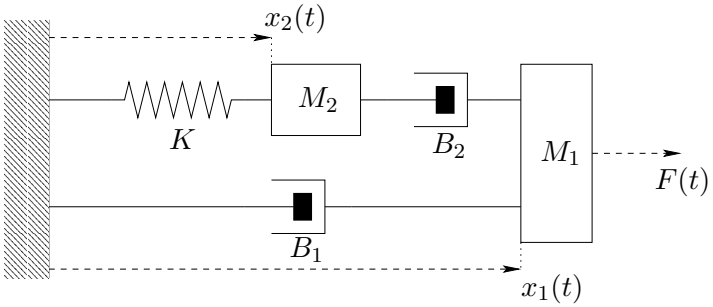
Fondamenti di Automatica - sede di Arezzo

Elaborato 1: modelli, trasformate, funzioni di trasferimento

Problema 1. Si consideri il sistema meccanico masse/molle/smorzatori in figura, dove $F(t)$ è una forza applicata dall'esterno, $x_1(t)$ ed $x_2(t)$ sono le posizioni delle masse M_1 ed M_2 rispetto alla posizione di riposo, K è la costante elastica della molla e B_1 e B_2 sono i coefficienti di attrito viscoso degli smorzatori.



1. Determinare una rappresentazione di stato del sistema assumendo come ingresso $u(t) = F(t)$ e come uscita $y(t) = x_1(t)$;
2. Calcolare la funzione di trasferimento;
3. Utilizzando i valori numerici sotto riportati calcolare, utilizzando la trasformata di Laplace, l'andamento nel tempo di $y(t) = x_1(t)$, partendo da sistema a riposo, quando all'istante $t = 0$ viene applicato un ingresso costante $u(t) = F(t) = F_0\ 1(t)$.

Valori numerici: $M_1 = M_2 = 1$ kg, $B_1 = B_2 = 3$ Ns/m, $K = 0.2$ N/m, $F_0 = 1$ N.

Problema 2. Calcolare la trasformata di Laplace delle seguenti funzioni

$$f(t) = e^t + te^{-t} \quad ; \quad f(t) = e^{2t}\cos(t) \quad ; \quad f(t) = t^2\cosh(t/2) \quad ; \quad f(t) = \int_0^t \tau e^{-2\tau}\cos(4\tau + \pi/3)\ d\tau$$

Problema 3. Calcolare l'antitrasformata di Laplace delle seguenti funzioni

$$F(s) = \frac{s^2+1}{s^2+2s+2} \quad ; \quad F(s) = \frac{s-1}{s^2(s+1)^2} \quad ; \quad F(s) = \frac{e^{-s}}{s(s^2+5s+6)} \quad ; \quad F(s) = \frac{s^4}{(s^2+1)^2}$$

Problema 4. Dato il sistema lineare tempo-invariante tempo-continuo ad un ingresso e due uscite, descritto dalle matrici

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad ; \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

determinare la funzione di trasferimento $W(s)$ e la risposta nell'uscita al segnale d'ingresso $u(t) = \sin t\ 1(t)$ sapendo che la condizione iniziale vale $x_0 = [1 \quad 1]^T$.

Problema 5. Calcolare l'antitrasformata zeta delle seguenti funzioni

$$F(z) = \frac{z^3}{(z^2-1/4)(z+1/3)} \quad ; \quad F(z) = \frac{z+1}{z^2(z-1/2)} \quad ; \quad F(z) = \frac{z^2}{z^2-2z+1} \quad (\textit{attenzione}!)$$

Problema 6. È dato il sistema lineare tempo-discreto tempo-invariante

$$\begin{cases} x(t+1) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

Scrivere l'espressione dell'antitrasformata zeta della funzione di trasferimento $W(z) = C(zI - A)^{-1}B + D$ e verificare che, analogamente al caso tempo-continuo, la funzione di trasferimento è uguale alla trasformata zeta della risposta all'impulso discreto δ_t.

Problema 7. Mostrare che se due sistemi lineari sono algebricamente equivalenti, allora hanno la stessa funzione di trasferimento.