Identificazione e Analisi dei Dati II

Esercitazione # 1: Filtro di Kalman

L'evoluzione di una popolazione di capi di bestiame può essere descritta in modo sufficientemente accurato da modelli a classi di età, ovvero da modelli in equazioni di stato le cui variabili rappresentano il numero di elementi della popolazione nella rispettiva classe.

Si consideri un modello comprendente le seguenti classi

x_1 : femmine giovani	x_4 : maschi giovani
x_2 : femmine adulte	x_5 : maschi adulti
x_3 : femmine anziane	x_6 : maschi anziani

Se $x_i(k)$ rappresenta il numero di capi della classe i -esima nell'anno k , l'evoluzione della popolazione è descritta dall'equazione

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \\ x_4(k+1) \\ x_5(k+1) \\ x_6(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & b_3 & 0 & 0 & 0 \\ c_1 & c_2 & c_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_2 & d_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \\ x_4(k) \\ x_5(k) \\ x_6(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \\ u_3(k) \\ u_4(k) \\ u_5(k) \\ u_6(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_1(k) \\ w_2(k) \\ w_3(k) \\ w_4(k) \\ w_5(k) \\ w_6(k) \end{bmatrix}$$

dove

- i coefficienti a_i e c_i , $i = 1, 2, 3$, sono i tassi di natalità, rispettivamente di femmine e maschi, da madri appartenenti alla classe x_i ;
- i coefficienti b_i e d_i , $i = 1, 2, 3$, sono i tassi di sopravvivenza, rispettivamente delle femmine della classe x_i e dei maschi della classe x_{i+3} ;
- $u_i(k)$ è il bilancio di acquisto e vendita di capi della classe i -esima, nell'anno k ;
- $w_i(k)$ rappresenta la discrepanza tra l'evoluzione reale della classe i -esima e quella nominale prevista dal modello.

Sono disponibili dati provenienti da censimenti annuali, effettuati su un arco temporale di 101 anni, relativi al numero complessivo di capi divisi in maschi e femmine, ovvero

$$\begin{aligned} y_1(k) &= x_1(k) + x_2(k) + x_3(k) + v_1(k) \\ y_2(k) &= x_4(k) + x_5(k) + x_6(k) + v_2(k) \end{aligned} \quad k = 0, 1, \dots, 100$$

dove i $v_j(k)$, $j = 1, 2$, rappresentano gli errori compiuti nei censimenti.

A. Si assuma che $w_i(k)$, $i = 1, \dots, 6$ e $v_j(k)$, $j = 1, 2$, possano essere modellati come realizzazioni di processi stocastici tempo-discreto, bianchi, a media nulla, indipendenti tra loro, e tali che

- la varianza dei processi $w_i(k)$ sia pari a $\sigma_w^2 = \mathbf{sw}2$;
- la varianza dei processi $v_j(k)$ sia pari a $\sigma_v^2 = \mathbf{sv}2$.

Si implementi un filtro di Kalman, in grado di stimare la popolazione di ciascuna classe di età, sulla base dei dati di ingresso $\mathbf{uA}$ e delle misure $\mathbf{yA}$. Si confrontino graficamente le stime ottenute con l'evoluzione vera delle classi di età, contenuta in $\mathbf{xveroA}$ (la i -esima colonna si riferisce allo stato $x_i(k)$). Si valuti inoltre l'andamento dell'errore di stima quadratico $\sqrt{\|x(k) - \hat{x}(k)\|^2}$ e lo si confronti con la stima fornita dal filtro di Kalman (la radice della traccia della matrice di covarianza P .)

B. Si implementi il filtro di Kalman asintotico relativo al problema di cui al punto A. Si confrontino graficamente le stime fornite dal filtro di Kalman asintotico con quelle fornite dal filtro di Kalman tempo-variante ricavato al punto A.

Discutere il ruolo dell'inizializzazione del filtro di Kalman, nel confronto con il filtro di Kalman asintotico.

C. Si consideri ancora la stessa evoluzione delle variabili di stato di cui al punto A (con medesimo ingresso $\mathbf{uA}$), ma si assuma di disporre di un diverso set di misure di uscita $\mathbf{yC}$. Sapendo che gli errori di misura relativi ai dati $\mathbf{yC}$ hanno deviazione standard pari a

$$\sigma_{v_j}(k) = 300 \cdot 0.95^k \quad j = 1, 2$$

si applichi nuovamente il filtro di Kalman, tenendo conto di questa informazione. Si confrontino le stime ottenute con quelle fornite da un filtro di Kalman che assuma una deviazione

standard degli errori di misura costante, pari a 300. Valutare l'andamento dell'errore di stima quadratico nei due casi (utilizzando l'evoluzione vera dello stato $\mathbf{x}_{\text{veroA}}$) e lo si confronti col valore predetto dai due filtri di Kalman.

D. Si supponga ora di disporre di un nuovo set di dati ingresso-uscita $\mathbf{u}_D, \mathbf{y}_D$, relativo al modello di cui al punto A, in cui però il parametro a_2 della matrice A varia nel tempo secondo la legge

$$a_2(k) = 0.45 + 0.3 \sin\left(\frac{2\pi}{20}k\right)$$

Applicare il filtro di Kalman e confrontare i risultati ottenuti con quelli del filtro utilizzato al punto A (in cui la matrice di stato A è costante nel tempo). Valutare la differenza delle prestazioni dei due filtri in termini di errore quadratico medio di stima dello stato (da calcolarsi utilizzando lo stato vero $\mathbf{x}_{\text{veroD}}$).

Dati.

I dati contenuti nel file `dati1.mat` si riferiscono alle seguenti quantità

- parametri del modello: $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3, d_1, d_2, d_3$;
- varianze dei processi w_i e v_j : $\mathbf{sw}^2$ e $\mathbf{sv}^2$, rispettivamente;
- dati di ingresso e di uscita $\mathbf{u}_A, \mathbf{y}_A$ e andamento dello stato vero $\mathbf{x}_{\text{veroA}}$, da utilizzarsi nei punti A, B e C;
- dati di uscita $\mathbf{y}_C$ da utilizzarsi nel punto C;
- dati di ingresso e di uscita $\mathbf{u}_D, \mathbf{y}_D$ e andamento dello stato vero $\mathbf{x}_{\text{veroD}}$, da utilizzarsi nel punto D;
- vettore dei tempi $\mathbf{t}$ (riferito a tutti i segnali considerati).