Fondamenti di Automatica - sede di Arezzo
Elaborato 4: riepilogo sulla prima parte del corso

Problema 1. Si vuole determinare il modello dell'evoluzione della popolazione in una città. A tale fine, si considerano 2 differenti classi: quella degli individui fra 0 e 15 anni (prima classe) e maggiori di 15 anni (seconda classe). Siano μ_1 e μ_2 i tassi di mortalità di ciascuna classe (la frazione di individui deceduti in quella classe nell'arco di 15 anni), mentre si indichi con α_2 il tasso di fertilità della classe 2 (l'unica in grado di avere figli), espresso come il numero medio di figli che ogni individuo ha in 15 anni. Sia inoltre $u(t)$ il numero di immigrati (tutti di età superiore ai 15 anni) che si trasferiscono in città in un periodo di 15 anni.
Costruire un modello tempo discreto in variabili di stato che renda ragione dell'evoluzione a periodi di 15 anni del numero di appartenenti alla prima classe in funzione del numero di immigrati. Calcolare la funzione di trasferimento.

Problema 2. Dato il sistema descritto dalla funzione di trasferimento

$$W(s) = \frac{s-1}{s^4 + \alpha s^3 + 2(\alpha+1)s^2 + 16s + 8}$$

determinare α in modo che la risposta del sistema (per condizioni iniziali nulle) al gradino unitario $u(t) = 1(t)$ sia della forma

$$y(t) = \left[A + (B + Ct)e^{-2t} + De^{\sigma t}\cos(\omega t + \phi)\right] 1(t)$$

dove $A, B, C, D, \sigma, \omega, \phi$ sono opportune costanti (con $A, B, C, D, \sigma, \omega$ diverse da zero). Calcolare quindi il valore di tali costanti.

Problema 3. La risposta all'impulso di un sistema lineare tempo-discreto tempo-invariante è data dalla sequenza

$$\{w(t)\} = \left\{1, -1, 3\sigma^2, -3\sigma^2, 9\sigma^4, -9\sigma^4, 27\sigma^6, -27\sigma^6, \ldots\right\}$$

dove σ è un parametro reale.

1. Determinare la funzione di trasferimento del sistema
2. Determinare, se esistono, i valori di σ tali che la risposta all'impulso tenda a zero per $t \to \infty$
3. Posto $\sigma = 1/(2\sqrt{3})$, calcolare la risposta al gradino unitario.

Problema 4. È dato il sistema lineare tempo-invariante tempo-continuo descritto dalle equazioni

$$\dot{x}(t) \quad = \quad Ax(t)$$

dove

$$A = \begin{bmatrix} -1 & \alpha & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & -\alpha & -1 \end{bmatrix}.$$

1. Determinare i valori di α per cui i modi del sistema sono reali e convergenti, ovvero hanno limite finito per $t \to +\infty$
2. Posto $\alpha = 0$, determinare esplicitamente i modi del sistema.

Problema 5. L'evoluzione nel tempo dell'uscita di un sistema dinamico tempo-continuo è descritta dalla seguente equazione

$$y(t) = \int_0^t w(t-\tau)u(\tau^3)d\tau$$

dove $w(t)$ è una certa funzione reale e $u(t)$ è la funzione di ingresso.

1. Dire se il sistema è lineare
2. Supponendo di considerare l'evoluzione del sistema per $t \in [0, t_0]$, dire se il sistema può definirsi causale per qualunque valore di t_0.

Giustificare le affermazioni fatte.

Problema 6. In un casinò, una delle attrazioni si basa sul gioco delle tre carte: lo scommettitore deve indovinare dove si trova una carta, scegliendone una fra tre coperte, disposte casualmente (in media, quindi, un terzo dei giocatori indovina e due terzi sbagliano). Più specificamente, si tratta di un gioco a turni in cui, pagata una quota di iscrizione fissa (pari ad α), ciascun giocatore continua a giocare finché non indovina consecutivamente due volte (e allora riceve il premio), o sbaglia consecutivamente due volte (e allora viene eliminato dal gioco).

1. Si costruisca un modello lineare tempo discreto tempo invariante che metta in relazione il numero di giocatori che ad ogni turno inizia a giocare ($u(t)$), con il numero di quelli che vincono la scommessa e incassano il premio ($y(t)$). Si considerino come variabili di stato il numero di giocatori che hanno indovinato una volta ed il numero di giocatori che hanno sbagliato una volta.

2. Supponendo che il casinò voglia trattenere per sé (e quindi non ridistribuire come premio) il 50% degli incassi forniti dalle quote di iscrizione, determinare (in funzione di α) l'entità del premio che deve essere erogato in caso di vittoria supponendo che ad ogni turno inizi a giocare sempre lo stesso numero di giocatori e che sia trascorso un numero elevato di turni dall'inizio del gioco.

Problema 7. Dato il sistema tempo discreto

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} x(t)$$

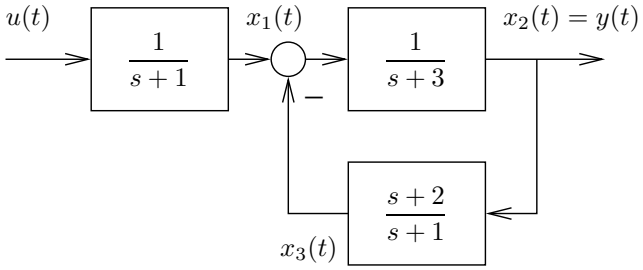
determinare per quali condizioni iniziali $x(0)$ la risposta libera del sistema tende a zero in un numero finito di passi.

Problema 8. Dato lo schema a blocchi in figura

1. Calcolare la funzione di trasferimento $W(s) = Y(s)/U(s)$ e la rappresentazione del sistema sotto forma di equazione differenziale ingresso-uscita.

2. Determinare la rappresentazione ingresso-stato-uscita che si ottiene prendendo come vettore di stato $x(t) = [x_1(t)\ x_2(t)\ x_3(t)]'$.

3. Verificare il valore di $W(s)$ a partire dalla rappresentazione di stato.



Problema 9. È dato il sistema

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} a-1 & 1-2a & 2a-1 \\ 0 & -(a+1) & 2a \\ 0 & -a & a-1 \end{bmatrix} x$$

dove a è un numero reale.
Al variare di a, determinare i modi propri del sistema.