Identificazione e Analisi dei Dati II:
Esercitazione # 3: Filtro di Kalman Esteso

Un robot mobile si muove in un ambiente bidimensionale, rappresentabile mediante un sistema di riferimento cartesiano $x - y$ (figura 1).

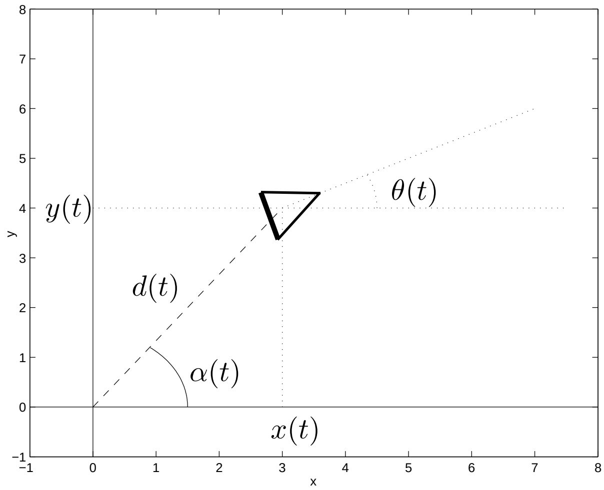

Figura 1.

Il moto del robot può essere descritto in modo sufficientemente accurato dal modello dinamico tempo-discreto

$$
\begin{aligned}
x(t+1) &= x(t) + T_c u_r(t) \cos\theta(t) + w_1(t) \\
y(t+1) &= y(t) + T_c u_r(t) \sin\theta(t) + w_2(t) \\
\theta(t+1) &= \theta(t) + T_c u_a(t) + w_3(t)
\end{aligned}
$$

dove

- $x(t), y(t)$ sono le coordinate della posizione del centro del robot all'istante t (espresse in metri);
- $\theta(t)$ è l'orientazione del robot, calcolata in senso antiorario rispetto all'asse x (espressa in radianti);
- $u_r(t)$ è la velocità radiale impressa al robot all'istante t;
- $u_a(t)$ è la velocità angolare impressa al robot all'istante t;
- T_c è il tempo di campionamento del modello tempo-discreto;
- $w(t) = (w_1(t), w_2(t), w_3(t))'$ è l'errore di processo, modellato come un processo stocastico bianco di varianza Q.

Nell'origine del sistema di riferimento cartesiano è posizionato un radar che fornisce misure di distanza e misure angolari (vedi figura 1). Ad ogni istante di campionamento $t = 0, \ldots, N-1$ sono disponibili le misure relative al robot

$$
\begin{aligned}
d(t) &= \sqrt{x^2(t) + y^2(t)} + v_1(t) \\
\alpha(t) &= \mathtt{atan2}(y(t), x(t)) + v_2(t)
\end{aligned}
$$

dove $v(t) = (v_1(t), v_2(t))'$ è il rumore di misura (modellato come un processo stocastico bianco di varianza R), e `atan2` è l'arcotangente definita su quattro quadranti, ovvero

$$\texttt{atan2}(b,a) = \begin{cases} \arctan(b/a) & \text{se } \; a > 0 \\ \pi/2 & \text{se } \; a = 0, \; b > 0 \\ -\pi/2 & \text{se } \; a = 0, \; b < 0 \\ \arctan(b/a) + \pi & \text{se } \; a < 0, \; b \geq 0 \\ \arctan(b/a) - \pi & \text{se } \; a < 0, \; b < 0 \end{cases}$$

Il file `dati1.mat` contiene i seguenti dati:

- la matrice `U` $\in \mathbb{R}^{N \times 2}$, contenente le sequenze di ingresso $u_r(t)$ (prima colonna) e $u_a(t)$ (seconda colonna), per $t = 0, 1, \dots, N-1$;
- la matrice `Y` $\in \mathbb{R}^{N \times 2}$, contenente le sequenze di misure $d(t)$ (prima colonna) e $\alpha(t)$ (seconda colonna), per $t = 1, \dots, N-1$;
- le matrici delle covarianze `Q` ed `R`;
- il tempo di campionamento `Tc` e il vettore dei tempi `t`;
- la matrice `X` $\in \mathbb{R}^{N \times 3}$, contenente le sequenze di variabili di stato vere $x(t)$ (prima colonna), $y(t)$ (seconda colonna) e $\theta(t)$ (terza colonna), per $t = 1, \dots, N-1$ [attenzione: lo stato vero deve essere utilizzato solo per i confronti e non nell'algoritmo di filtraggio!].

(I) A partire dai modelli del moto e delle misure, progettare e implementare un filtro di Kalman esteso che utilizzando i dati disponibili produca una stima della traiettoria del robot e della sua orientazione.

(II) Confrontare la traiettoria stimata con quella fornita dal radar istante per istante e con la traiettoria vera. Confrontare inoltre la stima dell'orientazione del robot con l'orientazione vera.

(III) Tracciare il grafico dell'andamento dell'errore di stima quadratico predetto dal modello (la traccia della matrice di covarianza del filtro di Kalman esteso). Confrontarlo con l'errore quadratico vero.

(IV) Discutere il ruolo delle condizioni iniziali del filtro e delle matrici di covarianza Q ed R, esaminando il comportamento del filtro al variare del loro valore.

(V) Ripetere l'esercizio utilizzando i dati contenuti nel file `dati2.mat`.