**Fondamenti di Automatica - sede di Arezzo**

Elaborato 6: raggiungibilità e controllabilità, allocazione degli autovalori

**Problema 1.** È dato il sistema

$$x(t+1) = Ax(t) + Bu(t)$$

ad un ingresso e con dimensione dello stato $n \geq 2$. Verificare che se $B$ è un autovettore di $A$, allora il sistema non è completamente raggiungibile. Da che cosa è dato il sottospazio raggiungibile?

**Problema 2.** È dato il sistema

$$x(t+1) = Ax(t) + Bu(t)$$

dove

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \quad ; \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

Determinare quali condizioni devono soddisfare $b_1, b_2, b_3$ affinché il sistema risulti completamente raggiungibile. Nei casi in cui il sistema non è completamente raggiungibile, calcolare la dimensione ed una base dello spazio degli stati raggiungibili.

**Problema 3.** Per il sistema

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

determinare un controllore con retroazione dallo stato

$$u = Fx + v$$

in modo che il sistema controllato abbia tutti gli autovalori in $\lambda = -1$. Determinare poi la funzione di trasferimento $G(s) = Y(s)/V(s)$.

**Problema 4.** Dato il sistema

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1-\alpha \\ 1+\alpha \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} x$$

Si desidera progettare un regolatore con retroazione dallo stato $u = Fx$ in modo che il sistema controllato risulti asintoticamente stabile.

1. Determinare, se esistono, i valori di $\alpha$ per cui il problema considerato ha soluzione
2. Assumendo $\alpha = 1$, determinare se possibile $F$ in modo da stabilizzare il sistema posizionando gli autovalori in $\lambda_1 = -a$ e $\lambda_2 = -b$ con $a, b > 0$ arbitrari
3. Si desidera verificare se sia possibile ottenere il risultato di cui al punto precedente impiegando, al posto della retroazione statica dello stato $u = Fx$, una retroazione statica dell'uscita, ovvero ponendo $u = ky$ con $k$ costante scalare da scegliersi opportunamente. È questo possibile per qualunque scelta di $a$ e $b$? Se no, come devono essere scelti $a$ e $b$? Spiegare.