tilde{\Theta}$ è asintoticamente stabile se e solo se tutti i moltiplicatori caratteristici di $\tilde{A}(\cdot)$ hanno modulo < 1 .

Cioè $\Leftrightarrow \tilde{\Theta}_{k_0}$ è asintoticamente stabile (k_0 irrilevante)

(b) I sottospazi raggiungibile, inosservabile, controllabile, non determinabile ($\approx$ unreconstructible) di $\tilde{\Theta}$ al tempo k_0 , coincidono con quelli di $\tilde{\Theta}_{k_0}$.

↑
 k_0 non è irrilevante !

(c) Definendo:

$\tilde{\Theta}$ stabilizzabile se esiste $Q(k) \in \mathbb{R}^{p \times n}$,
 w -periodica, tale che $\tilde{A}(\cdot) + \tilde{B}(\cdot)Q(\cdot)$
abbia tutti i moltiplicatori caratteristici
in modulo < 1

Si ha che

$$\begin{aligned}\tilde{\Theta} \text{ è stabilizzabile} &\Leftrightarrow \text{rang} \begin{bmatrix} zI_n - \tilde{A}_{k_0} & \tilde{B}_{k_0} \end{bmatrix} = n, \\ &\quad \forall z \in \mathbb{C}, |z| \geq 1 \\ &\Leftrightarrow \tilde{\Theta}_{k_0} \text{ è stabilizzabile}\end{aligned}$$

(d) dualmente per la rilevabilità di $\tilde{\Theta}_{k_0}$

DUALITÀ PER SISTEMI LPTV

$$\tilde{\Theta} = (\tilde{A}(k), \tilde{B}(k), \tilde{C}(k), \tilde{D}(k)) \quad , \quad \omega\text{-periodico}$$

Sistema duale di $\tilde{\Theta}$ attorno a k_0 :

$$\tilde{\Theta}^d(k_0) = (\tilde{A}^d(k), \tilde{B}^d(k), \tilde{C}^d(k), \tilde{D}^d(k))$$

$$\begin{aligned} \forall i \in \mathbb{Z}: \quad \tilde{A}^d(k_0+i) &:= \tilde{A}^T(k_0-i-1) \\ \tilde{B}^d(k_0+i) &:= \tilde{C}^T(k_0-i-1) \\ \tilde{C}^d(k_0+i) &:= \tilde{B}^T(k_0-i-1) \\ \tilde{D}^d(k_0+i) &:= \tilde{D}^T(k_0-i-1) \end{aligned}$$

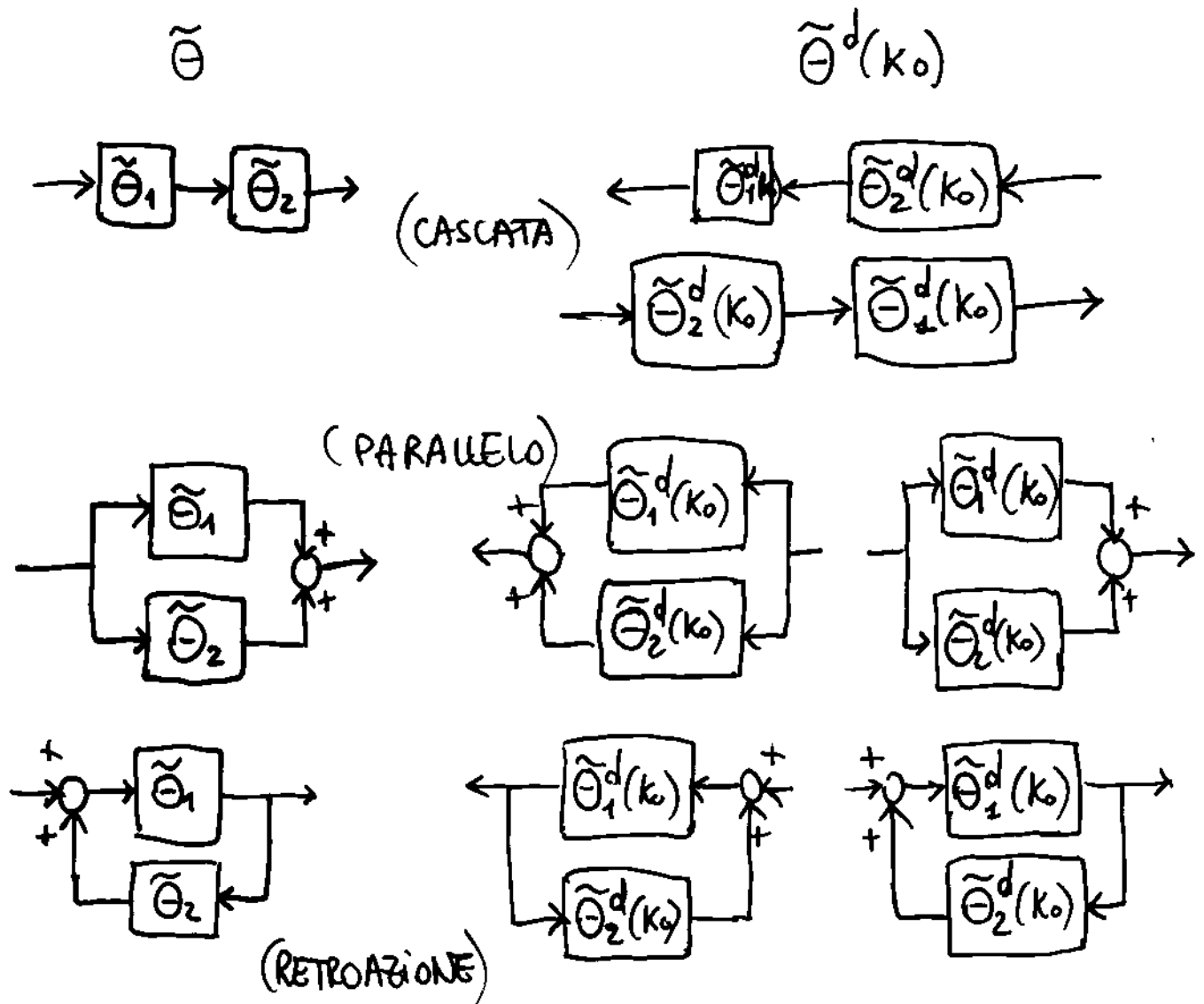
Proprietà :

- Il sistema duale di $\tilde{\Theta}^d(k_0)$ attorno a k_0 è $\tilde{\Theta}$

$$\begin{array}{ccccccc} & \dots & \tilde{A}(k_0-2) & \tilde{A}(k_0-1) & \tilde{A}(k_0) & \tilde{A}(k_0+1) & \dots \\ d \left(\begin{array}{c} \uparrow \\ \vdots \\ \downarrow \end{array} \right. & & \uparrow & \downarrow & \uparrow & \downarrow & \left. \begin{array}{c} \uparrow \\ \vdots \\ \downarrow \end{array} \right) \uparrow \\ & \dots & \tilde{A}^d(k_0+1) & \tilde{A}^d(k_0) & \tilde{A}^d(k_0-1) & \tilde{A}^d(k_0-2) & \dots \end{array}$$

- $\phi^d(k_0+h_1, k_0+h_0) = \phi^T(k_0-h_0, k_0-h_1) \quad , \quad h_1 \geq h_0$
 $\Rightarrow \phi^d(k_0+\omega, k_0) = \phi^T(k_0, k_0-\omega) = \phi^T(k_0+\omega, k_0) \Rightarrow$
- $\tilde{\Theta}$ e $\tilde{\Theta}^d(k_0)$ hanno le stesse proprietà di stabilità
- dualità nelle proprietà strutturali

REGOLE PER IL DUALE DI UN SISTEMA INTERCONNESSO



Per schemi + complessi:

- Sostituire ogni sottosistema elementare con il relativo duale
 - Sommatore $\rightarrow$ Diramazione
 - Diramazione $\rightarrow$ Sommatore
- { evitando
Sommatore con
segni - }

NOTAZIONE

- Ove utile, per un sistema a tempo discreto (L.T.I. o L.P.T.V.)

$$\hat{S} = (A^{\hat{S}}(k), B^{\hat{S}}(k), C^{\hat{S}}(k), D^{\hat{S}}(k))$$

$u^{\hat{S}}(\cdot)$ ingresso di $\hat{S}$

$x^{\hat{S}}(\cdot)$ stato di $\hat{S}$

$y^{\hat{S}}(\cdot)$ uscita di $\hat{S}$

- Sottosistemi statici
stesso nome per il sottosistema e
per la sua matrice dei guadagni.

STABILIZZAZIONE FORTE CON MARGINE DI GUADAGNO INFINITO: formulazione del problema per sistemi M.I.M.O. (L.T.I.)

Perturbazioni considerate:

$\forall m \in \mathbb{Z}, m \geq 1$

$$X_m = \left\{ \Xi \in \mathbb{R}^{m \times m}, \Xi = \text{diag}(\xi_1, \dots, \xi_m) : \xi_i \in [1, +\infty), \forall i \in \{1, \dots, m\} \right\}$$

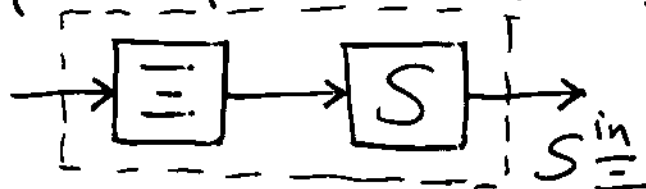
Sistema nominale:

$$S = (A, B, C, D)$$

$$S: \begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) & , x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^p \\ y(k) = Cx(k) + Du(k) & , y \in \mathbb{R}^q \end{cases}$$

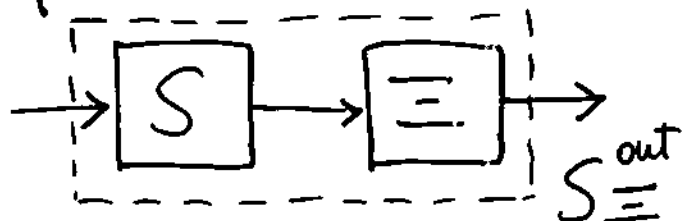
Famiglia dei sistemi perturbati sull'ingresso:

$$S_{in} = \left\{ S_{\Xi}^{in} = (A, B\Xi, C, D\Xi), \Xi \in X_p \right\}$$



Famiglia dei sistemi perturbati sull'uscita:

$$S_{out} = \left\{ S_{\Xi}^{out} = (A, B, \Xi C, \Xi D), \Xi \in X_q \right\}$$



Caso di perturbazioni sull'ingresso

Assunzione 1 (solo per necessità)

- (a) S non è asintoticamente stabile
- (b) per ogni matrice B^0 costituita da $p-1$ colonne diverse di B , (A, B^0) non è stabilizzabile

Problema 1 (SIGMST)

Trovare, se possibile, un periodo $\omega \geq 1$ e un compensatore $\tilde{K}$ LPTV, ω -periodico, asintoticamente stabile e tale che $\forall S_{\Xi}^{in} \in \mathcal{S}_{in}$ la connessione di S_{Ξ}^{in} e $\tilde{K}$ sia ben posta e asintoticamente stabile.

Teorema 1

Sotto l'Assunzione 1, il Problema 1 è risolvibile se e solo se:

- (i) S è stabilizzabile e rilevabile, e
- (ii) ogni colonna di D contiene almeno un elemento non nullo.

↳ congettura Kharg., Poolla, Tann. ✓

- (ii) è + debole di
 $\text{rango}(D) \geq \max_{\lambda_i \text{ Inst}} (\# \text{ blocchi Jordan rel. a } \lambda_i)$
(Yan, Anderson, Bitmead, 1994)

Caso di perturbazioni sull'uscita

Assunzione 2

- (a) S non è asintoticamente stabile
- (b) per ogni matrice C^0 costituita da $q-1$ righe diverse di C , (A, C^0) non è rilevabile

Problema 2 (SIGMSO)

Trovare, se possibile, un periodo $w \geq 1$ e un compensatore $\tilde{K}$ LPTV, w -periodico, asintoticamente stabile e tale che $\forall S_{\Xi}^{\text{out}} \in S_{\text{out}}$ la connessione di S_{Ξ}^{out} e $\tilde{K}$ sia ben posta e asintoticamente stabile.

Teorema 2

Sotto l'Assunzione 2, il Problema 2 è risolubile se e solo se:

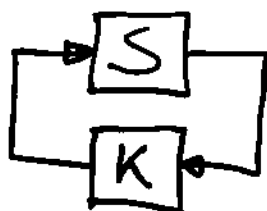
- (i) S è stabilizzabile e rilevabile, e
- (ii) ogni riga di D contiene almeno un elemento non nullo

STABILIZZAZIONE FORTE

②

- DATO S STAZIONARIO, NON ASINTOTICAMENTE STABILE,

TROVARE (SE ESISTE) K ASINTOTICAMENTE STABILE TALE CHE IL SISTEMA A CICLO CHIUSO FORMATO DA S E K SIA A.S.



- VERSIONE LTI:

$\exists K$ LTI, FORTEMENTE STABILIZZANTE PER S



- S È STABILIZZABILE E RILEVABILE
- VALE LA PARITY INTERLACING PROPERTY (p.i.p)

[p.i.p.: # PARI DI POLI DI S FRA OGNI COPPIA DI ZERI (DI BLOCCO) INSTABILI E REALI DI S]

- VERSIONE LPTV:

$\exists K$ LPTV, FORTEMENTE STABILIZZANTE PER S

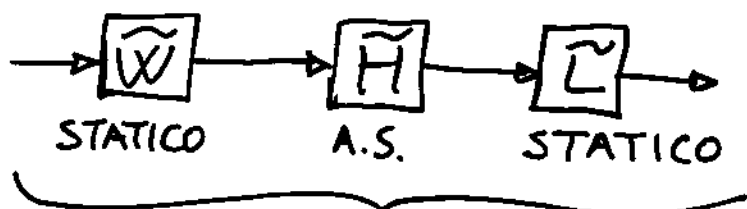
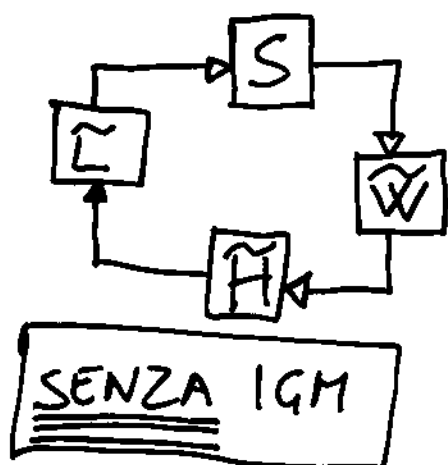


S È STABILIZZABILE E RILEVABILE

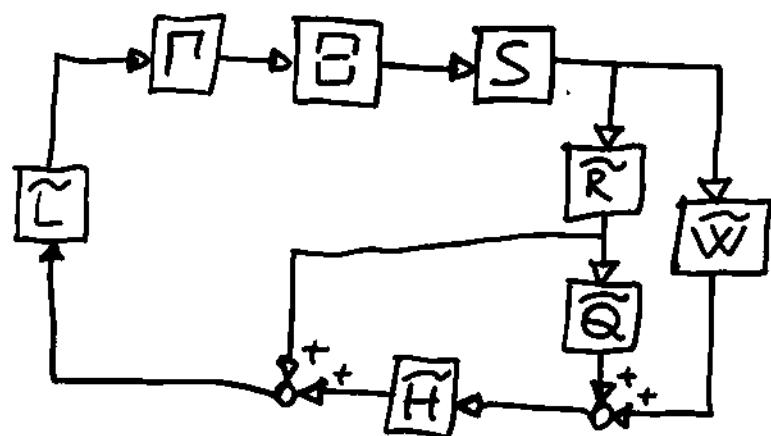
- NOTA: CONDIZIONI MINIMALI SE K LPTV

COMPENSATORI LPTV FORTEMENTE STABILIZZANTI (CON E SENZA IGM)

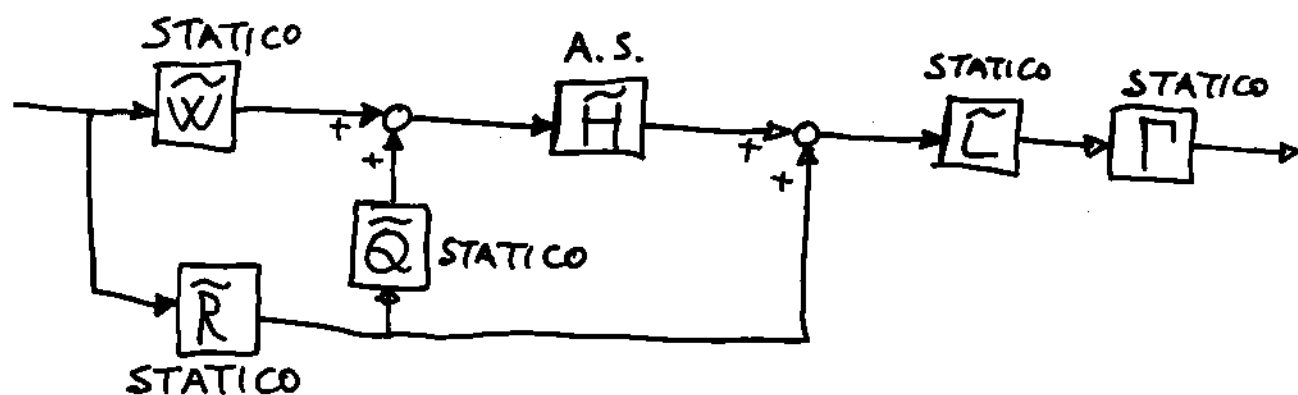
③



- A.S.
- STRETTAMENTE PROPRIO $[\tilde{L}(h\omega+i) \cdot \tilde{W}(h\omega+i) = 0, \forall h, i]$



CON IGM



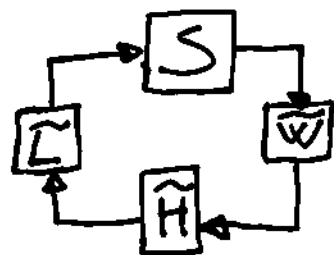
- A.S.
- NON STRETTAMENTE PROPRIO $\left[\tilde{L}(h\omega+i) \cdot \tilde{R}(h\omega+i) \neq 0 \right.$
 $\left. \text{PER } i \in [\omega-c, \omega-1] \right]$

COMPENSATORE F.S. LPTV

④

• μ : INDICE DI RAGGIUNGIBILITÀ DI S

• ν : INDICE DI OSSERVABILITÀ DI S



• ω : PIÙ PICCOLO INTERO $\geq \mu + \nu$ TALE CHE

$$\begin{cases} (A^\omega, B) \text{ CONTROLLABILE} \\ (A^\omega, C) \text{ RICOSTRUIBILE} \end{cases}$$

• c : INTERO TALE CHE $c \in [\mu, \omega - \nu]$

• $\tilde{H}$:
$$\begin{bmatrix} A^{\tilde{H}}(h\omega + i) & B^{\tilde{H}}(h\omega + i) \\ C^{\tilde{H}}(h\omega + i) & D^{\tilde{H}}(h\omega + i) \end{bmatrix} = \begin{cases} \begin{bmatrix} 0 & I \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \text{PER } i = 0 \\ \begin{bmatrix} I & I \\ I & 0 \end{bmatrix} & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$$

• $\tilde{L}(h\omega + i) = \begin{cases} 0 & \text{PER } i \in [0, \omega - c - 1] \\ L_i & \text{PER } i \in [\omega - c, \omega - 1] \end{cases}$

• $\tilde{W}(h\omega + i) = \begin{cases} W_i & \text{PER } i \in [0, \omega - c - 1] \\ 0 & \text{PER } i \in [\omega - c, \omega - 1] \end{cases}$

• DATE $V \in \mathbb{R}^{n \times p}$, $K \in \mathbb{R}^{p \times n}$ TALI CHE $(A^\omega + VK)$ HA UN INSIEME DESIDERATO DI AUTOVALORI, FISSO L_i, W_i TRAMITE:

$$[W_0 \ W_1 \ \dots \ W_{\omega-c-1}] \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{\omega-c-1} \end{bmatrix} = K$$

$$[B \ AB \ \dots \ A^{c-1}B] \begin{bmatrix} L_{\omega-1} \\ L_{\omega-2} \\ \vdots \\ L_{\omega-c} \end{bmatrix} = V$$

COMPENSATORE F.S. LPTV, $i \in [0, \omega - c - 1]$

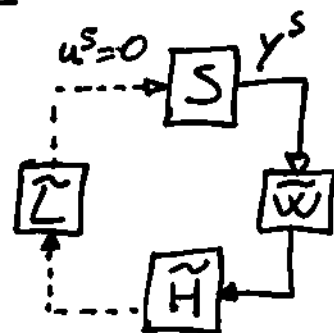
(5)

$\tilde{L}(h\omega + i) = 0 \Rightarrow S$ IN EVOLUZIONE LIBERA

$$\begin{aligned} x^{\tilde{H}}(h\omega + 1) &= W_0 y^s(h\omega) \\ &= W_0 C x^s(h\omega) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^{\tilde{H}}(h\omega + 2) &= x^{\tilde{H}}(h\omega + 1) + W_1 y^s(h\omega + 1) \\ &= (W_0 C + W_1 C A) x^s(h\omega) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vdots \\ x^{\tilde{H}}(h\omega + \omega - c) &= \left(\sum_{i=0}^{\omega - c - 1} W_i C A^i \right) x^s(h\omega) \\ &= K x^s(h\omega) \end{aligned}$$



- Poiché $\tilde{W}(h\omega + i) = 0$ per $i \in [\omega - c, \omega - 1]$, su tale intervallo $\tilde{H}$ è in evoluzione libera e quindi:

$$\begin{aligned} x^{\tilde{H}}(h\omega + \omega - 1) &= x^{\tilde{H}}(h\omega + \omega - 2) = \dots = \\ &= x^{\tilde{H}}(h\omega + \omega - c) \\ &= K x^s(h\omega) \end{aligned}$$

i.e.

$$x^{\tilde{H}}(h\omega + i) = K x^s(h\omega) \text{ per } i \in [\omega - c, \omega - 1]$$

- LA CASCATA DI $\tilde{W}$ E $\tilde{H}$ SI COMPORTA COME UN OSSERVATORE DEADBEAT DURANTE L' "INTERVALLO DI OSSERVAZIONE" $i \in [0, \omega - c - 1]$

COMPENSATORE LPTV F.S., $i \in [\omega-c, \omega-1]$

⑥

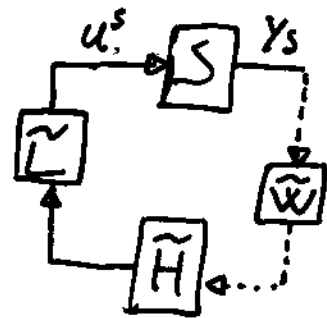
$$u^s(h\omega+i) = 0 \text{ PER } i \in [0, \omega-c-1]$$

$$u^s(h\omega+i) = L_i y^{\tilde{H}}(h\omega+i)$$

$$= L_i x^{\tilde{H}}(h\omega+i)$$

$$= L_i x^{\tilde{H}}(h\omega+\omega-c)$$

$$= L_i K x^s(h\omega) \text{ PER } i \in [\omega-c, \omega-1]$$



PERTANTO

$$x^s((h+1)\omega) = A^\omega x^s(h\omega) + \underbrace{\sum_{i=\omega-c}^{\omega-1} A^{\omega-1-i} B L_i K}_{=V} x^s(h\omega)$$

$$= (A^\omega + VK) x^s(h\omega)$$

→ LA MATRICE DI MONODROMIA A CICLO CHIUSO $(A^\omega + VK)$ HA GLI AUTOVALORI DESIDERATI, FISSATI CON LA SCELTA DI V E K

- LA "MODULAZIONE" REALIZZATA DA $\tilde{L}$ DURANTE L' "INTERVALLO DI CONTROLLO" $i \in [\omega-c, \omega-1]$ PUO' ESSERE VISTA COME UN "GUADAGNO" V

COMPENSATORI F.S. LPTV - COMMENTI

⑦

- LE EQUAZIONI DI PROGETTO:

$$V = [B \ AB \ \dots \ A^{c-1}B] \begin{bmatrix} L_{w-1} \\ L_{w-2} \\ \vdots \\ L_{w-c} \end{bmatrix}$$

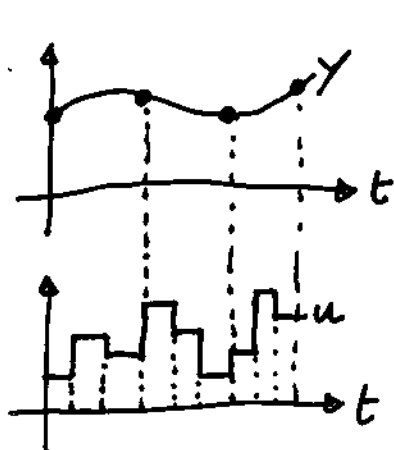
$$K = [W_0 \ W_1 \ \dots \ W_{w-c-1}] \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{w-c-1} \end{bmatrix}$$

HANNO MOLTI GRADI DI LIBERTA'

- IN CASI DI INTERESSE PRATICO, LE L_i (O LE W_i) POSSONO ESSERE USATE PER ESPRIMERE VINCOLI SULLA STRUTTURA DEL COMPENSATORE

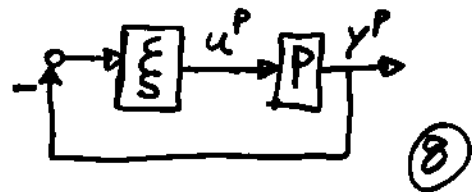
ESEMPIO: SISTEMI MULTIRATE, CON PIU' TEMPI DI CAMPIONAMENTO DIVERSI

MRIC [MULTIRATE INPUT CONTROL]



- IL SEGNALE DI CONTROLLO VIENE AGGIORNATO CON FREQUENZA PIU' ALTA DI QUELLA USATA PER IL CAMPIONAMENTO DELL' USCITA
- PUO' ESSERE RIFORMULATO COME "SCELTA PARTICOLARE" DI $\tilde{W}$

IGM - IDEABASE (SISO)



• SIANO $\xi \in [1, +\infty)$, E

$$\begin{cases} P_1: \begin{bmatrix} A & B \\ C & D_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ P_2: \begin{bmatrix} A & B \\ C & D_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \end{cases}$$

- SI NOTI CHE PER $\xi = 1$, $u_{\text{non}}^P = -CX$ E' STABILIZZANTE PER $x(t+1) = Ax(t) + Bu(t)$, INFATTI

$$\begin{aligned} x(t+1) &= (A - BC)x(t) \\ &= 0 \cdot x(t) \quad \text{A.S.} \end{aligned}$$

- APPLICANDO $u^P = -\xi y^P$ A P_1 E P_2 , SI HA:

PER P_1 :

$$\left. \begin{aligned} u^P &= -\xi CX \\ &= \underbrace{-X}_{u_{\text{non}}^P} + \underbrace{(1-\xi)X}_{\Delta u} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} x(t+1) &= (A - \xi BC)x(t) \\ &= (1-\xi)x(t) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ NON A.S. PER $\xi \notin (0, 2)$

PER P_2 :

$$\begin{aligned} u^P &= -\xi(Cx + Du^P) \Rightarrow u^P = -\frac{\xi}{1+\xi} CX \\ &= \underbrace{-X}_{u_{\text{non}}^P} + \underbrace{\frac{1}{1+\xi}X}_{\Delta u} \end{aligned}$$

$$x(t+1) = \frac{1}{1+\xi} x(t)$$

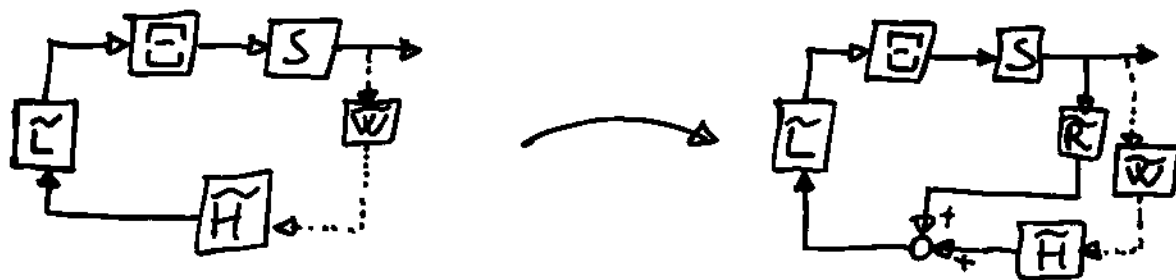
$\Rightarrow$ A.S. PER $\xi \notin [-2, 1]$

- IDEABASE: I LEGAMI DIRETTI V/O POSSONO ESSERE USATI PER "RISCALARE" I GUADAGNI INCOGNITI!

MODIFICA SCHEMA LPTV F.S., $i \in [\omega-c, \omega-1]$

⑨

- OCCORRE CREARE UN LEGAME DIRETTO OPPORTUNO



- CASO SISO: $\tilde{L}(hw+1) = 1$, $\tilde{R}(hw+1) = -D^{-1} \Rightarrow \tilde{L}(hw+1)D\tilde{R}(hw+1) = -1$
- CASO MIMO: OSTACOLO! D PUO' ESSERE NON INVERTIBILE DA DESTRA!

POSSIBILE SOLUZIONE, GARANTIRE SEQUENZIALMENTE
LEGAMI DIRETTI PARI A $-I$ PER SOTTOINSIEMI
DI CANALI I/O,

$\rightarrow$ SI SCELGONO L_i DIAGONALI CON ELEMENTI 0 O ± 1
E R_i TALI CHE $R_i D L_i = -L_i$

ESEMPIO: $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ "INVERTIBILE" DA DESTRA IN
DUE PASSI SEQUENZIALI:

$$L_{\omega-2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, R_{\omega-2} = \begin{bmatrix} -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$L_{\omega-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, R_{\omega-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1/3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow R_i D L_i = -L_i \text{ PER } i = \omega-2, \omega-1$$

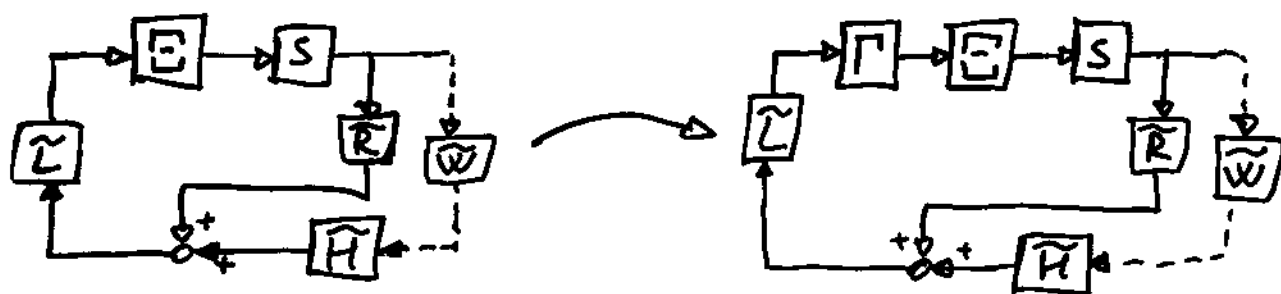
$$\Rightarrow R_i D \tilde{E} L_i (I - R_i D \tilde{E} L_i)^{-1} = L_i \tilde{E} (I + \tilde{E})^{-1}$$

$$= L_i \begin{bmatrix} \frac{\tilde{\epsilon}_1}{1 + \tilde{\epsilon}_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{\tilde{\epsilon}_p}{1 + \tilde{\epsilon}_p} \end{bmatrix}$$

- LA MATRICE DI MONODROMIA A CICLO CHIUSO VALE

$$(A^w + V \Xi (I + \Xi)^{-1} K) = (A^w + VK) - V \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{1+\xi_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{1+\xi_p} \end{bmatrix}}_{\text{PERTURBAZIONE}} K$$

- K SCELTA IN MODO CHE $(A^w + VK)$ SIA NILPOTENTE
- SE I GUADAGNI ξ_i NON SONO SUFFICIENTEMENTE GRANDI DA GARANTIRE CHE LA PERTURBAZIONE È TRASCURVABILE, INTRODUCO GUADAGNI AGGIUNTIVI Γ :



- $\Gamma = \text{diag}(\gamma_1, \dots, \gamma_p)$ CON I γ_i DETERMINABILI ESPLICITAMENTE:

$$\frac{1}{1+\gamma_i} \left\| \langle TV \rangle_{(i,i)} \langle KT^{-1} \rangle_{(i,i)} \right\|_{\infty} < \frac{2^{1/2} - 1}{p}$$

- NEL SEGUITO, $\boxed{Z = \Xi \Gamma}$ PER BREVEA

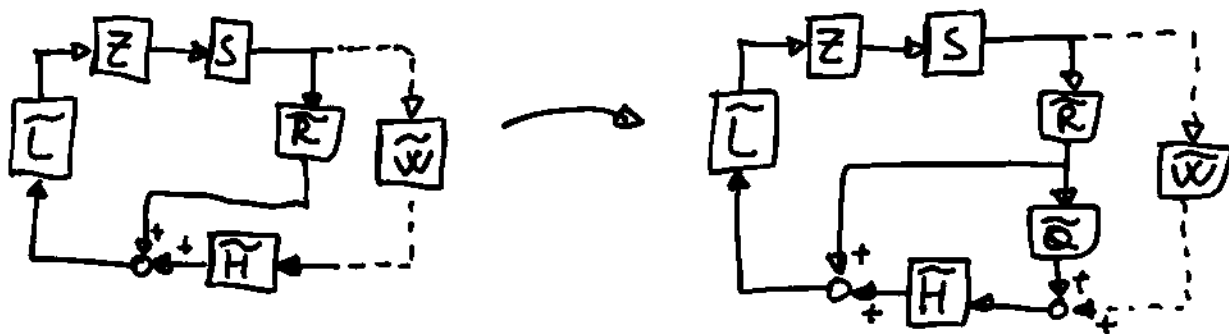
MODIFICA SCHEMA F.S. LPTV (continua), $i \in [\omega-c, \omega-1]$ (11)

- CON LE MODIFICHE EFFETTUATE, SI OTTIENE

$$y^{\tilde{L}}(h\omega+i) = L_i(I+Z)^{-1} \left[x^{\tilde{H}}(h\omega+i) + R_i C A^i x^S(h\omega) + \underbrace{+ R_i \sum_{j=\omega-c}^{i-1} C A^{i-1-j} B Z L_j u^{\tilde{L}}(h\omega+j)}_{\Delta_i} \right]$$

- IL TERMINE Δ_i DIPENDE DA Z E PUO' PREGIUDICARE LA STABILITA'?

→ POICHE' Δ_i DIPENDE DAI VALORI PASSATI DI $u^{\tilde{L}}$ (CHE SONO NOTI!), PUO' ESSERE ELIMINATO INTRODUCENDO $\tilde{Q}$:



- LE Q_i SONO DEFINITE RICORSIVAMENTE:

$$\begin{cases} \bullet Q_{\omega-1} := 0 \\ \bullet Q_i := \sum_{j=i+1}^{\omega-1} L_j \left[R_j C A^{j-1-i} B + \sum_{k=i+1}^{j-1} Q_k R_k C A^{k-1-i} B \right] \end{cases}$$

PER $i = \omega-2, \omega-3, \dots, \omega-c$

MODIFICA SCHEMA LPTV F.S., $i \in [0, \omega - c - 1]$

(12)

- DOPO L'INTRODUZIONE DI $\tilde{Q}$, SI HA PER $i \in [\omega - c, \omega - 1]$:

$$y^{\tilde{L}}(h\omega + i) = L_i(I + z)^{-1} \left[x^{\tilde{H}}(h\omega + \omega - c) + R_i C A^i x^S(h\omega) + \sum_{j=0}^{i-1} Q_j R_j C A^j x^S(h\omega) \right]$$

- SE FOSSE $x^{\tilde{H}}(h\omega + \omega - c) = K x^S(h\omega)$, NON AVREI LA RELAZIONE DESIDERATA

$$y^{\tilde{L}}(h\omega + i) = L_i(I + z)^{-1} K x^S(h\omega)$$

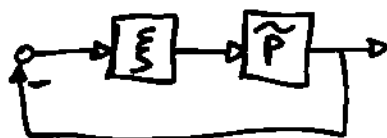
→ OCCORRE RIDEFINIRE L'EQUAZIONE DI PROGETTO PER w_i :

$$y^{\tilde{L}}(h\omega + i) = L_i(I + z)^{-1} \left[\sum_{j=0}^{\omega - c - 1} w_j C A^j + R_i C A^i + \sum_{j=0}^{i-1} Q_j R_j C A^j \right] x^S(h\omega)$$

$$\Rightarrow \left[w_0 \ w_1 \ \dots \ w_{\omega - c - 1} \right] \begin{bmatrix} C \\ C A \\ \vdots \\ C A^{\omega - c - 1} \end{bmatrix} = K - R_i C A^i - \sum_{j=0}^{i-1} Q_j R_j C A^j$$

LA DIMOSTRAZIONE DELLA NECESSITA' DELLA CONDIZIONE
 "NESSUNA COLONNA DI D PARI A ZERO" SI OTTIENE
 FACILMENTE DAL SEGUENTE LEMMA. (13)

LEMMA SIA $\tilde{P}: (\tilde{A}(k), \tilde{B}(k), \tilde{C}(k), \tilde{D}(k))$ SISO, LPTV, NON A.S.
 ALLORA $(\tilde{D}(k) \equiv 0) \Rightarrow \left(\nexists \bar{\xi} \in \mathbb{R}_{>0}: \text{IL SISTEMA IN FIGURA} \right.$
 $\left. \text{E' A.S., } \forall \xi \geq \bar{\xi} \right)$



PROVA

- SIA (A_0, B_0, C_0, D_0) L'ASSOCIATO DI $\tilde{P}$ AL TEMPO ϕ .
 QUINDI $(A_0, B_0 \xi, C_0, D_0 \xi)$ E' L'ASSOCIATO DI $\rightarrow \xi \rightarrow \tilde{P} \rightarrow$
- LA MATRICE DI MONODROMIA A CICLO CHIUSO E':
 $A_0 + B_0 \xi (I + D_0 \xi)^{-1} C_0$
- $\tilde{D}(k) \equiv 0 \Rightarrow D_0 = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ * & \ddots & * \\ * & \dots & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(I + D_0 \xi) = 1 \Rightarrow$
 $\Rightarrow (I + D_0 \xi)^{-1} = \frac{\text{adj}(I + D_0 \xi)}{\det(I + D_0 \xi)}$ POLINOMIALE IN ξ
 $\Rightarrow$ I COEFFICIENTI DEL POLINOMIO CARATTERISTICO
 DI $(A_0 + B_0 \xi (I + D_0 \xi)^{-1} C_0)$ SONO POLINOMIALI
 IN ξ
- PER ASSURDO: SIA IL SISTEMA A CICLO CHIUSO
 $\begin{cases} \text{NON A.S. PER } \xi = 0 \\ \text{A.S. PER } \xi = 1 \end{cases}$

ALLORA ALMENO UN COEFFICIENTE DEL POLINOMIO
 CARATTERISTICO DI $(A_0 + B_0 \xi (I + D_0 \xi)^{-1} C_0)$ E' POLINO-
MIALE E NON COSTANTE IN ξ ; MA ALLORA TALE
 COEFFICIENTE DIVERGE PER $\xi \rightarrow \infty$, E QUINDI
 ALMENO UN MOLTIPLICATORE CARATTERISTICO
 ESCE DAL CERCHIO UNITARIO PER $\xi \rightarrow \infty$

□

RIFERIMENTI

- Khargonekar, Poolla, Tannenbaum
ROBUST CONTROL OF LINEAR TIME-INVARIANT PLANTS
USING PERIODIC COMPENSATION
IEEE Trans. Aut. Control v.30, n.11, p1088-1096, 1985
- Yang, Kabamba
MULTI-CHANNEL OUTPUT GAIN MARGIN IMPROVEMENT
USING GENERALIZED SAMPLED-DATA HOLD FUNCTIONS
IEEE Trans. Aut. Control v.39, n.3, p557-661, 1994
- Yan, Anderson, Bitmead
ON THE GAIN MARGIN IMPROVEMENT USING DYNAMIC
COMPENSATION BASED ON GSHF FUNCTIONS
IEEE Trans. Aut. Control v.39, n.11, p2347-2354, 1994
- Evans
FINITE-DIMENSIONAL REALIZATIONS OF DISCRETE-TIME
WEIGHTING PATTERNS
SIAM J. Appl. Math. v.22 p.45-67, 1972
- Meyer, Burrus
A UNIFIED ANALYSIS OF MULTIRATE AND PERIODICALLY
TIME-VARYING DIGITAL FILTERS
IEEE Trans. Circuit. Syst., v.22 p.162-168, 1975
- Grasselli, Longhi
FINITE ZERO STRUCTURE OF LINEAR PERIODIC
DISCRETE-TIME SYSTEMS
Int. J. Systems Science, v.22, n.10, p1785-1806, 1991
- Weiss
CONTROLLABILITY, REALIZATION AND STABILITY
OF DISCRETE TIME SYSTEMS, SIAM Journal of
Control, v.10, n.2, p.230-251, 1972